

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. AUTOVALORES E AUTOVETORES DE MATRIZES

Consideremos novamente o exemplo:

Exemplo 1.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t} = \begin{bmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo a solução $x_1(t)$ na forma:

$$x_1(t) = u(t)v, \quad u = e^{-2t}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

observamos que $\frac{d}{dt}u(t) = -2u(t)$ e $Av = -2v$, ou seja o efeito dos operadores lineares $\frac{d}{dt}$ e $Av = -2v$ sobre u e v , respectivamente, é simplesmente a multiplicação pela constante -2 . A mesma observação vale para x_2 , trocando -2 por 6 e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. De fato, dada uma matriz A e um vetor v tal que $Av = kv$, podemos ver que a função $e^{kt} \cdot v$ é sempre uma solução do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Lembremos então a seguinte:

Definição 2. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times n$.

Dizemos que o escalar λ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se existir um vetor

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \neq 0$, tal que $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. O vetor v é denominado então

um autovetor associado a λ .

Agora, λ é autovalor e v autovetor associado se e somente se $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$, sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade $n \times n$. Lembrando que a equação: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ tem solução não trivial, se e somente se o $\det \mathbf{B} = 0$, obtemos a

Proposição 3. Um escalar λ é autovalor da matriz $\mathbf{A}$, se e somente se $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

A equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. é a *equação característica* de $\mathbf{A}$ e os autovalores são também chamados *valores característicos* de $\mathbf{A}$.

Exemplo 4. Encontrar os autovalores e autovetores da matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 6.$$

Portanto, os autovalores de $\mathbf{A}$ são -2 e 6 .

Para encontrar os autovetores associados a -2 , devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 - (-2) & 3 \\ 5 & 3 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí obtemos $3x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.

Atribuindo um valor arbitrário (não nulo) a x , obtemos um autovetor associado a $\lambda = -2$. Por exemplo, se $x = 1$, obtemos $y = -1$. e temos o autovetor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = -2$. será um múltiplo não nulo de v_1 .

Para encontrar os autovetores associados a 6, devemos resolver a equação:

$$\begin{bmatrix} 1 - (6) & 3 \\ 5 & 3 - (6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daí obtemos $-5x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = (5/3)x$.

Atribuindo um valor arbitrário (não nulo) a x , obtemos um autovetor associado a $\lambda = 6$. Por exemplo, se $x = 3$, obtemos $y = 5$. e temos o autovetor $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Qualquer outro autovetor associado a $\lambda = 6$. Será um múltiplo não nulo de v_2 .

Proposição 5. *Uma combinação linear de autovetores de uma matriz $\mathbf{A}$ associados ao mesmo autovalor λ é um autovetor associado a λ (ou é o vetor nulo).*

Em outras palavras o conjunto formado pelos autovetores associados a um mesmo autovalor é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, denominado autoespaço associado a λ .

Proposição 6. *Autovetores de uma matriz $\mathbf{A}$ associados a autovalores distintos são sempre linearmente independentes.*

Prova. Por indução sobre o número n de autovalores distintos. Para $n = 1$, o resultado é imediato. Suponhamo-lo verdadeiro para

$n = k$. Então se $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ são autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ distintos dois a dois, sejam $c_1, c_2, \dots, c_{k+1}$ escalares tais que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{k+1} v_{k+1} = 0$. Aplicando a matriz A , obtemos o sistema:

$$(1) \quad \begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{k+1} v_{k+1} &= 0. \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação em (1) por λ_{k+1} e subtraindo da segunda, obtemos $(\lambda_{k+1} - \lambda_1)c_1 v_1 + (\lambda_{k+1} - \lambda_2)c_2 v_2 + \dots + (\lambda_{k+1} - \lambda_k)c_k v_k = 0$. Da hipótese de indução, obtemos, $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Usando novamente a primeira equação em (1), segue que $c_{k+1} = 0$. $\square$

2. APLICAÇÕES PARA SISTEMAS DE EDOS LINEARES

Corolário 7. *Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são n autovetores linearmente independentes da matriz $n \times n$ A e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores correspondentes então uma solução geral do sistema homogêneo $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ é dada por:*

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \quad c_1, c_2, \dots, c_n \text{ constantes reais.}$$

Em particular, isto ocorre se $v_1, v_2, \dots, v_n$ são autovetores associados aos autovalores distintos dois a dois $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Prova. *Basta observar que $\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t}$, $\mathbf{x}_2 = e^{\lambda_2 t}$, $\dots$, $\mathbf{x}_n = e^{\lambda_n t}$, são n soluções linearmente independentes do sistema, em vista do resultado abaixo, provado anteriormente.* $\square$

Teorema 8. *Se $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ são soluções linearmente independentes do sistema homogêneo $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ então todas as soluções são da forma:*

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_n \mathbf{x}_n, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \text{ constantes reais.}$$

Exemplo 9. *Encontrar a solução geral do sistema:*

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= y - 3z\end{aligned}$$

Solução. na forma matricial, temos o sistema; $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}. \text{ A equação característica é:}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -(\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda - 5) = 0.\end{aligned}$$

Para $\lambda = -3$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$\det(\mathbf{A} - 3\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Portanto $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = -3$. e

$\mathbf{x}_1 = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma solução de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Para $\lambda = -4$, o processo de eliminação de Gauss nos dá:

$$\det(\mathbf{A} + 4\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Portanto $v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = -4$.

e $\mathbf{x}_2 = e^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é outra solução de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Finalmente, para $\lambda = 5$,

$$\det(\mathbf{A} - 5\mathbf{I} \mid 0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{processo de eliminação de Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Portanto $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda = 5$. e

$\mathbf{x}_3 = e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ é outra solução de $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Portanto a solução geral é dada por:

$$\mathbf{x} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-4t} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$