LISTA 3- DERIVADAS I:

1)d)

1)d) $f(x) = 3 - 2x^2$

i) A definição de derivada é:

$$\boxed{f'(x) = y'(x) = m_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Para calculá-la, substituo o argumento da função, ou seja, o x, por (a+h) e por (a) e, assim, temos:

$$m_a = \lim_{h \to 0} \frac{3 - 2(a+h)^2 - (3 - 2a^2)}{h} = \frac{3 - 2(a^2 + 2ah + h^2) - 3 + 2a^2}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{3} - \cancel{2a^2} - 4ah - 2h^2 - \cancel{3} + \cancel{2a^2}}{h} = \frac{-4ah - 2h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(-4a - 2h)}{\cancel{h}} =$$

$$\lim_{h \to 0} -4a - 2h = -4a - \cancel{2(0)}^{0} \rightarrow \boxed{m_a = -4a}$$

ii) Equação da reta tangente:

$y - y_0 = m(x_0)(x - x_0)$ ou: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ou: $y - f(y_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Para $P(2, f(2))$, teremos:

$f(x) = 3 - 2x^2 \rightarrow f(2) = 3 - 2(4) = 3 - 8 \Rightarrow \boxed{f(2) = -5}$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \rightarrow y - (-5) = -4(2)(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -8(x - 2) \rightarrow$

$y + 5 = -8x + 16 \rightarrow y = -8x + 16 - 5 \Rightarrow \boxed{y = -8x + 11}$

→ equação da reta tangente em $P(2, f(2))$.

2)a)

o ponto genérico

2)a) Definição de derivada: $\boxed{m(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

→ O que significa isso? É o coeficiente angular da reta tangente. Lembrando que a reta tangente TOCA o gráfico da função, mas NÃO corta!

a) $y = \sqrt{x}$; $P(4,2)$

i) Ponto $x = a$, ou seja, na definição, onde tenho a, substituo por y, que, para este exercício, $y = \sqrt{x}$, porém pedeu para calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da equação para $x = a$. Ou seja: em $y = \sqrt{x}$, substituo x por a e aí temos: $y = \sqrt{a}$ } essa é a função que substituo na definição de derivada, pois:

$y = \sqrt{a}$, então: $f(x) = \sqrt{a}$

e: $f(a+h) = \sqrt{a+h}$; $f(a) = \sqrt{a}$

Aí fica:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \left(\frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \right) \to$$

$$= \frac{\cancel{a} + \cancel{h} - \cancel{a}}{\cancel{h}[(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

→ ou: $y - y_0 = m(x_0)(x - x_0)$

ii) A eq. da reta tangente é dada por:

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, sendo y_0 e x_0 os pontos que eu tenho.

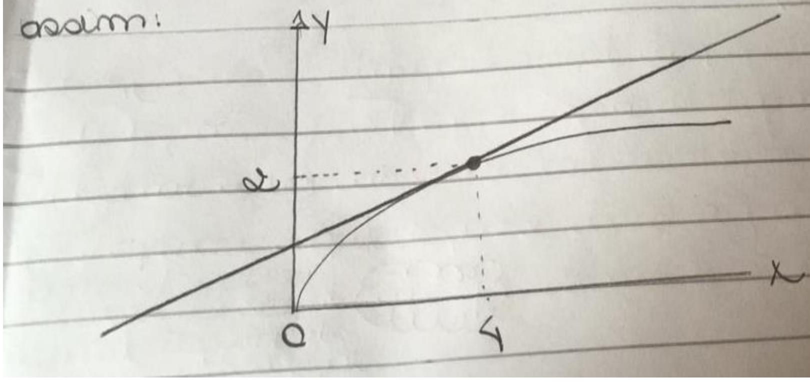
Para: $P(\underset{x_0}{4}, \underset{y_0}{2}) \Rightarrow y - 2 = m(4)(x-4)$, mas: $m = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ e $m(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Então: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{4}{4} \Rightarrow y = \frac{x}{4} - 1 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{4} + 1}$ } Equação da reta tangente em P.

iii) gráfico da curva ⇒ $y=\sqrt{x}$ — só sei que é aproximadamente assim: Δy Δx

Gráfico da tangente ⇒ é uma reta, mas que no ponto P(4,2), então: para todos os dois gráficos substituo alguns pontos, dentre eles P(4,2) e veremos algo assim:



3)a)

3. (i) Esboce o gráfico da equação e das tangentes nos pontos de coordenada x = -2, -1, 1 e 2.
(ii) Determine o ponto em que o coeficiente angular da tangente é m.

a) $y = x^2$; m = 6

i) $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$ e a equação da reta é obtida por: $m = f'(x) = \frac{y-y_0}{x-x_0}$

a) Qdo $x = -2$, temos que $f(-2) = (-2)^2 = 4$ e $m = f'(-2) = 2(-2) = -4$
logo a equação da reta nesse ponto será:

$$m = f'(x) = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow -4 = \frac{y-4}{x-(-2)} \Rightarrow -4 = \frac{y-4}{x+2} \Rightarrow -4(x+2) = y-4$$

$$\Rightarrow -4x - 8 = y - 4 \Rightarrow y = -4x - 8 + 4 \Rightarrow \boxed{y = -4x - 4}$$

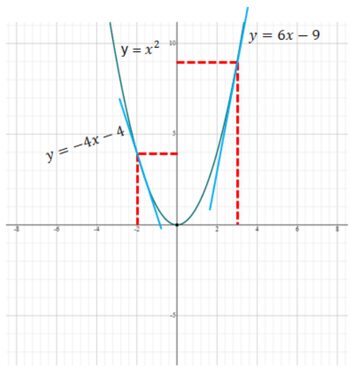
ii) $f(x) = x^2$; $m = 6$

Se $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$ quando $m = 6$ temos que $f'(x) = m = 6 = 2x \Rightarrow x = 3$

Então qdo $x = 3$, temos que $f(3) = (3)^2 = 9$ e $m = f'(3) = 2(3) = 6$
logo a equação da reta nesse ponto será:

$$m = f'(x) = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow 6 = \frac{y-9}{x-(3)} \Rightarrow 6 = \frac{y-9}{x-3} \Rightarrow 6(x-3) = y - 9$$

$$\Rightarrow 6x - 18 = y - 9 \Rightarrow y = 6x - 18 + 9 \Rightarrow \boxed{y = 6x - 9}$$



4)a)

4) a) $f(x) = -5x^2 + 8x + 2$ $P(-1,-11)$

i) Uso a definição de derivada:

$$f'(x) = m_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overset{\mathrm{I}}{a+h}) - f(\overset{\mathrm{II}}{a})}{h}$$

substituindo $(a+h)$ em x e depois, de novo, olho pra função e onde tiver x substituo por (a):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-5(a+h)^2 + 8(a+h) + 2 + 5a^2 - 8a - 2}{h} = \ldots$$

Resolvendo os produtos notáveis e realizando as simplificações... $\lim_{h \to 0} -10a - 5h + 8 \Rightarrow \boxed{f'(x) = m = \lim_{h \to 0} -10a + 8}$

ii) domínio de $f'(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R}\}$

iii) Ponto $P = (\underset{x_0}{-1}, \underset{y_0}{-11})$

Equação da reta tangente: $y - y_0 = m(x_0)(x - x_0)$, sendo: $x_0 = -1$, $y_0 = -11$; $m = f'(x) = -10a + 8$ e $m(-1) = -10(-1) + 8 =$
$= 10 + 8 \Rightarrow m(-1) = 18$

substituindo na equação da reta tg:

$y - y_0 = m(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - (-11) = 18(x - (-1)) = y + 11 = 18(x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{f(x) = 18x + 7}$ → essa é a equação da reta tangente em $P(-1,-11)$.

iv) Para a tangente ser horizontal, $m = 0$:

no caso: $m = f'(x) = -10a + 8$, → igualo isso a zero, então:

$-10a + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{5}} \Rightarrow$ ou seja: $x = \frac{4}{5}$ → substituindo $x = \frac{4}{5}$ na função inicial (para encontrar y): $f\left(\frac{4}{5}\right) = -5\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 8\left(\frac{4}{5}\right) + 2 =$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{26}{5}}$

Pode-se afirmar que: $m = 0$ em: $P\left(\frac{4}{5}, \frac{26}{5}\right)$.

Explicação: nesta questão, primeiramente, deve-se usar a definição da derivada, através do limite. Ao derivar, encontra-se uma outra função: f'(x)=10a+8(lembrando, sempre, que a derivada também é o coeficiente angular da reta tangente).

Para encontrar o domínio, deve-se olhar para a função: f'(x)= 10a+8, e, ao analisá-la, vê-se que não há problema em relação à descontinuidade, indeterminação, por exemplo...Isso, porque, se substituirmos a letra (a), por (x), vemos que temos uma função de primeiro grau e quanto a isso não há restrições. Portanto, o domínio está dos reais, certo?!

Para escrever a equação da tangente no ponto P, deve se aplicar o ponto P, dado no enunciado, tanto na equação da derivada, quanto na equação da reta tangente, conforme mostrado em (iii).

Em (iv) pede-se pra encontrar os pontos em que a tangente é horizontal...Para isso, utiliza-se a função obtida através da derivada, e iguala-se a zero. Assim obtém-se o valor de (a) para quando m=0, mas esse (a) é a mesma coisa de x, então encontramos o valor de x para o qual m=0. Certo? Agora basta substituir esse valor de x na função dada no enunciado, para poder encontrar para qual valor de y, m=0. E aí, então, consegue-se obter, o par ordenado para o qual m=0.

5)h)

5) h) $f(x) = 12x^{1/3}$ $P(-27, -36)$

i) Utilizando a regra da potência:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(12x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}\right) = \frac{12}{3}x^{-2/3} \Rightarrow \boxed{f'(x) = 4x^{-2/3} \text{ ou } \frac{4}{x^{2/3}}}$$

ii) Para a função $f'(x)$, vemos que não pode ocorrer divisão por zero, por isso, x pode assumir qualquer valor real, menos o próprio zero, portanto:

$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$.

iii) Equação da reta tangente:

$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$ → sendo: x_0 e y_0 pontos conhecidos e $f'(x_0)$ a derivada da função em x_0.

Para $P(-27, -36)$:

$$\underbrace{-27}_{x_0} \quad \underbrace{-36}_{y_0}$$

$$f'(x) = 4x^{-2/3} \text{ ou } \frac{4}{x^{2/3}} \Rightarrow f'(-27) = \frac{4}{(-27)^{2/3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{(-27)^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt[3]{27 \cdot 27}} = \frac{4}{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{27}}$$ mas: $3^3 = 27$, então:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{3^3}} = \frac{4}{3 \cdot 3} \Rightarrow \boxed{f'(-27) = \frac{4}{9}}$$

Substituindo na equação da reta tangente:

$$y - (-36) = \frac{4}{9}(x - (-27)) \rightarrow y + 36 = \frac{4}{9}(x + 27) \rightarrow$$

$$\rightarrow y + 36 = \frac{4}{9}x + \frac{4 \cdot \cancel{27}^{3} \div 9}{\cancel{9} \div 9} \rightarrow y + 36 = \frac{4}{9}x + 4 \cdot 3 \rightarrow y + 36 = \frac{4}{9}x + 12$$

$$y = \frac{4}{9}x + 12 - 36 \rightarrow \boxed{y = \frac{4}{9}x - 24}$$ Eq. da reta tangente em $P(-27, -36)$.

iv) A tangente é horizontal, quando $m = 0$.

No caso: $m = f'(x) = \frac{4}{x^{2/3}}$.

$\frac{4}{x^{2/3}} = 0$ → não tem como, dentro dos reais, haver pontos tais que $m = 0$.

6)c)

6) c) $f(x) = 9\sqrt[3]{x^2}$ posso reescrever como: $\Rightarrow f(x) = 9(x^{2/3})$

Utilizando a regra da potência:

$f'(x) = {}^{3}\cancel{9} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} x^{2/3 - 3/3} = 6x^{-1/3}$ //

→ notação de derivação

$f''(x) = (6x^{-1/3})' = {}^{2}\cancel{6} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right)(x^{-1/3 - 3/3}) = -2x^{-4/3}$ //

$f'''(x) = (-2x^{-4/3})' = -2\left(-\frac{4}{3}\right)(x^{-4/3 - 3/3}) = \frac{8}{3}x^{-7/3}$ //

7) b)

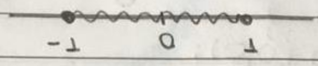
f) Para uma função ser diferenciável em um dado intervalo, a derivada de tal função deve existir em TODOS os pontos pertencentes a esse intervalo.

Lembrando que, quando se utiliza colchetes para representar um intervalo, significa que: os valores que delimitam o intervalo, pertencem ao intervalo.

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}}$ //

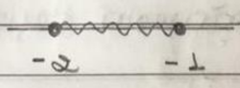
→ Ao analisar, vemos que a função está definida para todos os números reais, exceto para quando $x = 0$, ou seja: $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

i) $[-1, 1]$



Esse intervalo inclui o zero → a função não é diferenciável nesse ponto, logo a função não é diferenciável no intervalo dado.

ii) $[-2, -1]$



A função é diferenciável em todos os pontos entre -2 e -1, incluindo eles mesmos. Logo, a função é diferenciável no intervalo dado.

8)b)

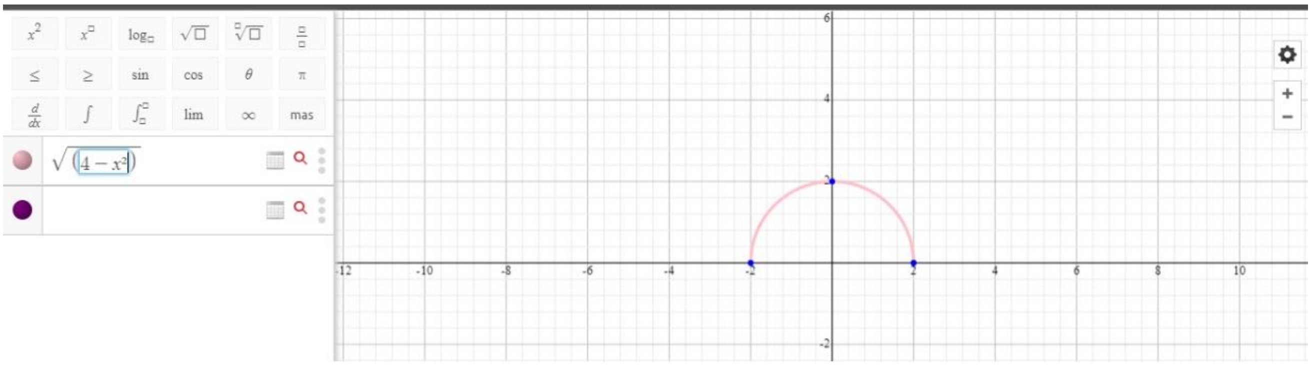
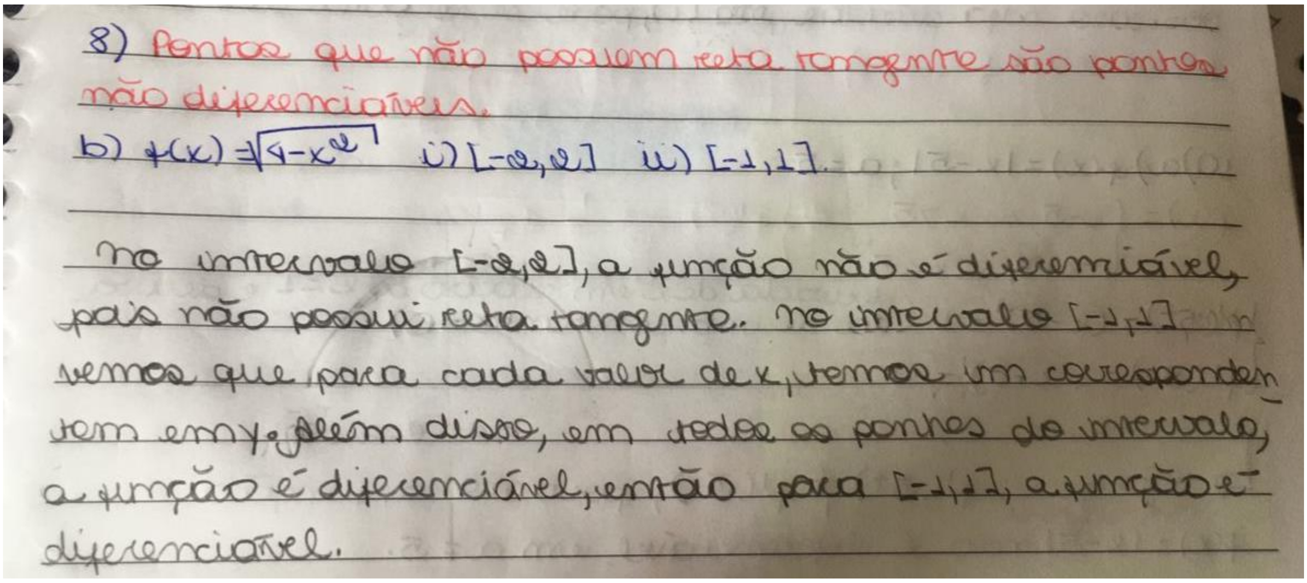


Gráfico da questão 8 feito no Symbolab.



8) Pontos que não possuem reta tangente são pontos não diferenciáveis.

b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ i) $[-2,2]$ ii) $[-1,1]$.

No intervalo $[-2,2]$, a função não é diferenciável, pois não possui reta tangente. No intervalo $[-1,1]$ vemos que para cada valor de x, temos um correspondente em y. Além disso, em todos os pontos do intervalo, a função é diferenciável, então para $[-1,1]$, a função é diferenciável.

9)a)

9) Tangente vertical em um ponto a: $\lim_{x \to a} f'(x) = \infty$

Ponto de reflexão em um ponto a: $f'( )$ NÃO EXISTE

a) $f(x) = x^{1/3}$

$f(x) = x^{1/3} \to f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$

i) Tangente vertical em (0,0):

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^{2/3}} = +\infty$

ii) Ponto de reflexão:

$f'(0) = \frac{1}{3(0)^{2/3}} = \frac{1}{0}$ → não está definido

Conclusão: $f(x)$ possui tangente vertical e ponto de reflexão em (0,0).

OBS: caso haja dúvidas em (i), pode-se recorrer aos limites laterais!

10)a)

10)a) $f(x) = |x-5|$; $a = 5$

$f(x) = \begin{cases} x-5, & \text{se } x > 5 \\ -x+5, & \text{se } x < 5 \end{cases}$

$\begin{cases} f'(5^+) = (x-5)' = 1 \\ f'(5^-) = (-x+5)' = -1 \end{cases}$ (derivada de x em relação a x = 1 e derivada de uma constante = 0).

↳ veja que: $f'(5^+) \neq f'(5^-)$, portanto a função $f(x) = |x-5|$ não é diferenciável em $a = 5$.