

Funções dadas implicitamente e derivada implícita

• Antes vamos falar da:

• Notação de Leibniz para derivada:

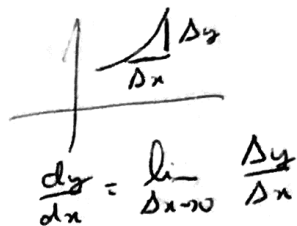
• $y = f(x)$

Notação de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

não é um quociente
(mas pode ser interpretado

do como um quociente de dois
acréscimos; isso é relacionado ao conceito
de diferencial que não veremos)


$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=p} = f'(p)$$

Exemplos: 1) $y = 3x^2 + 1$ $\frac{dy}{dx} = 6x$

2) $z = e^u$ $\frac{dz}{du} = e^u$

Agora, se neste caso $u = x^2 + 1$,

$$\frac{dz}{dx} = e^{(x^2+1)} \cdot (x^2+1)' = e^{x^2+1} \cdot 2x \quad (\text{use a regra da cadeia})$$

• Obs: A regra da cadeia na notação de Leibniz fica da seguinte forma:

Suponha $\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(y) \end{cases}$

$$\therefore z = g(y) = g(f(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

mas este é aplicado
em $y = f(x)$!!

Note que $\frac{dz}{dy} = g'(y)$

≠

Essa notação é melhor em alguns
momentos, como veremos depois.

Funções dadas implicitamente:

- Até agora as nossas funções eram da forma $y = f(x)$, ou seja, eram dadas por uma fórmula explícita, usada para achar y em função de x .

Exemplos: $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = x \sin x + e^x$ etc.

- Mas ~~podemos ter~~ a função dada implicitamente por uma relação entre x e y .

Exemplos: $x^2 + y^3 = 1$ ou $x^3 + y^3 = 6xy$



note que se considerarmos "o desenho" todo não temos uma função, mas pode-se pegar só uma parte.

Exemplo: $y = f(x)$ dada por $x^2 + y^2 = 1$

Temos que $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$ são duas funções que podem ser dadas implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Precisamos ter mais informação para saber qual considerar, se tivermos que usar a função em algum caso concreto.

Obs: O exemplo acima é um excesso no sentido que foi possível "isolar y ", ou seja, foi possível resolver a equação. Em geral isso não será possível, não conseguiremos chegar em algo do tipo $y = f(x)$.

Def: Dizemos que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente por uma equação $P(x, y)$, se $\forall x \in D \cap I$, $(x, f(x))$ é solução da equação $P(x, y)$.

Problema: Como derivar? (É derivável?)

• Podemos derivar funções dadas implicitamente, mesmo quando não conseguimos 'isolar o y'. Para isso, é só derivar do dois lados da equação, ou seja, faz a derivada implícita.

Obs: Existem resultados que garantem a existência e derivabilidade, em certas condições, de funções dadas implicitamente por uma equação. Não falaremos dele aqui (nem neste curso).

• É mais fácil explicar a derivada implícita através de exemplos.

Exemplos:

1) $y = f(x)$ tal que $x^2 + y^2 = 1$ use o
regra da cadeia

$$x^2 + [f(x)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

(derivando
dos dois lados)

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \quad \left(\text{ou } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \right)$$

2) $y = f(x)$ tal que $x^3 + y^3 = 6xy$

$$\therefore (x^3 + y^3)' = (6xy)'$$

(mas lembre que $y = y(x)$)

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y'(x) = 6y(x) + 6x y'(x)$$

(aqui usamos a
regra do
produto)

3) Se $y = y(x)$ é dada implicitamente por $y^3 + xy^2 + 3x = 5$

Na derivação implícita é comum usar a notação de Leibnitz. Vamos usá-la aqui:

$$\frac{d}{dx} [y^3 + xy^2 + 3x] = \frac{d}{dx} (5)$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + y^2 + x \cdot 2y \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

Note que sempre estamos achando $\frac{dy}{dx}$, mas ele também ^{está} sendo dado implicitamente por uma equação. Seria demais esperar que ele possa ser expresso de outra forma. Mas nos casos "mais concretos", onde queremos por exemplo, achar a derivada em um ponto, isso já será suficiente.

Exercício (resolvido): Ache a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ definida implicitamente por $x^3 + y^3 = xy^2 + 5$ no ponto $(1, 2)$.

Primeiro note que $(1, 2)$ de fato é um ponto do gráfico de f pois ele satisfaz a equação: $1^3 + 2^3 = 1 \cdot 2^2 + 5$ (ok).

Note também que $y(1) = 2$ (dado). Resta achar $y'(1)$.

Fazendo a derivação implícita:

$$x^3 + y^3 = xy^2 + 5 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \cdot y' = y^2 + x \cdot 2y \cdot y'$$

Substituindo $x=1$ e $y=2$ na igualdade obtida temos:

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot y'(1) = 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot y'(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(1) = \frac{1}{8}}$$

Logo a equação da reta tangente pedida é $\boxed{y - 2 = \frac{1}{8}(x - 1)}$,
ou seja $\boxed{x - 8y + 15 = 0}$