Revisão de Relatividade Restrita

15/05/2020

Princípio da Relatividade de Galileu em Mecânica Clássica

"As leis da Mecânica são as mesmas em qualquer referencial inercial"

ou

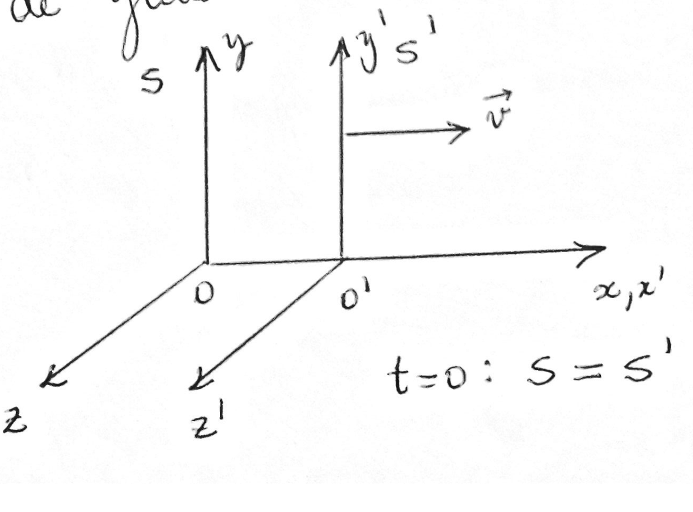
"Todos os referenciais inerciais são equivalentes"

ou

"Não existe referencial de repouso absoluto"

Referencial inercial é aquele definido pela primeira lei de Newton, ou seja, aqueles para os quais os objetos satisfazem a lei da inércia.

A relação entre as coordenadas de dois referenciais inerciais é dada pela transformada de Galileu

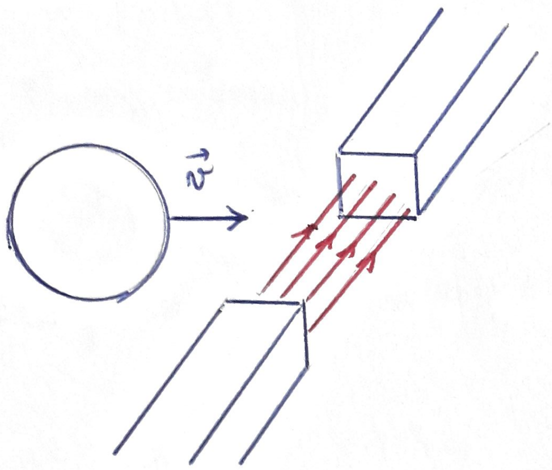


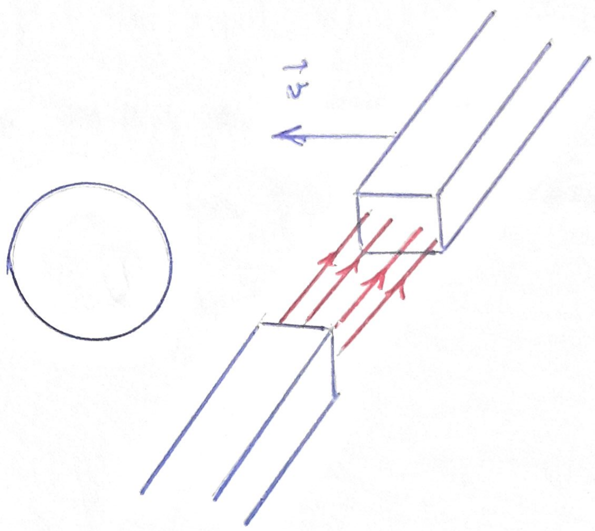
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Pergunta:

Existe um referencial de repouso absoluto no Eletromagnetismo ou o Princípio de Relatividade se estende a fenômenos eletromagnéticos?

Fenômenos elétricos e magnéticos segundo diferentes observadores inerciais





imã em repouso
circuito em movimento

$\Downarrow$

FEM gerada por uma força de natureza magnética

imã em movimento
circuito em repouso

$\Downarrow$

FEM gerada por uma força de natureza elétrica

No final do século XIX acreditava-se que apenas uma das interpretações estaria correta. O problema não deveria depender da velocidade relativa circuito - imã, mas sim da velocidade de cada um com respeito ao éter.

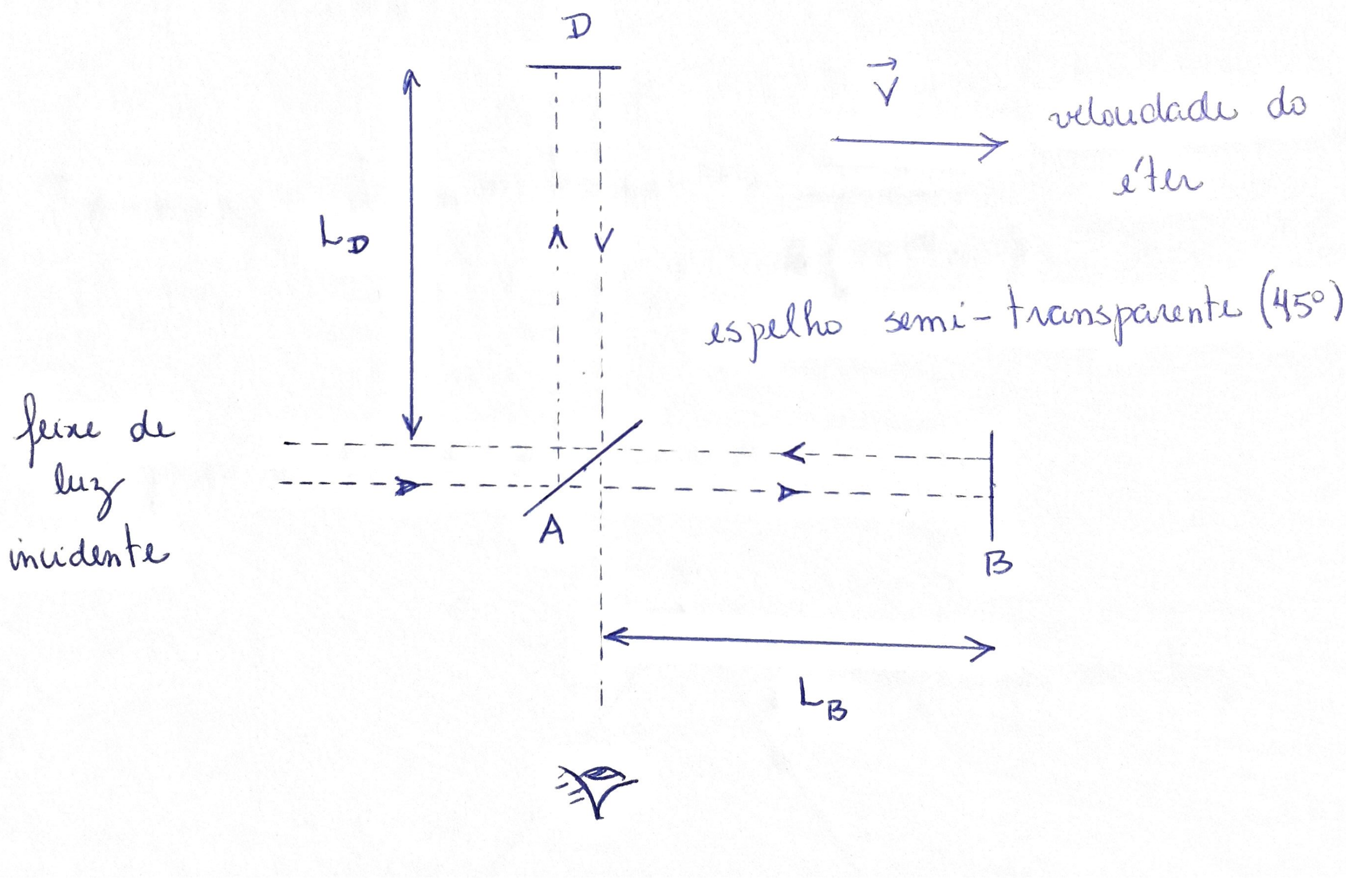
A não observação de uma diferença entre as FEM's implicava que a velocidade da luz devia ser muito maior que v.

Nessa época, ficou claro que medir a velocidade de um objeto com respeito ao éter era uma tarefa fundamental para eliminar as ambiguidades anteriores.

Tentativas de detectar a presença do éter

Experimento de Michelson-Morley

Se o éter existe, a velocidade da luz medida num referencial S' que se move com relação ao éter depende da velocidade do referencial.



No referencial do éter, de acordo com as transformadas de Galileu, temos p/ o trecho $A \to B \to A$

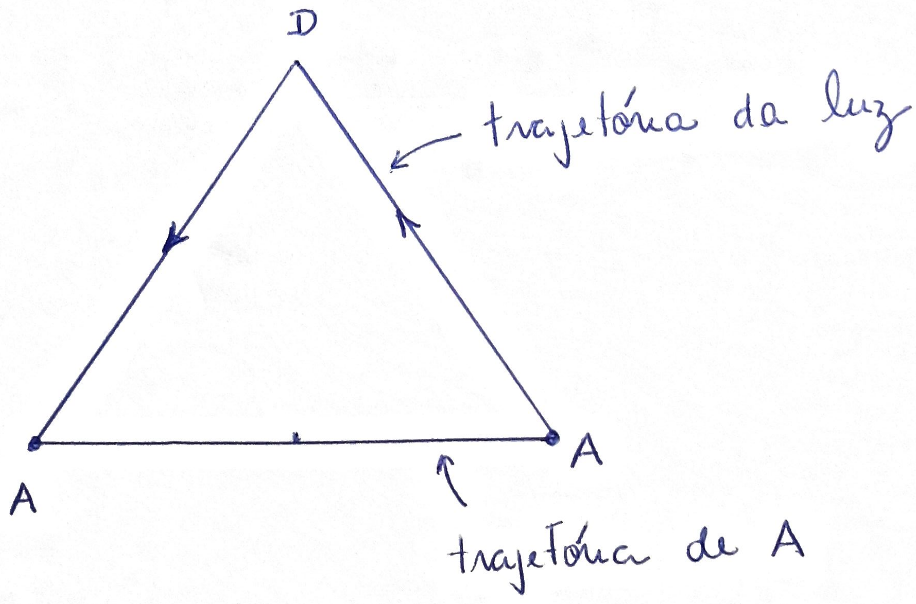
$$t_{A\to B} = \frac{L_B - V t_{A\to B}}{c} \quad e \quad t_{B\to A} = \frac{L_B + V t_{B\to A}}{c}$$

Logo

$$t_{A\to B} = \frac{L_B}{c+V} \quad e \quad t_{B\to A} = \frac{L_B}{c-V}$$

$$t_{A\to B\to A} = t_{A\to B} + t_{B\to A} = \frac{2L_B}{c\left(1 - V^2/c^2\right)}$$

Já para o trecho $A \to D \to A$



$$t_{A\to D\to A} = \frac{d_{A\to D\to A}}{c} = \frac{2\left[L_D^2 + \left(\frac{V t_{A\to D\to A}}{2}\right)^2\right]^{1/2}}{c}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4} t_{A\to D\to A}^2 = \frac{L_D^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2}\frac{t_{A\to D\to A}^2}{4} \Rightarrow t_{A\to D\to A} = \frac{2L_D}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Se luz de comprimento λ é utilizado, um observador verá interferência construtiva (máximos de intensidade) se a seguinte condição for satisfeita

$$c\,t_{A\to B\to A} = c\,t_{A\to D\to A} \pm n\lambda$$

Para $n=0$, por exemplo

$$\frac{2L_B}{c(1-V^2/c^2)} = \frac{2L_D}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} \Rightarrow L_D = \frac{L_B}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Girando o aparato de 90°, temos

$$t'_{A\to D\to A} = \frac{2L_D}{c(1-V^2/c^2)}$$

e

$$t'_{A\to B\to A} = \frac{2L_B}{c\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{2L_D}{c}$$

$$L_D = \frac{L_B}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Nessa configuração, interferência destrutiva implica

$$\Delta t' = t'_{A\to D\to A} - t'_{A\to B-A} = \frac{2L_D}{c}\left(\frac{1}{1-V^2/c^2} - 1\right) = \frac{\lambda}{2c}$$

$$\Downarrow$$

$$L_D = \frac{\lambda}{4}\frac{c^2}{V^2}$$

Se tomarmos $V \simeq 10^{-4}c$ (velocidade da Terra em torno do sol) e $\lambda = 4\times10^{-5}$ cm

$$L_D = 10 \text{ m}$$

Nenhuma mudança nos padrões de interferência foi observado, mesmo quando a experiência era repetida com 6 meses de diferença.

Einstein resolveu o problema das ambiguidades de interpretação de medidas eletromagnéticas feitas por diferentes observadores inerciais e os resultados negativos de Michelson e Morley introduzindo dois novos postulados:

Postulados da Relatividade Restrita ou Especial
(Einstein 1905)

1. Princípio da Relatividade ← generalização do Princípio de Galileu

"As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial"

2. Constância da velocidade da luz.

"A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal para todos os observadores inerciais, independente do movimento da fonte"

Transformações de Lorentz

Quais são as transformações de coordenadas espaço-temporais consistentes com os postulados da Relatividade Especial?

Um evento num dado referencial S será caracterizado por (t, x, y, z) e num referencial S' por (t', x', y', z'), chamadas de coordenadas espaço-temporais dos eventos.
(S e S' são ambos inerciais) ~~com~~

Queremos determinar

$$x'(t, x, y, z) \qquad\qquad x(t', x', y', z')$$

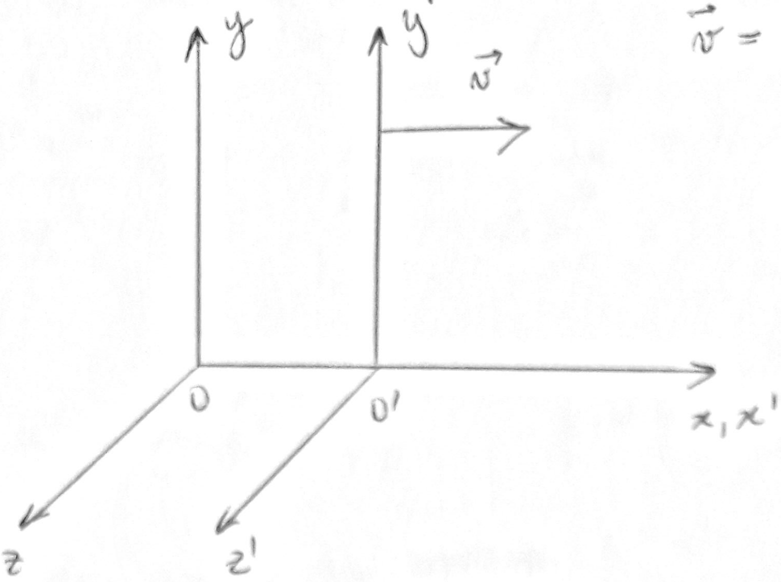
$$y'(t, x, y, z) \qquad e \qquad y(t', x', y', z')$$

$$z'(t, x, y, z) \qquad\qquad z(t', x', y', z')$$

$$t'(t, x, y, z) \qquad\qquad t(t', x', y', z')$$

Postulados

1. Princípio da Relatividade
2. Constância da velocidade da luz
3. Homogeneidade do espaço-tempo



$\vec{v} = v\hat{x}$ (v cte)

Em $t=0$: $O' = O$

Notação: $\begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases} \Rightarrow x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$

De acordo com o Princípio da Relatividade, a 2ª lei de Newton deve ser válida tanto em S quanto em S'.

Na ausência de forças externas ($\vec{F} = \vec{0}$), partículas testes devem estar em repouso ou seguindo linhas retas a velocidades ctes em ambos os referenciais.

Se acoplamos relógios a essas partículas testes, o tempo marcado por esses relógios será denotado τ.

As eqs de movimento em S e S' são então

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

Para $x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$ $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Temos, pela regra da cadeia

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu}{d\tau}$$

$$\underbrace{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}}_{=0} = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{dx'^\nu}{d\tau}\right)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \underbrace{\frac{d^2x'^\nu}{d\tau^2}}_{=0} + \sum_{\nu=0}^{3}\sum_{\sigma=0}^{3} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\sigma \partial x'^\nu} \frac{dx'^\sigma}{d\tau} \frac{dx'^\nu}{d\tau}$$

Então

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\sigma \partial x'^\nu} = 0 \Rightarrow x^\mu(x'^\nu) \text{ é linear em } x' \text{ !}$$

Ou seja

$$\begin{cases} x'^0 = a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 \\ x'^1 = a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \\ x'^2 = a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 \\ x'^3 = a_{30}x^0 + a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 \end{cases}$$

$\downarrow$ forma compacta

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a^\mu_{\ \nu} x^\nu$$

ou

$$x'^\mu = a^\mu_{\ \nu} x^\nu \longleftarrow$$ notação de Einstein de soma implícita sobre índices repetidos

→ $a^\mu_{\ \nu}$ são coeficientes dependentes possivelmente da velocidade v.

→ Esperamos também que p/ $v=0$:

$$a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$$

$$\text{e} \quad a^\mu_{\ \nu} = 0 \quad \text{p/} \quad \mu \neq \nu$$

→ $v \ll c \Rightarrow$ trasformados de Galileu

Eventos sobre o eixo x em S devem ser mapeados no eixo x' de S':

$$y = z = 0 \Rightarrow y' = z' = 0$$

$$x^2 = x^3 = 0 \Rightarrow x'^2 = x'^3 = 0$$

$$x'^2(x^0, x^1, 0, 0) = a_{20}\, x^0 + a_{21}\, x^1$$

$$x'^3(x^0, x^1, 0, 0) = a_{30}\, x^0 + a_{31}\, x^1$$

$$\Downarrow$$

$$a_{20} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = 0$$

$$x'^2 = a_{22}\, x^2 + a_{23}\, x^3$$

$$x'^3 = a_{32}\, x^2 + a_{33}\, x^3$$

Eventos no plano $xy\,(z=0)$ em S devem ser mapeados no plano $x'y'\,(z'=0)$ em S'

$$x'^3(x^0, x^1, x^2, 0) = a_{32}\, x^2 \Rightarrow a_{32} = 0$$

De forma análoga, o plano $xz\,(y=0)$ em S deve ser mapeado no plano $x'z'\,(y'=0)$ em S' e, portanto

$$a_{23} = 0$$

Logo $$x'^2 = a_{22} x^2$$
$$x'^3 = a_{33} x^3$$

Tome agora uma barra de comprimento unitário e em repouso em S ao longo do eixo y. Seu comprimento em S' será

$$y' = x'^2 = a_{22}$$

A mesma barra em repouso em S' ao longo do eixo y' seria medida em S como

$$y = x^2 = \frac{1}{a_{22}} x'^2 = \frac{1}{a_{22}}$$

Em ambos os casos, os observadores estão medindo uma barra ao longo do eixo y que se move com uma velocidade de magnitude v ao longo de x. Então

$$a_{22} = \frac{1}{a_{22}} \Rightarrow a_{22} = 1$$

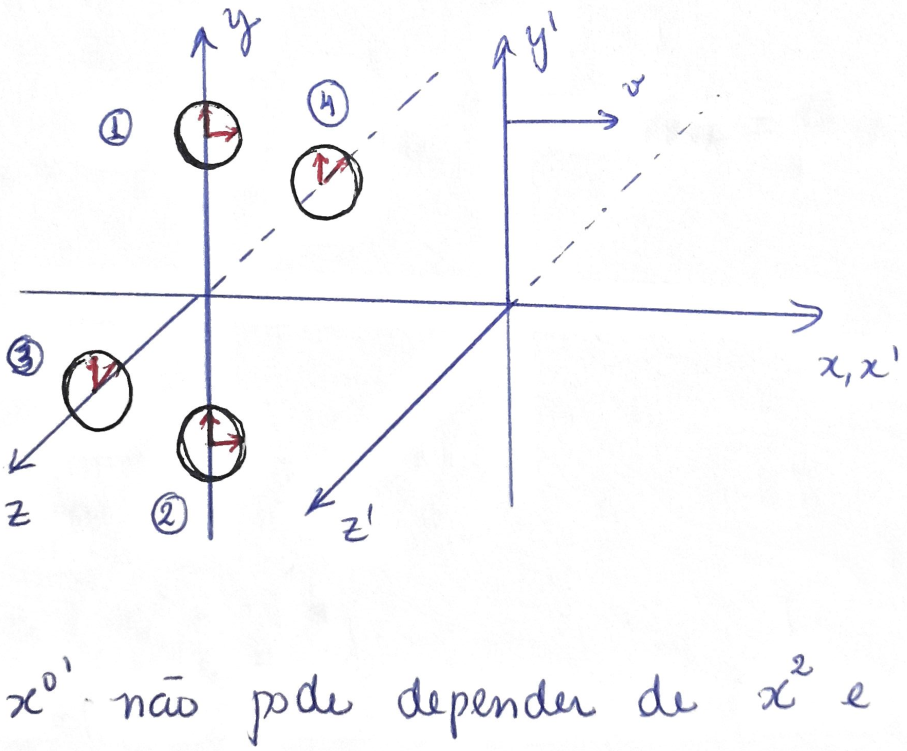
De forma análoga

$$a_{33} = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x'^0 = a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 \\ x'^1 = a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}$$

15

Relógios posicionados simetricamente em relação ao planos xz e xy devem apresentar marcações idênticas no referencial S'



$t_1' = t_2'$

$t_3' = t_4'$

Então, $x^{0'}$ não pode depender de x^2 e x^3

$$x'^0 = a_{00}x^0 + a_{01}x^1$$

Além disso, qualquer ponto sobre o plano $y'z'$ em S' ($x'^1 = 0$) deve corresponder a pontos em S tais que $x = vt$. Então

$$0 = x'^1 = a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3$$

$$= a_{10}x^0 + a_{11}vt + a_{12}x^2 + a_{13}x^3$$

$$= a_{10}x^0 + a_{11}\frac{v}{c}x^0 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3$$

$$0 = (a_{10} + \beta a_{11})x^0 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 \quad \forall\ x^2, x^3, x^0$$

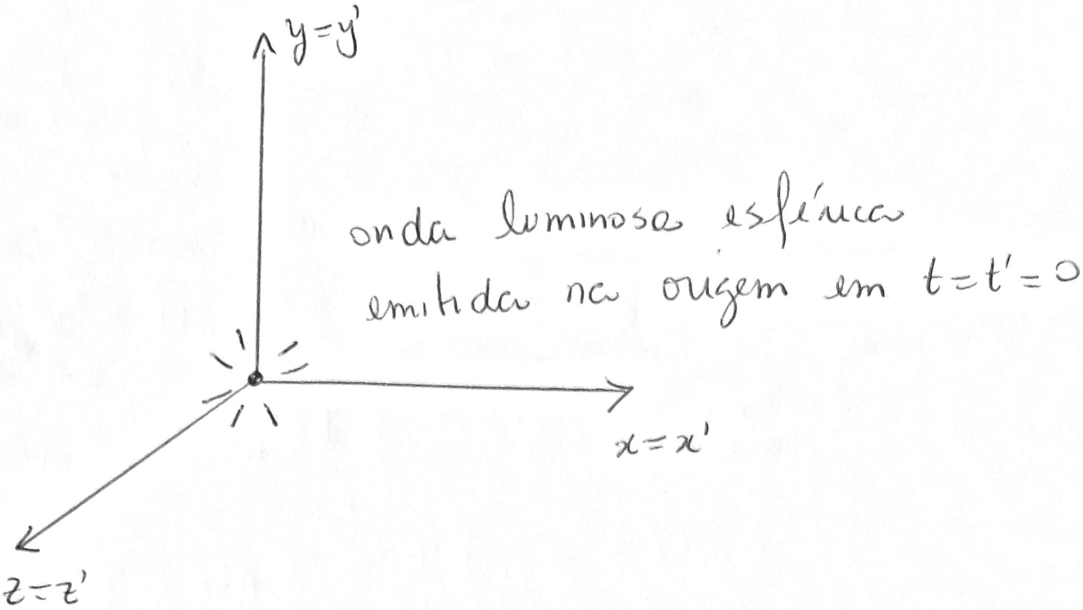
$$\Downarrow$$

$$a_{10} = -\beta a_{11} = -\beta a \quad e \quad a_{12} = a_{13} = 0$$

Portanto

$$\begin{cases} x'^0 = a_{00}x^0 + a_{01}x^1 \\ x'^1 = a(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases}$$

Constância da velocidade da luz



Em ambos os referenciais, a frente de onda deve ser descrita como uma superfície esférica se expandindo a partir da origem com velocidade c

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = c^2t^2 \\ x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = (x^0)^2 \\ (x'^1)^2+(x'^2)^2+(x'^3)^2 = (x'^0)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(x'^0)^2 = (a_{00}x^0 + a_{01}x^1)^2 = a^2(x^1-\beta x^0)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

$$(a^2 - a_{01}^2)(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 2\left(a_{00}a_{01} + a^2\beta\right)x^0x^1$$

$$= (a_{00}^2 - a^2\beta^2)(x^0)^2$$

Usando que $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^0)^2$:

$$\begin{cases} a^2 - a_{01}^2 = 1 \\ a_{00}\, a_{01} + a^2 \beta = 0 \\ a_{00}^2 - a^2 \beta^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma = a_{00}$$

$$a_{01} = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\beta\gamma$$

Transformações de Lorentz

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma\,(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 = \gamma\,(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \equiv \begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c} x\right) \\ x' = \gamma\,(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Trocando $v \leftrightarrow -v$ $(S \leftrightarrow S')$

$$\begin{cases} x^0 = \gamma\,(x'^0 + \beta x'^1) \\ x^1 = \gamma\,(x'^1 + \beta x'^0) \\ x^2 = x'^2 \\ x^3 = x'^3 \end{cases}$$

No limite $v \lll c$ $(\beta \ll 1)$: $\gamma \simeq 1$

Lorentz $\longrightarrow$ Galileu

Em notação matricial

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{matriz } \Lambda} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} (\Lambda)^\mu{}_\nu \, x^\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$$

notação de Einstein