

Lista IV

- ① [1.0] Em geral uma equação de movimento não segue de uma lei de conservação, mas isso pode acontecer em alguns casos. Por exemplo, para uma partícula de massa m que se movimenta em uma dimensão, a conservação de energia implica na equação de movimento para essa partícula.

Considere uma partícula de massa m_0 se movendo ao longo de uma linha de mundo x^σ num espaço-tempo qualquer. O tensor de energia-momento para essa partícula pode ser escrito como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} m_0 \int ds \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s)). \quad (1)$$

Mostre que a lei de conservação $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ implica na equação da geodésica para a trajetória $x^\sigma(s)$. Por quê neste caso a equação de movimento segue da lei de conservação? *Dica:* Em uma solução possível é útil usar a relação derivada em aula:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-|\det(g)|}). \quad (2)$$

- ② [1.0] O tensor de Ricci é definido como uma contração do tensor de Riemann $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda$. Mostre que na aproximação quase-estática a componente tempo-tempo do tensor the Ricci é dada por

$$R_{00} \simeq \nabla^2 \Phi + \mathcal{O}(\Phi^2), \quad (3)$$

onde Φ é o potencial Newtoniano. *Dica:* Comece decompondo a métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde $h_{\mu\nu} \ll 1$.

- ③ [1.0] Encontre o raio de Schwarzschild de um objeto esférico que tenha a massa da terra ($M = 6 \times 10^{24} \text{Kg}$).

- ④ [1.0] Uma forma mais geral da equações de Einstein pode ser como:

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4)$$

onde α é uma constante adimensional. Mostre que se α não fosse $1/2$, então as equações de Einstein não estariam de acordo com os experimentos.

Dica: Considere a divergência covariante das equações de Einstein. Para fazer isso, contraia as identidades de Bianchi para obter que $R_{,\mu} = 2R_{\mu;\nu}^{\nu}$. Depois derive o traço das equações de Einstein.

- ⑤ [1.0] Um aluno está descrevendo a sua queda radial num buraco negro de Schwarzschild através de ondas de rádio, enquanto outro aluno recebe a transmissão fixo em (r_*, θ_*, ϕ_*) . Para resolver este exercício, é útil saber que $E_\lambda = (1 - R_s/r) dt/d\lambda$, onde $R_s = 2GM$, é uma constante de movimento (veja a equação 5.61 do livro do Sean Carroll).

a) Mostre que a velocidade com a qual o aluno cai no buraco negro com relação a coordenada t é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = -(1 - R_s/r) \sqrt{\frac{R_s(r_* - r)}{r(r_* - R_s)}} \quad (5)$$

Dica: Comece encontrando $dr/d\tau$, onde τ é o tempo próprio do aluno caindo em direção ao buraco negro.

b) Mostre que a razão entre a frequência da onda de rádio emitida em r_{em} e a frequência observada em r_* é dada por:

$$\frac{\omega_{em}}{\omega_{obs}} = \frac{\sqrt{1 - R_s/r_*}}{(1 - R_s/r_{em})} (\sqrt{1 - R_s/r_*} + \sqrt{R_s/r_{em} - R_s/r_*}) \quad (6)$$

Dica: Use que a frequência de um fóton percorrendo uma geodésica nula $x^\nu(\lambda)$ detectada por um observador com 4-velocidade U^μ é dada por:

$$\omega = -g_{\mu\nu} U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (7)$$

c) Mostre que a relação entre o redshift sofrido pela onda de rádio se relaciona com a massa do buraco negro como:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} \propto e^{t_{obs}/2GM}, \quad (8)$$

onde t_{obs} é o tempo que leva para a onda emitida chegar até o observador em r_* .

- ⑥ [2.0] Considere, em um espaço-tempo, um conjunto de geodésicas, infinitesimalmente próximas, parametrizadas por uma variável μ e um outro conjunto parametrizado por uma variável λ . Esses dois conjuntos formam o mapeamento do espaço-tempo. O campo de vetores tangentes a curva μ é dado por u^i , enquanto o campo de vetores tangentes à curva λ é v^i .

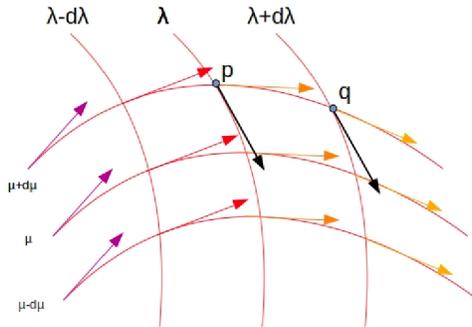


Figura 1: Conjunto de curvas λ e μ .

Considere os dois pontos $p = x_0^i$ e $q = x_0^i + dx^i$, descritos na imagem acima.

- Mostre que é possível escrever q como $x_0^i + u^i d\lambda$ e mostre também que $v^j(q) = v^j(p) + \partial_k v^j(p) u^k d\lambda$. (Dica: $f(a^l + dx^l) \approx f(a^l) + \partial_k f(a^l) dx^k$).
- Mostre que, por uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x' = x + dx$ (usando dx como calculado anteriormente em termos de u^i e $d\lambda$), é possível escrever $v'^j(q) = v^j(p) + \partial_i u^j v^i(p) d\lambda$.

A **Derivada de Lie** do vetor v^i sob o campo parametrizado por λ , simbolizada por $\mathcal{L}_u v^i$, é definida como

$$\mathcal{L}_u v^i = \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{v^i(q) - v^i(p)}{d\lambda}. \quad (9)$$

- Mostre que é possível escrever $\mathcal{L}_u v^i = u^j \partial_j v^i - v^j \partial_j u^i$.
É possível generalizar essa ideia para vetores covariantes e tensores.
- Prosseguindo na mesma forma que nos itens anteriores, mostre que $\mathcal{L}_u v_i = u^j \partial_j v_i + v_j \partial_i u^j$ (Dica: ao escrever a transformação, despreze termos de segunda ordem em $d\lambda$).

e) Mostre que, para um tensor $T_{\alpha\beta}$, $\mathcal{L}_u T_{\alpha\beta} = u^j \partial_j T_{\alpha\beta} + T_{j\beta} \partial_\alpha u^j + T_{\alpha j} \partial_\beta u^j$.

Considere agora a métrica $g_{\mu\nu}$ de um determinado espaço-tempo, um campo de vetores K^μ e uma geodésica descrita por um parâmetro λ .

f) Mostre que é possível escrever

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu}. \quad (10)$$

A derivada de Lie tem uma relação importante com determinadas simetrias e leis de conservação em um espaço-tempo ao longo de uma trajetória. Dizemos que K^μ é um **Campo de Killing** se $\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0$. Cada campo de Killing leva a uma lei de conservação.

g) Mostre que, se K^μ for um campo de Killing,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\nu} K^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0. \quad (11)$$

h) Em coordenadas cartesianas (t, x, y, z) , mostre que $K_1^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $K_2^\mu = (0, 1, 0, 0)$, $K_3^\mu = (0, 0, 1, 0)$ e $K_4^\mu = (0, 0, 0, 1)$ são campos de Killing do espaço-tempo de Minkowski.

i) Em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , mostre que $K_1^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $K_2^\mu = (0, 0, 0, 1)$ são campos de Killing do espaço-tempo de Schwarzschild.

⑦ [2.0] a) Mostre que, definindo a Lagrangeana $\mathcal{L} = (1/2)g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ e usando as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (12)$$

é possível recuperar a equação da geodésica.

b) Usando a definição de tempo próprio, mostre que a equação que expressa a conservação de energia no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) de uma órbita de Schwarzschild é:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = E + \frac{2GM}{h^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^3, \quad (13)$$

onde $E = c^2(k^2 - 1)/h^2$, com h e k sendo constantes de integração e $u = 1/r$. *Dica:* Lembre que t e ϕ são coordenadas cíclicas e, portanto, $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t} = k$ e $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi} = h$.

c) Defina a variável $\bar{u} \equiv u/u_0$. Em termos dessa variável, a equação (13) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\phi}\right)^2 = \epsilon(\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u} - \bar{u}_2)(\bar{u} - \bar{u}_3), \quad (14)$$

onde $\bar{u}_1 \equiv u_1/u_0$, $\bar{u}_2 \equiv u_2/u_0$, $\bar{u}_3 \equiv u_3/u_0$ são as raízes de $(d\phi/d\bar{u})^2 = 0$ e $\epsilon \equiv 2GMu_0/c^2$, com $u_0 \equiv (u_1 + u_2)/2$. Mostre que, em primeira ordem em ϵ :

$$\frac{d\phi}{d\bar{u}} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon(\bar{u} - 1) + 1 + \frac{3}{2}\epsilon}{[\beta^2 - (\bar{u} - 1)^2]^{1/2}}. \quad (15)$$

Na expressão acima, $\beta \equiv (1/2)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$.

d) Podemos integrar (15) para encontrar o ângulo $\Delta\phi$ entre um afélio e o próximo periélio. Mostre que a precessão periélio a cada ciclo é dada por

$$3\epsilon\pi = \frac{3GM\pi}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (16)$$

onde r_1 e r_2 são os valores de r respectivamente no afélio e no periélio. Sabendo que Mercúrio completa uma órbita a cada 0.24 anos, qual será a precessão do periélio de Mercúrio em um século?