

Cálculo Numérico: Ponto Fixo

Exercício 1. Sejam as funções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ dadas por

$$\phi_1(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x \quad \phi_2(x) = \frac{x}{x^3 + 2x^2 - 2x - 3}.$$

Essas funções apresentam os mesmos pontos fixos. Calcule quais são os pontos fixos, o módulo das derivadas $|\phi_1'|$ e $|\phi_2'|$ em cada ponto fixo e compare os resultados.

Exercício 2. Dada a função

$$f(x) = 1 + x + xe^x,$$

queremos encontrar a raiz de $f(x)$. Reescreva o problema de três formas diferentes utilizando o conceito de ponto fixo.

Exercício 3. Seja a função $\phi(x)$ dada por

$$\phi(x) = \cos(x).$$

- Mostre, utilizando o gráfico do cosseno, que essa função apresenta apenas um único ponto fixo.
- Mostre que a sequência $x_{k+1} = \phi(x_k)$ converge para o ponto fixo.
- Calcule o valor do ponto fixo com erro relativo de $\varepsilon = 10^{-5}$ à partir de $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Quantas iterações foram necessárias? Calcule o valor de $|\phi'|$ no ponto fixo.
- Construa uma função $\Phi(x)$ que apresente o mesmo ponto fixo utilizando o método apresentado na aula "Ponto Fixo Parte III - Aplicação".
- Calcule o valor do ponto fixo com erro relativo de $\varepsilon = 10^{-5}$ à partir de $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Quantas iterações foram necessárias? Calcule o valor de $|\Phi'|$ no ponto fixo e compare com o valor do item c.

Exercício 4. O mapa logístico é um modelo populacional no qual cada iteração representa a evolução de uma população no tempo. O mapa logístico é escrito como

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = rx_k(1 - x_k),$$

onde $r \in]0, 4]$ e $x_k \in [0, 1]$. O valor r representa a taxa de crescimento da população e o valor x_k representa a porcentagem do tamanho da população na iteração k . Para $x_k = 0$, a população está extinta no momento k e para $x_k = 1$, a população está no seu máximo no momento k . Responda as questões a seguir:

- a Mostre quais são os dois pontos fixos do mapa logístico.
- b Calcule o módulo da derivada da função. Quais são as condições sobre r em cada um dos pontos fixos para que $|\phi'| < 1$?
- c Calcule quantas iterações são necessárias para atingir o ponto fixo com um erro absoluto de $\varepsilon = 10^{-4}$ para os valores de r iguais à 1.25 e 2.5 e com a condição inicial $x_0 = 0.4$. Justifique com o valor a derivada $|\phi'|$ qual dos valores r demora mais para ser atingido.

Segue um link Geogebra interativo: [Mapa Logístico](#).