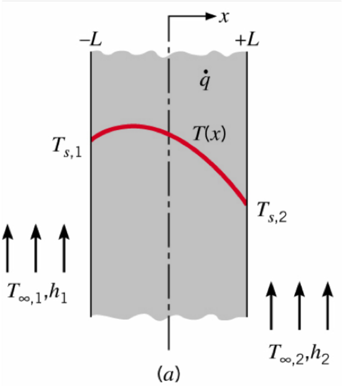
3.3 Parede plana com geração



Eq. do calor: $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{q'''}{k} = 0$

Solução geral:

$$T(x) = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_1 x + C_2$$

Exemplos de condição de contorno: $T(-L) = T_{s,1}$, $T(+L) = T_{s,2}$

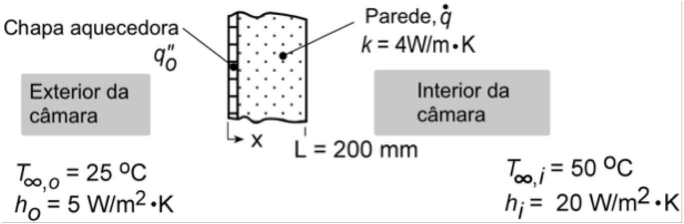
$$C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2L} \qquad C_2 = \frac{q'''}{2k}L^2 + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

$$T(x) = \frac{q'''L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$$

Fluxo depende de x, analogia elétrica não pode ser usada.

Exercício 6

Ar no interior de uma câmara a $T_{\infty,i} = 50\,°\mathrm{C}$ é aquecido por convecção, com $h_i = 20\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$, através de uma parede com $200\,\mathrm{mm}$ de espessura, condutividade térmica de $4\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$ e com geração uniforme de calor a uma taxa de $1000\,\mathrm{W/m^3}$. Para evitar que o calor gerado no interior da parede seja perdido para o lado de fora da câmara, a $T_{\infty,o} = 25\,°\mathrm{C}$ e com $h_o = 5\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$, um aquecedor elétrico delgado é colocado sobre a superfície externa da parede para fornecer um fluxo térmico uniforme, q''_o.



a) Esboce a distribuição de temperatura na parede, em um sistema de coordenadas $T - -x$, para a condição em que nenhum calor gerado no seu interior é perdido para o lado de fora da câmara.

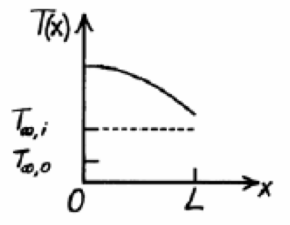
b) Quais são as temperaturas nas superfícies da parede, $T(0)$ e $T(L)$, para as condições da parte (a)?

c) Determine o valor de q''_o que deve ser fornecido pelo aquecedor elétrico de modo que todo o calor gerado no interior da parede seja transferido para o interior da câmara.

d) Se a geração de calor na parede for interrompida e o fluxo fornecido pelo aquecedor elétrico permanecer constante, qual será a temperatura em regime estacionário, $T(0)$, na superfície externa da parede.

Solução:

a) (frisar gradiente nulo em $x = 0$)



b) $$T = -\frac{q'''}{2k}x^2 + C_1 x + C_2 \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{q'''}{k}x + C_1$$

Condições de contorno:

- $q''_x(0) = -k\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -kC_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$
- $-k\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = h_i[T(L) - T_{\infty,i}] \qquad -\cancel{k}\left[-\frac{q'''}{\cancel{k}}L\right] = h_i[T(L) - T_{\infty,i}]$

$$T(L) = \frac{q'''L}{h} + T_{\infty,i} = \frac{1000 \times 0{,}2}{20} + 50 = 60\,^\circ\mathrm{C}$$

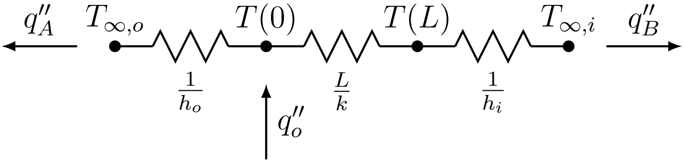
Substituindo na distribuição de temperatura:

$$60 = -\frac{1000 \times 0{,}2^2}{2 \times 4} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 65\,°\mathrm{C}$$

Substituindo os valores de C_1 e C_2 na distribuição de temperaturas, obtemos para $x = 0$: $T(0) = 65\,°\mathrm{C}$.

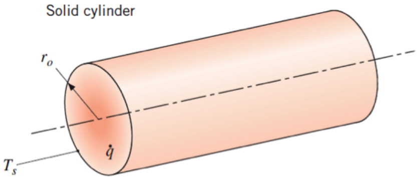
c) $q_o'' = h_o[T(0) - T_{\infty,o}] = 5 \times (65 - 25) = 200\,\mathrm{W/m^2}$

d)



$$q_o'' = q_A'' + q_B'' = \frac{T(0) - T_{\infty,o}}{\frac{1}{h_o}} + \frac{T(0) - T_{\infty,i}}{\frac{L}{k} + \frac{1}{h_i}} \quad \Rightarrow \quad T(0) = 55\,°\mathrm{C}$$

3.4 Cilindro com geração



Eq. do calor: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{q'''}{k}=0$

Solução geral:

$$T(r) = -\frac{q'''}{4k}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Exemplos de condição de contorno:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{Simetria:}\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_{r=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \\[2em] \bullet\ T(r_o) = T_s \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_s + \dfrac{q'''}{4k}r_o^2 \end{array}\right\} \quad T(r) = \frac{q'''}{4k}\left(r_o^2 - r^2\right) + T_s$$

Exercício 7

Um cabo de cobre, com 30 mm de diâmetro e resistência elétrica de $5 \times 10^{-3}\,\Omega/\mathrm{m}$, conduz uma corrente elétrica de 250 A. O cabo está exposto ao ar ambiente a 20 °C, onde o coeficiente de transferência de calor por convecção é $25\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$. Quais são as temperaturas na superfície e no centro do cabo de cobre?

Solução:

$$T(r) = -\frac{q'''}{4k} r^2 + C_2$$

$$q''' = \frac{R' I^2 \cancel{L}}{A_t \cancel{L}} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 250^2}{\frac{\pi \times 0{,}03^2}{4}} = 442\,\mathrm{kW/m^3}$$

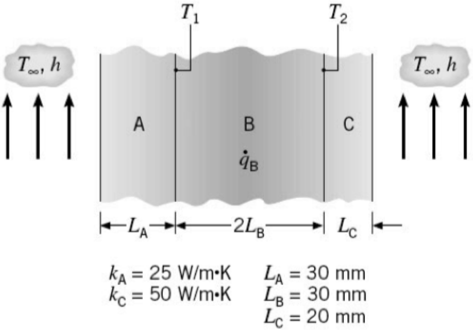
Balanço de energia: $q''' \left(\frac{\cancel{\pi} d^{\cancel{2}}}{4} \cancel{L} \right) = h(\cancel{\pi} \cancel{d} \cancel{L})(T_s - T_\infty)$

$$T_s = T_\infty + \frac{q''' d}{4h} = 20 + \frac{442 \times 10^3 \times 30 \times 10^{-3}}{4 \times 25} = 152{,}6\,°\mathrm{C}$$

$$152{,}6 = T(0{,}015) = -\frac{442 \times 10^3}{4 \times 390} \times 0{,}015^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 152{,}66\,°\mathrm{C} = T_0$$

Exercício 8

Seja a condução unidimensional em uma parede plana composta. Sua superfície externa está exposta a um fluido a 25 °C, com um coeficiente convectivo de 1000 W/(m$^2 \cdot$ K). Na parede intermediária B há geração uniforme de calor a uma taxa $\dot{q}_B$, enquanto não existe geração nas paredes A e C.

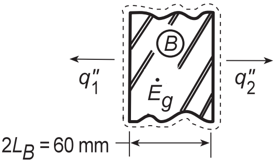


As temperaturas nas interfaces são $T_1 = 261$ °C e $T_2 = 211$ °C. Supondo resistências de contato desprezíveis nas interfaces, determine a taxa volumétrica de geração de calor $\dot{q}_B$ e a condutividade térmica k_B.

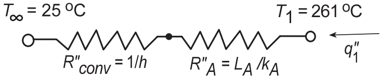
<u>**Solução:**</u> Condução em regime permanente em parede plana, com geração em B e sem geração em A e C. Fazendo um balanço de energia em B, por unidade de área:

$$2\dot{q}_B L_B = q_1'' + q_2''$$

$$\dot{q}_B = (q_1'' + q_2'')/(2L_B)$$



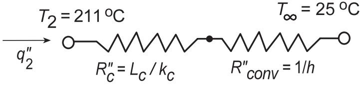
Circuitos térmicos para as paredes A e C:



$$q_1'' = (T_1 - T_\infty)/(1/h + L_A/k_A)$$

$$q_1'' = (261 - 25)/(1/1000 + 0{,}030/25)$$

$$q_1'' = 107273\,\mathrm{W/m^2}$$



$$q_2'' = (T_2 - T_\infty)/(1/h + L_C/k_C)$$
$$q_2'' = (211 - 25)/(1/1000 + 0{,}020/50)$$
$$q_2'' = 132857\,\mathrm{W/m^2}$$

$$\therefore \dot{q}_B = (107273 + 132587)/(2 \times 0{,}030) = 3{,}99 \times 10^6\,\mathrm{W/m^3}$$

Distribuição de temperaturas na parede B,

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_B}{2k_B}x^2 + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno: $T(-L_B) = T_1$ e $T(+L_B) = T_2$. Assim:

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{2L_B}, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_B}{2k_B}L_B^2 + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\therefore T(x) = \frac{\dot{q}_B L^2}{2k_B}\left(1 - \frac{x^2}{L_B^2}\right) + \frac{T_2 - T_1}{2}\frac{x}{L_B} + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

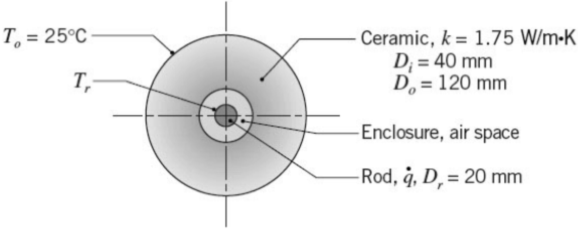
$$q''_x(x) = -k_B\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -k_B\left(-\frac{\dot{q}_B}{k_B}x + C_1\right) = \dot{q}_B x - C_1 k_B = \dot{q}_B x - \frac{T_2 - T_1}{2L_B}k_B,$$

$$q''_x(+L_B) = q''_2 \quad \Rightarrow \quad 132857 = 3{,}99 \times 10^6 \times 0{,}030 - \frac{211 - 261}{2 \times 0{,}030}k_B$$

$$\therefore k_B = 15{,}8\,\mathrm{W/(m \cdot K)}$$

Exercício 9

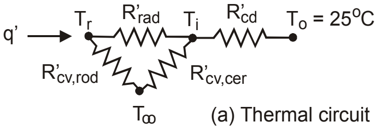
Uma barra longa de latão [$k_r = 110\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$] conduz corrente elétrica gerando energia térmica a uma taxa volumétrica uniforme de $\dot{q}$. A barra é concêntrica com um cilindro de cerâmica oco, criando um espaço cheio de ar entre os dois. A resistência térmica por unidade de comprimento devido à radiação entre as superfícies do espaço barra/cerâmica é igual a $R_{\text{rad}} = 0{,}30\,\mathrm{m\cdot K/W}$ e o coeficiente associado à convecção natural neste mesmo espaço é de $h = 20\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$. Calcule a temperatura no centro da barra.



Solução: Barra condutora – condução estacionária, num corpo cilíndrico maciço de raio $r_r = D_r/2$, com geração. Distribuição de temperaturas:

$$T(r) = \frac{\dot{q} r_r^2}{4k_r}\left(1 - \frac{r^2}{r_r^2}\right) + T_r \qquad \Rightarrow \qquad T(0) = \frac{\dot{q} r_r^2}{4k_r} + T_r$$

Circuito térmico da superfície da barra até a superfície externa do cilindro de cerâmica:



(a) Thermal circuit

$$R'_{\text{rad}} = 0{,}30\,\text{m}\cdot\text{K/W}$$

$$R'_{\text{cv, rod}} = \tfrac{1}{h\pi D_r} = 0{,}796\,\text{m}\cdot\text{K/m}$$

$$R'_{\text{cv, cer}} = \tfrac{1}{h\pi D_i} = 0{,}398\,\text{m}\cdot\text{K/m}$$

$$R'_{\text{cd}} = \tfrac{\ln(D_o/D_i)}{2\pi k_c} = 0{,}100\,\text{m}\cdot\text{K/W}$$

$$R'_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{R'_{\text{rad}}} + \frac{1}{R'_{\text{cv, rod}} + R'_{\text{cv, cer}}} \right)^{-1} + R'_{\text{cd}} = 0{,}340\,\mathrm{m \cdot K/W}$$

$$q' = \dot{q} A_r = \dot{q} \frac{\pi D_r^2}{4} = 2 \times 10^6 \times \frac{\pi \times 0{,}020^2}{4} = 628{,}3\,\mathrm{W/m}$$

$$q' = \frac{T_r - T_o}{R'_{\text{tot}}} \quad \Rightarrow \quad T_r = q' R'_{\text{tot}} + T_o = 628{,}3 \times 0{,}340 + 25 = 238{,}6\,°\mathrm{C}$$

Substituindo na expressão de $T(0)$

$$T(0) = \frac{2 \times 10^6 \times 0{,}010^2}{4 \times 110} + 238{,}6 = 239{,}1\,°\mathrm{C}$$