Solução da equação de onda em domínio espacial finito: Método da Separação de variáveis

O método de separação de variáveis é um método geral para a solução de E.D.P.'s lineares. As soluções obtidas são na forma de séries fracionais.

No caso, quer-se obter a solução da equação de onda

$$u_{tt} = a^2 \cdot u_{xx} \qquad (371)$$

sujeita às condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) \qquad (372)$$
$$u_t(x,0) = g(x) \qquad (373)$$

e às condições de contorno/fronteira. Para o caso de uma corda vibrante, fixada em dois pontos e de comprimento L, temos:

$$u(0,t) = 0 \qquad (374)$$
$$u(L,t) = 0 \qquad (375)$$

com $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$.

Geralmente, o método de separação de variáveis é aplicado em duas etapas.

a) Determinam-se soluções da equação de onda (371) que satisfaçam as condições de contorno;

b) Utiliza-se o princípio da superposição para encontrar uma combinação linear das soluções obtidas em a), tal que as condições iniciais e de contorno sejam satisfeitas.

Separação de variáveis: Etapa a)

Procura-se soluções da equação (371) que tenham a forma

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \qquad (376)$$

e que satisfaçam as condições de contorno. Para que a equação (376) satisfaça as condições de contorno, deve-se ter:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \quad \forall\, t \qquad (377)$$
$$u(L,t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \quad \forall\, t \qquad (378)$$

Porém,

$$X(0) \cdot T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ \text{ou} \\ T(t) = 0 \end{cases}. \quad \text{No entanto, } T(t) \equiv 0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0$$

Essa é a solução trivial. Para soluções não-triviais, deve-se ter $X(0) = 0$. Analogamente, para a equação (378), temos:

$$X(L).T(t)=0 \quad \forall\ t \Rightarrow \begin{cases} X(L)=0 \\ \text{ou} \\ T(t)=0 \end{cases}$$

Novamente, $T(t)=0$ nos conduz à solução trivial. Desse modo, procura-se soluções da equação de onda (371) na forma da equação (376) de tal forma que $X(x)$ satisfaça as condições de contorno:

$$\begin{cases} X(0)=0 & (379.a) \\ \text{e} \\ X(L)=0 & (379.b) \end{cases}$$

Agora, impomos que $u(x,t) = X(x).T(t)$ é solução de $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}[X(x).T(t)] = X(x).T'(t) \qquad (380)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[X(x).T'(t)] = X(x).T''(t) \qquad (381)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[X(x).T(t)] = X'(x).T(t) \qquad (382)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[X'(x).T(t)] = X''(x).T(t) \qquad (383)$$

Substituindo as equações (381) e (383) na equação (371), obtemos:

$$X(x).T''(t) = a^2.X''(x).T(t) \qquad (384)$$

Agrupando-se os termos em x no 2º membro e os termos em t no 1º membro, chegamos à:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (385)$$

Como o 1º membro é função apenas de t e o 2º membro é apenas função de x e sendo x e t independentes, a única maneira da equação (385) ser satisfeita para todos os valores de x e de t é:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = C \qquad (386)$$

e

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = C \qquad (387)$$

sendo C é uma constante. De fato, derivando-se a equação (385) em relação a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{a^2}\cdot\underbrace{\frac{T''(t)}{T(t)}}_{}\right]^{=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{X''(x)}{X(x)}\right] = 0 \therefore \frac{X''(x)}{X(x)} = C_1$$

Analogamente, derivando a equação (385) em relação a t, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{X''(x)}{X(x)}\right]^{=0} = 0 \therefore \frac{T''(t)}{T(t)} = C_2$$

Para que a equação (385) seja satisfeita, devemos ter $C_1 = C_2 = C$. Desse modo, o método da separação de variáveis transformou a E.D.P linear de 2ª ordem nas E.D.O.'s lineares de 2ª ordem dadas pelas equações (386) e (387). Resolvendo, inicialmente, a equação (387), temos:

$$X''(x) = C.X(x) \Rightarrow X'' - CX(x) = 0 \quad (388)$$

A E.D.O. linear homogênea de 2ª ordem dada equação (388) tem soluções de forma diversa, dependendo se $C>0$, $C<0$ e $C=0$. Vamos, agora, explorar cada um dos casos.

Caso (i): $C=0$;

Então $X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = a$ e $X(x) = a.x + b$

sendo a e b constantes. Como $X(x)$ deve satisfazer as condições de contorno, então:

$X(0)=0$ e $X(L)=0$ implica em:

$X(0) \Rightarrow a.(0) + b = 0 \therefore b = 0$

$X(L) \Rightarrow a.(L) + b = 0 \therefore a.L = 0$, já que $b=0$. Como $L \neq 0$, já que L é o comprimento da corda, então $a=0$. Como temos tanto $a=0$ como $b=0$, isso significa que $X(x) \equiv 0$. Neste caso, $u(x,t) = X(x).T(t)$ é solução trivial.

Caso (ii) $C>0$;

Por praticidade, vamos tomar $C = \lambda^2$, λ real não nulo. Assim, a equação (388) pode ser escrita como:

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \quad (389)$$

que é uma E.D.O. homogênea de 2ª ordem. Dessa forma, teremos uma solução da forma:

$$X(x) = e^{px}$$

com o seguinte polinômio característico associado à equação (389):

$$p^2.e^{px} - \lambda^2.e^{px} = 0 \Rightarrow e^{px}(p^2 - \lambda^2) = 0.$$ Como $e^{px} \neq 0$, então $p^2 - \lambda^2 = 0$ e $p = \pm\lambda$. Assim, teremos duas soluções particulares. Usando o princípio da superposição, obtemos a solução geral dessa E.D.O.:

$$X(x) = \alpha.e^{\lambda x} + \beta.e^{-\lambda x} \quad (390)$$

sendo α e β constantes arbitrárias. Como essa solução deve atender as condições iniciais, então:

$$X(0) = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$X(L) = \alpha . e^{\lambda L} + \beta . e^{-\lambda L} = 0 \Rightarrow -\beta . e^{\lambda . L} + \beta e^{-\lambda . L} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta . (e^{-\lambda L} - e^{\lambda L}) = 0$$

Como λ é não nulo, $e^{-\lambda L} - e^{\lambda L} \neq 0$. Logo, $\beta = 0$. Assim, $\alpha = -\beta = 0$ e $X(x) \equiv 0$. Novamente, obtemos a solução trivial.

Caso (iii): $C < 0$;

Por praticidade, tomemos $C = -\lambda^2$, sendo λ um real não nulo. Assim, a equação (388) se torna:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (391)$$

A E.D.O. homogênea de 2ª ordem tem solução do tipo:

$$X(x) = e^{px}$$

Com o seguinte polinômio característico associado a equação (391):

$$p^2 + \lambda^2 = 0$$

cujas raízes são $p = \pm \lambda i$. Assim, teremos duas soluções linearmente independentes. Usando o princípio da superposição qualquer combinação linear dessas duas soluções linearmente independentes será solução da E.D.O., inclusive $\dfrac{e^{i\lambda x} + e^{-i\lambda x}}{2} = \cos(\lambda x)$ e $\dfrac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i} = \sin(\lambda x)$. Portanto, a solução geral poderá ser escrita como:

$$X(x) = \alpha . \cos(\lambda x) + \beta . \sin(\lambda x) \qquad (392)$$

sendo α e β constantes arbitrárias. Impondo-se as condições iniciais a equação (392), temos:

$$X(0) = \alpha . \cos(\lambda . 0) + \beta . \sin(\lambda . 0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$X(L) = \alpha . \cos(\lambda . L) + \beta . \sin(\lambda . L) = 0 \Rightarrow \beta . \sin(\lambda . L) = 0$$

Assim, ou $\beta = 0$ ou $\sin(\lambda L) = 0$. Para $\beta = 0$, teremos novamente a solução trivial. Para $\sin(\lambda L) = 0$, temos:

$$\sin(\lambda . L) = 0 \Rightarrow \lambda . L = K . \pi \text{, sendo } K \in \mathbb{Z} \text{, com } K \neq 0 \text{. Assim,}$$

$$\lambda = \frac{K\pi}{L} \qquad (393)$$

Dessa forma, obtemos

$$X(x) = \beta . \sin\left(\frac{K\pi}{L} . x\right) \qquad (394)$$

sendo p = constante $\neq 0$. Essa é a solução que satisfaz as condições de contorno. Agora, temos de resolver a equação (386):

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = C$$

Como para a equação (387), essa E.D.O. só possui solução não trivial quando $C < 0$. Tomando $C = -\lambda^2$. Assim, a equação (386) pode ser reescrita como:

$$T''(t) + a^2 . \lambda^2 . T(t) = 0 \qquad (395)$$

Substituindo a equação (393) na equação (395), obtemos:

$$T''(t) + \frac{a^2 . k^2 . \pi^2}{L^2} . T(t) = 0 \qquad (396)$$

A solução dessa E.D.O. é da forma:

$$T(t) = e^{pt} \qquad (397)$$

com polinômio característico dado por:

$$p^2 + \left(\frac{ak\pi}{L}\right)^2 = 0 \qquad (398)$$

com raízes complexas dadas por:

$$p = \pm \left(\frac{a.k\pi}{L} i\right) \qquad (399)$$

São, dessa forma, soluções particulares:

$$T_1(t) = e^{-\frac{ak\pi i}{L} . t} \qquad (400)$$

e

$$T_2(t) = e^{\frac{ak\pi i}{L} . t} \qquad (401)$$

Como na análise anterior, $\cos\left(\frac{ak\pi}{L} . t\right)$ e $\sin\left(\frac{ak\pi}{L} t\right)$ também são soluções. Assim, pelo princípio da superposição, a solução geral para $T(t)$ é:

$$T(t) = A . \cos\left(\frac{a.k\pi}{L} . t\right) + B . \sin\left(\frac{a.k.\pi}{L} . t\right) \qquad (402)$$

Sendo A e B constantes.

Lembrando que $X(x).T(t)$ é solução da equação de onda procurada, temos:

$$u(x,t) = \beta . \sin\left(\frac{k.\pi}{L} . x\right) . \left[A . \cos\left(\frac{k.a.\pi}{L} . t\right) + B . \sin\left(\frac{k.a.\pi}{L} . t\right)\right] \qquad (403)$$

sendo β, A e B constantes e $K \neq 0$.

Multiplicando-se os termos em $u(x,t)$, obtemos:

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right)\left[\beta.A.\cos\left(\frac{K.a.\pi}{L}.t\right) + \beta.B.\sin\left(\frac{K.a.\pi}{L}.t\right)\right] \quad (404)$$

sendo $\beta.A$ e $\beta.B$ constantes. Assim,

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{K.\pi}{L}.x\right).\left[D.\cos\left(\frac{aK\pi}{L}.t\right) + E.\sin\left(\frac{aK\pi}{L}.t\right)\right], \text{ para } K \neq 0 \quad (405)$$

O método de separação de variáveis permitiu determinar infinitas soluções da equação de onda que satisfazem as condições de contorno:

$$u_K(x,t) = \sin\left(\frac{K\pi}{L}.x\right).\left[p_K.\cos\left(\frac{a.K.\pi}{L}.t\right) + q_K.\sin\left(\frac{aK\pi}{L}.t\right)\right] \quad (406) \quad , K \neq 0$$

As soluções da equação (406) são chamadas de modos naturais ou modos normais.

Etapa (B):

Para completar a solução do problema, aplica-se o princípio da superposição às soluções particulares (infinitas soluções) (equação (406)). A solução geral para soluções enumeráveis, como vimos, é dada pela série:

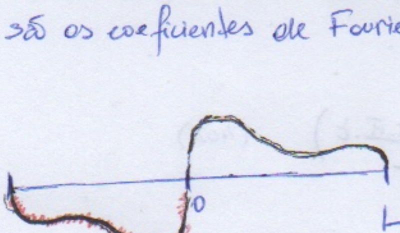
$$u(x,t) = \sum_{K=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{K.\pi.x}{L}\right).\left[p_K.\cos\left(\frac{a.K.\pi}{L}.t\right) + q_K.\sin\left(\frac{a.K.\pi}{L}.t\right)\right] \quad (407)$$

sendo que p_K e q_K, com $K \neq 0$ e $K \in \mathbb{N}$, devam ser tais que as condições iniciais sejam satisfeitas: $\{u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)\}$. Impondo-se as condições iniciais à equação (407), temos:

$$u(x,0) = \sum_{K=1}^{+\infty} p_K.\sin\left(\frac{K.\pi x}{L}\right) = f(x), \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq L \quad \therefore$$

$$f(x) = \sum_{K=1}^{+\infty} p_K.\sin(K.w.x), \quad \text{com} \quad w = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{2L} \quad (408)$$

Veja que a equação (408) representa o desenvolvimento de $f(x)$ em série de senos, com período igual a $2L$. A série de senos é o desenvolvimento de uma função ímpar. Isso significa que os coeficientes p_K, com $K = 1, 2, 3 \ldots$ são os coeficientes de Fourier de $f(x)$ estendida como função ímpar para $[-L, 0]$



↳ $f(x)$ estendida como função ímpar: $f(-x) = -f(x)$

Usando a equação (310), obtemos:

$$P_K = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} f(x).\sin\left(\frac{K.\Pi.x}{L}\right)dx \qquad (409)$$

Como $f(x)$ é uma função ímpar, então podemos reescrever a equação (409) como:

$$\boxed{P_K = \frac{4}{2L}\int_0^L f(x).\sin\left(\frac{K\Pi}{L}.x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x).\sin(K\omega x)dx} \qquad (410)$$

Agora, impondo-se a condição inicial $u_t(x,0) = g(x)$, chegamos à:

$$u_t(x,t) = \sum_{K=1}^{+\infty}\left[-P_K.\frac{Ka\Pi}{L}.\sin\left(\frac{K.a.\Pi}{L}.t\right) + q_K.\frac{K.a\Pi}{L}.\cos\left(\frac{K.a.\Pi}{L}.t\right)\right].\sin\left(\frac{K\Pi}{L}.x\right) \qquad (411)$$

Então:

$$u_t(x,0) = \sum_{K=1}^{+\infty} q_K.\frac{K.a.\Pi}{L}.\sin\left(\frac{K.\Pi}{L}.x\right) = g(x) \quad \therefore$$

$$g(x) = \sum_{K=1}^{+\infty} q_K.\frac{K.a.\Pi}{L}.\sin\left(\frac{K.\Pi}{L}.x\right) \qquad (412)$$

Portanto, como a equação (412) é simplesmente o desenvolvimento de $g(x)$ em série de Fourier, então:

$$\frac{K.a\Pi}{L}.q_K = \frac{2}{L}\int_0^L g(x).\sin\left(\frac{K.\Pi}{L}.x\right)dx \qquad (413)$$

ou

$$q_K = \frac{2}{Ka\Pi}.\int_0^L g(x).\sin\left(\frac{K\Pi}{L}.x\right)dx \qquad (414)$$

com $K = 1, 2, 3, \ldots$

Solução da Equação de onda 2D em coordenadas Cartesianas

A equação de onda 2D em coordenadas cartesianas é dada por:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \qquad (415)$$

Considera-se que a solução não seja limitada espacialmente: $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$. Aplicando o método de separação de variáveis, temos:

$$u(x,y,t) = X(x).Y(y).T(t) \qquad (416)$$

sendo $u(x,y,t)$ a solução da equação de onda 2D. Substituindo $u(x,y,t)$ na equação (415), obtemos:

$$u_{tt} = X(x).Y(y).T''(t) \qquad (417)$$

$$u_{xx} = X''(x).Y(y).T(t) \qquad (418)$$

$$u_{yy} = X(x) \cdot Y''(y) \cdot T(t) \qquad (419)$$

$$X(x) \cdot Y(y) \cdot T''(t) = a^2 \left[X''(x) \cdot Y(y) \cdot T(t) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot T(t) \right] \qquad (420)$$

Dividindo-se cada membro da equação (420) por $X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$, chegamos à:

$$\frac{\cancel{X(x)} \cdot \cancel{Y(y)} \cdot T''(t)}{\cancel{X(x)} \cdot \cancel{Y(y)} \cdot T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x) \cdot \cancel{Y(y)} \cdot \cancel{T(t)}}{X(x) \cdot \cancel{Y(y)} \cdot \cancel{T(t)}} + \frac{\cancel{X(x)} \cdot Y''(y) \cdot \cancel{T(t)}}{\cancel{X(x)} \cdot Y(y) \cdot \cancel{T(t)}} \right] \qquad (421)$$

A equação (421) pode ser reescrita como:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] \Rightarrow \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad (422)$$

1º membro 2º membro

Como o primeiro membro da equação (422) não depende de x e y e o segundo membro não depende de t, então a equação (422) só pode ser satisfeita se:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{T''(t)}{T(t)} = C & (423.a) \\ \text{ou} & \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = C & (423.b) \end{cases}$$

sendo C uma constante. A equação (423.b), por outro lado, só pode ser satisfeita se:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C_1 & (424.a) \\ \text{ou} & \\ \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2 & (424.b) \end{cases}$$

sendo C_1 e C_2 constantes e $C_1 + C_2 = C$. Outro modo de constatar isso é derivando-se a equação (423.b) em relação à x e à y:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = \frac{\partial}{\partial x}[C] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{X''(x)}{X(x)} \right] = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = \frac{\partial}{\partial y}[C] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{Y''(y)}{Y(y)} \right] = 0$$

Assim, o método de separação de variáveis converte a E.D.P. $u_{tt} = a^2 \cdot \nabla^2 u$ em três diferentes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C_1 & (425.a) \\ \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2 & (425.b) \\ \dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{T''(t)}{T(t)} = C_1 + C_2 & (425.c) \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, resolver a equação (425.a) nos leva a três situações distintas: $C_1 = 0$, $C_1 > 0$ e $C_1 < 0$.

Para $C_1 = 0$, obtemos $X''(x) = 0 \Rightarrow X = ax + b$. Se $a \neq 0$, $X(x) = ax + b$ será uma função não-limitada e, portanto, não é fisicamente aceitável. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, $X(x) = b$, uma função constante, e também não é uma solução que nos interessa do ponto de vista físico.

Para $C_1 > 0$, com $C_1 = \lambda^2$, sendo λ um real não nulo, temos:

$$X''(x) = \lambda^2 . X(x) \Rightarrow X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \qquad (426)$$

A solução desse tipo de E.D.O. é da forma

$$X(x) = e^{pt} \qquad (427)$$

com o seguinte polinômio característico associado:

$$p^2 - \lambda^2 = 0 \qquad (428)$$

As raízes deste polinômio característico são: $p = \pm \lambda$. Usando o princípio da superposição, a solução será:

$$X(x) = \alpha . e^{-\lambda x} + \beta . e^{\lambda x} \qquad (429)$$

sendo α e β constantes arbitrárias. Veja, novamente, que obtemos uma solução que não possui significado físico, já que:

$$X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{diverge para } x \to -\infty \\ e^{\lambda x} & \text{diverge para } x \to +\infty \end{cases}$$

ou seja, teríamos uma solução não limitada no domínio do problema. Nos resta, então, o caso onde $C_1 < 0$.

Para $C_1 < 0$, com $C_1 = -\lambda^2$, sendo λ um real não nulo, temos:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) \qquad (430)$$

com o seguinte polinômio característico associado:

$$p^2 + \lambda^2 = 0 \qquad (431)$$

As raízes do polinômio característico da equação (431) são: $p = \pm \lambda i$. Assim,

$$X(x) = A.e^{\lambda x i} + B.e^{-\lambda x i} \qquad (432)$$

sendo A e B constantes arbitrárias. A solução da equação (432) envolve funções periódicas. Com a experiência da análise na solução de $X(x)$, sabemos que somente soluções de $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = C_2$, com $C_2 < 0$, são de interesse físico. Assim, $Y(y)$ terá solução do tipo:

$$Y(y) = D.e^{\theta y i} + E.e^{-\theta y i} \qquad (433)$$

Sendo $C_2 = -\theta^2$. Dessa forma, a equação (425.c) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2 - \theta^2 \qquad (434)$$

ou

$$T''(t) + a^2(\lambda^2 + \theta^2)T(t) = 0 \qquad (435)$$

A solução da E.D.O. (435) é do tipo:

$$T(t) = e^{pi}$$

sendo p a raiz do seguinte polinômio característico associado:

$$p^2 + a^2(\lambda^2 + \theta^2) = 0 \qquad (436)$$

com raízes dadas por $p = \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i$. Portanto, a solução geral de (435) é da forma:

$$T(t) = F.e^{a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, it} + G.e^{-a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, it} \qquad (437)$$

sendo F e G constantes arbitrárias. Resta-nos, agora, combinar $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$ e exprimí-las na forma real. Tomando $w(x,y,t)$ como solução particular de $u(x,y,t)$, temos:

$$w(x,y,t) = e^{\lambda x i} . e^{\theta y i} . e^{\pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, it} = e^{[\lambda x + \theta y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, t] i} \qquad (438)$$

Verificando se, de fato, $w(x,y,t)$ é solução da equação (415), temos:

$$w_{tt} = [a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}]^2 . e^{[\lambda x + \theta . y + a . \sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t] i}$$

$$w_{xx} = \lambda^2 . e^{[\lambda x + \theta . y + a . \sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t] i}$$

$$w_{yy} = \theta^2 . e^{[\lambda x + \theta . y + a . \sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t] i}$$

$$[\pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}]^2 . e^{\varphi i} = a^2(\lambda^2+\theta^2) . e^{\varphi i} \Rightarrow \boxed{a^2(\lambda^2+\theta^2) . e^{\varphi i} = a^2(\lambda^2+\theta^2) . e^{\varphi i}}$$, sendo

$\varphi = [\lambda x + \theta . y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t]$ $\therefore$ $w(x,y,t)$ é solução da equação (415).

Do mesmo modo, pode-se verificar que $v(x,y,t) = e^{-\lambda x i} \cdot e^{-\theta y i} \cdot e^{\pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2}\, i t}$ também é solução da equação de onda. Pelo princípio da superposição, combinações lineares de $w(x,y,t)$ e $v(x,y,t)$ também são soluções:

$$\frac{w(x,y,t) + v(x,y,t)}{2} \qquad (439)$$

e

$$\frac{w(x,y,t) - v(x,y,t)}{2i} \qquad (440)$$

Da equação de Euler, podemos reescrever as equações (439) e (440) como:

$$\frac{w(x,y,t) + v(x,y,t)}{2} = \cos(\varphi) = \boxed{\cos\left[\lambda x + \theta . y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t\right]} \qquad (441)$$

↳ $C(x,y,t)$

e

$$\frac{w(x,y,t) - v(x,y,t)}{2i} = \sin(\varphi) = \boxed{\sin\left[\lambda x + \theta . y \pm a\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . t\right]} \qquad (442)$$

↳ $S(x,y,t)$

sendo $C(x,y,t)$ e $S(x,y,t)$ soluções reais da equação de onda 2D. Assim, a combinação das equações (441) e (442) nos leva a solução geral da equação (415).

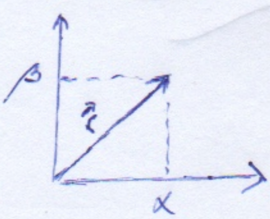
Para visualizar o comportamento dessas soluções, as mesmas podem ser reescritas como:

$$C(x,y,t) = \cos\left[\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} + \frac{\theta . y}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} \pm a t\right)\right] \qquad (443)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin\left[\sqrt{\lambda^2+\theta^2} . \left(\frac{\lambda x}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} + \frac{\theta . y}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} \pm a . t\right)\right] \qquad (444)$$

Note que λ e θ podem ser interpretados como componentes x e y de um vetor no plano xy:



$|\vec{r}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Dessa forma, $\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}}$ e $\frac{\theta}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}}$ correspondem ao vetor de comprimento unitário $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = |\vec{n}|$, ou seja,

$$n_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{\theta}{\sqrt{\lambda^2+\theta^2}}$$

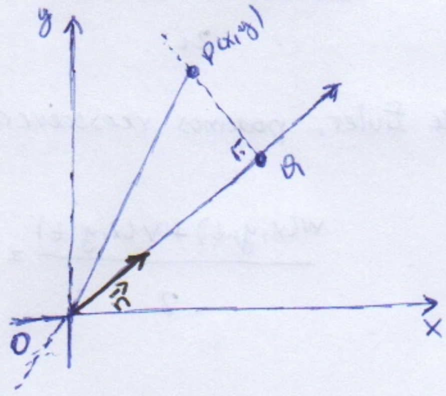
Chamando $\sqrt{\lambda^2+\theta^2} = \gamma$, temos:

$$C(x,y,t) = \cos[\gamma(n_1 \cdot x + n_2 \cdot y \pm a t)] \quad (445)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin[\gamma(n_1 \cdot x + n_2 \cdot y \pm a.t)] \quad (446)$$

Repare que o termo $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ pode ser visto como produto escalar do vetor unitário $\vec{n}$ com o vetor de componentes (x,y). O termo $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ é a projeção do segmento $\overline{OP}$ sobre a reta definida por $\vec{n}$. O termo $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ determina a posição do ponto Q sobre a reta definida por $\vec{n}$, sendo o ponto Q a projeção ortogonal de P sobre a reta. O segmento $\overline{OQ}$ pode ser considerado como a coordenada do ponto Q sobre o eixo r, definido pelo vetor $\vec{n}$. Dessa forma, $\Gamma = n_1 \cdot x + n_2 \cdot y$ é coordenada do ponto $P(x,y)$ no eixo r. Desse modo, as soluções da equação de onda podem ser escritas como:



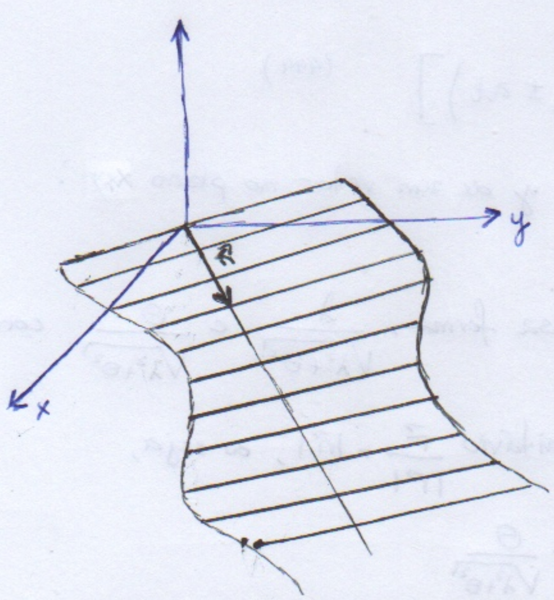
$$C(x,y,t) = \cos[\gamma(\Gamma \pm a.t)] \quad (447)$$

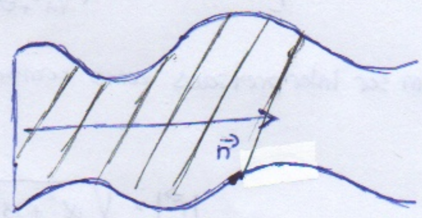
e

$$S(x,y,t) = \sin[\gamma(\Gamma \pm a.t)] \quad (448)$$

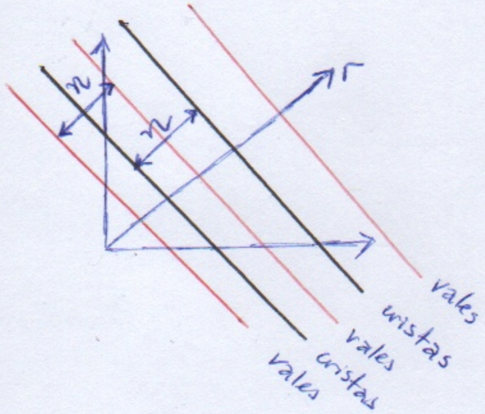
Assim, C e S são efetivamentes ondas 1D, dependentes da coordenada Γ, propagando-se no sentido de r crescente ou decrescente, dependendo do sinal $\pm a$.

Graficamente





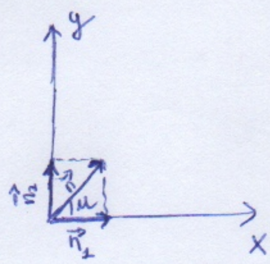
Dessa maneira, $C(x,y,t)$ e $S(x,y,t)$ tem suas cristas e vales na forma de retas perpendiculares ao eixo r.



Essa geometria da solução da equação de onda é denominada onda linear (as frentes são retas). A distância entre duas frentes com a mesma fase (por exemplo, duas cristas de dois vales consecutivos) define o comprimento de onda η, tal que:

$\gamma . \eta = 2\pi$, então: $\gamma = \frac{2\pi}{\eta}$. Considerando C ou S para (x,y) fixo e t variável, essas funções periódicas de t com período $\gamma . a T = 2\pi \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi}{\eta}$ e $T = \frac{\eta}{a}$.

Considerando que $\vec{n}$ tenha ângulo μ em relação ao eixo x, então:



com $|\vec{n}_1| = |\vec{n}| . \cos(\mu) = \cos(\mu)$

$|\vec{n}_2| = |\vec{n}| . \sin(\mu) = \sin(\mu)$

sendo μ a direção de propagação de ondas. Desse modo, as soluções C e S podem ser escritas como:

$$C(x,y,t) = \cos\left[\frac{2\pi}{\eta} . (x . \cos(\mu) + y . \sin(\mu) \pm a t)\right] \qquad (449)$$

e

$$S(x,y,t) = \sin\left[\frac{2\pi}{\eta} . (x . \cos(\mu) + y . \sin(\mu) \pm a t)\right] \qquad (450)$$