Provinha A
Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício A 1:

A reta que é a interseção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ tem como vetor diretor

$$(1,0,-1) \wedge (0,1,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-2,1),$$

que também é, portanto, vetor diretor para o plano P pedido. Além disso, se P é perpendicular a $x + y - 2z = 0$, então o vetor $(1,1,-2)$ é perpendicular ao vetor normal de P, o que implica que $(1,1,-2)$ é vetor diretor de P. Basta encontrar agora um ponto do plano, que pode ser obtido encontrando uma solução para o sistema:

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Colocando $z = 0$, obtemos que $(1,3,0)$ é solução. Temos então que

$$(1,-2,1) \wedge (1,1,-2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3,3,3)$$

é vetor normal de P, e a equação geral é $(3,3,3) \cdot (x-1, y-3, z) = 0$, ou seja, $x + y + z = 4$.

Exercício A 2:

Sabemos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\frac{2\pi}{3} = -1.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|2\vec{u} + 4\vec{v}\|^2 &= (2u + 4v) \cdot (2u + 4v) \\
&= 2\vec{u} \cdot 2\vec{u} + 2\vec{u} \cdot 4\vec{v} + 4\vec{v} \cdot 2\vec{u} + 4\vec{v} \cdot 4\vec{v} \\
&= 4\vec{u} \cdot \vec{u} + 8\vec{u} \cdot \vec{v} + 8\vec{v} \cdot \vec{u} + 16\vec{v} \cdot \vec{v} \\
&= 4\|\vec{u}\|^2 + 16\vec{u} \cdot \vec{v} + 16\|\vec{v}\|^2 = 4 - 16 + 64 = 52.
\end{aligned}$$

Utilizamos acima as propriedades de produto escalar.

Exercício A 3 Seja $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ o vetor procurado. Temos que:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 1, 0) = x_1 + x_2 = 0,$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (-1, 0, 1) = -x_1 + x_3 = 0 = 0.$$

Então $x_2 = -x_1$ e $x_3 = x_1$. Além disso,

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1^2 = 3,$$

ou seja, $x_1 = \pm 1$. Assim, temos duas possibilidades para $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (1, -1, 1)$$

ou

$$\vec{x} = (-1, 1, -1).$$

Se θ é o ângulo entre $\vec{x}$ e $(0, 1, 0)$, então

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot (0, 1, 0)}{\|\vec{x}\| \cdot \|(0, 1, 0)\|} = \frac{x_2}{\sqrt{3}}.$$

Na primeira possibilidade para $\vec{x}$, obtemos $\cos\theta < 0$, tratando-se, portanto, de um ângulo obtuso. Na segunda, $\cos\theta > 0$, tratando-se então de um ângulo agudo. Portanto, $\vec{x} = (-1, 1, -1)$.