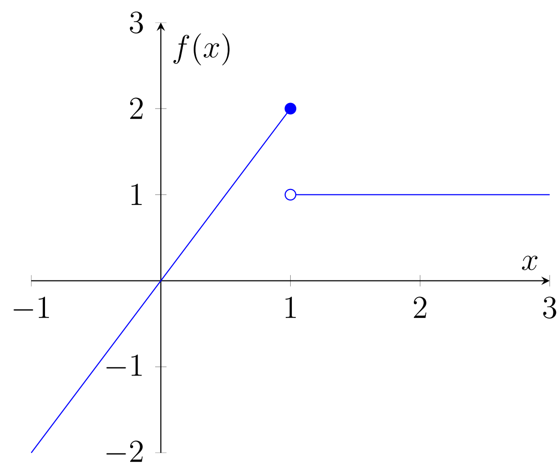
Algumas soluções - Lista 4

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Na lista anterior lidamos com os conceitos de limite e função contínua apenas de forma intuitiva. Entretanto, a partir deste ponto as justificativas devem ter como base propriedades dadas no curso, e não mais a intuição.

Exercício 1:



Se a função fosse contínua em $x = 1$, por definição, para um erro $\epsilon = \frac{1}{2}$, deve existir um $\delta > 0$ (precisão em torno de 1) tal que se $|x - 1| < \delta$, então $|f(x) - f(1)| = |f(x) - 2| < \frac{1}{2}$.

Mas, note que para qualquer $\delta > 0$, podemos tomar $x_0 = 1 + \frac{\delta}{2} > 1$, que obedece a $|x_0 - 1| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e $f(x_0) = 1$. Então $|f(x_0) - 2| = 1$, que não é menor que $\frac{1}{2}$. Em outras palavras, não existe uma precisão δ satisfazendo a definição de função contínua em $x = 1$. Logo, f não é contínua em 1.

Observação: Esse é o jeito formal de mostrar que a função acima não é contínua em $x = 1$. Não serão cobradas demonstrações deste tipo no curso, mas a ideia por trás dela é importante.

Exercício 2:

(a) Como $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$ para $x \neq 2$,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4,$$

uma vez que funções polinomiais são contínuas (para mais detalhes sobre esse procedimento, vide exemplo 10.3 do pdf). Portanto, para que f seja contínua, $f(2) = L = 4$.

Exercício 3:

Para (a)–(e), basta usar que funções polinomiais e funções da forma $g(x) = \sqrt[n]{x}$, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, são contínuas em todos os pontos do domínio. Ou seja, para encontrar os limites basta substituir o ponto para o qual o x tende na função.

(f) Como $\dfrac{9x^2-1}{3x+1} = \dfrac{(3x+1)(3x-1)}{3x+1} = 3x-1$ para $x \neq -\dfrac{1}{3}$,

$$\lim_{x\to -1/3} \frac{(3x+1)(3x-1)}{3x+1} = \lim_{x\to -1/3}(3x-1) = -1-1 = -2,$$

uma vez que funções polinomiais são contínuas.

(i) Note que para $x > 0$,

$$(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{2^2}\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2^3}) = \sqrt[4]{x^4} - \sqrt[4]{2^4} = |x| - 2 = x - 2.$$

Então:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{2^2}\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2^3})} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[4]{2^3} + \sqrt[4]{2}\sqrt[4]{2^2} + \sqrt[4]{2^2}\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2^3})} \\
&= \frac{1}{4\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{8}}.
\end{aligned}$$

Na segunda igualdade acima usamos que o quociente de funções contínuas é contínua, para pontos em que o denominador não se anula. A função do denominador é contínua em todos os pontos $x > 0$ porque é soma de funções contínuas.

(j) As funções dadas pelo numerador e pelo denominador são contínuas pois são funções polinomiais. Além disso, $\lim_{x\to 0}(x^2+2) = 2 \neq 0$. Portanto, a função dada pelo quociente é contínua em $x = 0$, e assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-1}{x^2+2} = -\frac{1}{2}.$$

(k) Para todo $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} &= \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5})} \\
&= \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})(\sqrt{x}-1)}{2(x-1)} \\
&= \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})(\sqrt{x}-1)}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

usando novamente que a função dada pelo quociente de funções contínuas é contínua em pontos em que o denominador não se anula.

Exercício 4:

Temos que $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+1}$ em todos os pontos nos quais $x \neq -1$. Logo, para efeitos de cálculo do limite para x tendendo a -1, podemos escrever:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} x = -1.$$

Como $f(-1) = 2 \neq -1$, a função não é contínua em $x = -1$.

Lembremos que para calcular o limite de uma função para x tendendo a um dado ponto p, o que importa são os pontos próximos, mas não iguais, a p. Usamos esse argumento para substituir f pela função $\dfrac{x^2+x}{x+1}$ no cálculo do limite acima. Como as duas funções são iguais para pontos próximos de -1, mas não iguais a -1, o limite de ambas deverá ser o mesmo quando x tende a -1. O argumento acima também pode ser usado para verificar que f é contínua em 0. De fato, existe um intervalo, que pode ser por exemplo $(-0.5, 0.5)$, em que a função f e a função $\dfrac{x^2+x}{x+1}$ são iguais. Ou seja, para pontos próximos de 0 as funções são idênticas, implicando que o limite quando x tende a 0 de ambas deve ser o mesmo:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to 0} x = 0 = f(0).$$

Portanto, f é contínua em $x = 0$.

Exercício 5:
(e)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-\,(x+h)^3 + 2(x+h) + x^3 - 2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-\,x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 + 2x + 2h + x^3 - 2x}{h} \\
&- \lim_{h\to 0} \frac{h(-3x^2+2) + -3xh^2 - h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-3x^2 + 2 - 3xh - h^2) = -3x^2 + 2.
\end{aligned}$$

(f) Para $x \neq 0$ e $0 < |h| < |x|$, temos que $|x+h| \geq ||x| - |h|| = |x| - |h| > 0$ (isso é importante para que $(x+h)$ não se anule) e portanto podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{x(x+h)h} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Observação: Veja que como $x \neq 0$, sempre podemos tomar h próximo o suficiente de 0 de modo que $(x+h)$ não se anule e possamos fazer a conta acima. Foi o que fizemos quando colocamos a imposição $0 < |h| < |x|$ acima. Isso é o mesmo que dizer que $h \in (-|x|, |x|)$ e $h \neq 0$. Como já dissemos, para efeitos de cálculo do limite, basta olhar para as proximidades do ponto de interesse.

Nos questões abaixo, omitimos a explicação de algumas passagens, por serem as mesmas das que foram dadas em exercícios anteriores.

Exercício 6:

(b) O ponto 2 é raiz dos polinômios dados pelo numerador e denominador. Dividindo-os por $(x-2)$, obtemos:

$$(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = (x-2)(x^2 - 3x + 2),$$

$$(x^4 - 5x - 6) = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3).$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{27} = 0.$$

(d)

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}} = \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})}{(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{7})}{(\sqrt{x+7} - \sqrt{14})}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})(\sqrt{x} - \sqrt{7})}{x - 7}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})(\sqrt{x} - \sqrt{7})}{(\sqrt{x} - \sqrt{7})(\sqrt{x} + \sqrt{7})}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})}{(\sqrt{x} + \sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{2}.$$

Exercício 7:

(a) Se $x > 1$, $\dfrac{|x-1|}{x-1} = 1$. Então:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1,$$

uma vez que $\lim_{x\to 1} 1 = 1$.

(c) Não existe o limite, pois

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}.$$

(f) Como

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{2^2-4+1}{2-1} = 1,$$

temos que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = 1.$$

(g)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2,$$

e assim o limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe e vale 2.

Exercício 8:

Não é verdade porque, por exemplo, a função $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ satisfaz a

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

mas não é contínua em 0, uma vez que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$.