

### Série de Exercícios 4

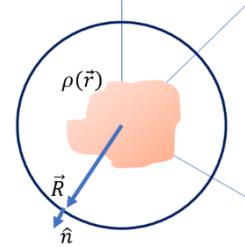
1. Neste exercício vamos analisar, em maior detalhe, comentário feito no Jackson sobre a generalização da expressão para o campo de um dipolo, Equação 4.13, para incluir corretamente a contribuição do dipolo quando queremos fazer a integral do campo  $\vec{E}_{\ell=1}$  em um volume. Para isso vamos analisar o efeito global (integral) do campo elétrico produzido por uma distribuição finita de cargas.

a) Considere a integral do campo elétrico produzido por uma densidade de carga  $\rho(\vec{r})$  dentro de uma esfera de raio  $R$  centrada na origem. Mostre que

$$\int_0^R \vec{E}(\vec{r}) dV = - \int \phi(\vec{r}) \hat{n} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

onde  $\hat{n} = \vec{R}/R$  e a integral é sobre a superfície da esfera.

[Para obter esse resultado utilize a relação  $\int (\nabla f) dV = \int f d\vec{S}$ ]



b) Utilizando agora a expressão para o potencial em função da densidade de carga

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mostre que

$$\int_0^R \vec{E}(\vec{r}) dV = - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\vec{r}') \int d\Omega \frac{\hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

b) Para calcular a segunda integral, é necessário referir  $\hat{n}$  a um sistema de versores fixos (cartesianos); mostre que

$$\begin{aligned} \hat{n} = & -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} [Y_{11}(\theta, \varphi) + Y_{1,-1}(\theta, \varphi)] \hat{e}_x - \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} [Y_{11}(\theta, \varphi) - Y_{1,-1}(\theta, \varphi)] \hat{e}_y \\ & + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta, \varphi) \hat{e}_z \end{aligned}$$

c) Utilizando o desenvolvimento de  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  em coordenadas esféricas. Obtenha

$$\int d\Omega \frac{\hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \int d\Omega Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \hat{n}$$

d) Substituindo na integral a expressão para  $\hat{n}$  derivada no item b) e utilizando a relação de ortogonalidade para os harmônicos esféricos, obtenha

$$\int d\Omega \frac{\hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \hat{n}'; \quad \hat{n}' = \sin \theta' \cos \varphi' \hat{e}_x + \sin \theta' \sin \varphi' \hat{e}_y + \cos \theta' \hat{e}_z$$

de forma que

$$\int_0^R \vec{E}(\vec{r}) dV = -\frac{R^2}{3\epsilon_0} \int \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \hat{n}' \rho(\vec{r}') dV'$$

Considere agora dois limites distintos, especificados a seguir.

e) A esfera de raio  $R$  engloba todas as cargas, de forma que  $r_{<} = r'$ ;  $r_{>} = R$ . Neste caso, mostre que  $r_{<} = r'$ ;  $r_{>} = R$

$$\int_0^R \vec{E}(\vec{r}) dV = -\frac{1}{3\epsilon_0} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = -\frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}$$

onde  $\vec{p}$  é o momento de dipolo elétrico da distribuição de cargas com respeito ao centro da esfera.

f) Todas as cargas estão externas à esfera, de forma que  $r_{<} = R$ ;  $r_{>} = r'$ . Neste caso, mostre que

$$\int_0^r \vec{E}(\vec{r}) dV = -\frac{4\pi R^3}{3} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \vec{r}' dV' = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{E}(0),$$

onde  $\vec{E}(0)$  é o campo no centro da esfera (justifique o porquê).

Então, para ser consistente como resultado obtido no item e), no cálculo de integrais de volume do campo elétrico, a expressão para o campo de um dipolo, vista na primeira aula sobre o desenvolvimento do potencial de uma distribuição de cargas em contribuições multipolares, deve ser generalizada para

$$\vec{E}_{\ell=1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right]; \quad \hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Estudo complementar: veja o mesmo tópico discutido de outra forma no Exemplo 4.1 e seção 4.2.2 do livro do A. Zangwill.

2. Uma superfície esférica de raio  $R$  tem uma densidade de carga uniformemente distribuída sobre sua superfície, com densidade superficial de carga  $\sigma = Q/4\pi R^2$ ; exceto por uma capa esférica no seu polo norte, definida pelo cone  $\theta = \alpha$ .

a) Mostre que o potencial dentro da esfera é dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} [P_{\ell+1}(\cos \alpha) - P_{\ell-1}(\cos \alpha)] \frac{r^\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell \cos \theta$$

onde, para  $\ell = 0$ ,  $P_{\ell-1}(\cos \alpha) = -1$ .

- b) Determine a expressão para o potencial fora da esfera.
- c) Mostre que, na origem, o campo elétrico é dado por

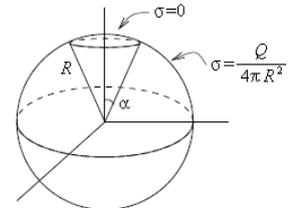
$$\vec{E}(0) = \frac{Q(\sin \alpha)^2}{16\pi R^2} \hat{e}_z$$

### Métodos

- A. Considerando a simetria azimutal, tome

$$\phi_{in} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta);$$

$$\phi_{ex} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \theta);$$



onde o coeficiente  $\alpha_{\ell}$  foi tomado o mesmo nas duas regiões para que o potencial seja contínuo em  $r = R$ .

Imponha a condição de contorno na componente radial do campo elétrico (normal à superfície)

$$[E_{ex,r} - E_{in,r}]_{r=R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

e obtenha

$$\sigma(\cos \theta) = \frac{\epsilon_0}{R} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \alpha_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta).$$

Como esse é um desenvolvimento em Polinômios de Legendre, utilize o método usual, baseado na sua ortogonalidade, para calcular os coeficientes  $\alpha_{\ell}$ .

- B. Tente obter a mesma solução para o potencial utilizando a Função de Green (Jackson, seção 3.9)

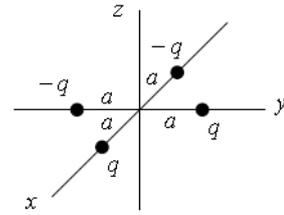
$$\phi(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV',$$

considerando que, neste caso temos simetria azimutal, ou seja,  $m = 0$ .

3. Considere a configuração de cargas mostrada na figura.

- a) Calcule os momentos multipolares  $q_{\ell m}$  desta distribuição de cargas.

b) Escreva a expressão do potencial eletrostático  $\phi(\vec{r})$  a partir do desenvolvimento multipolar. Usando apenas os termos de mais baixa ordem nesse desenvolvimento, desenhe as curvas  $\phi(\vec{r}) = \text{const}$  no plano  $(x, y)$ , para distâncias  $r > a$ .



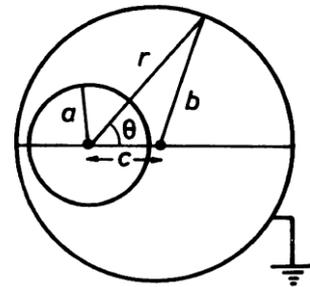
c) Calcule o potencial diretamente da expressão para o potencial de uma carga pontual e compare com o resultado do item b).

4. Na configuração mostrada na figura, uma esfera condutora de raio  $a$  está colocada dentro de outra esfera condutora, de raio  $b$ , com uma distância  $c \ll b$  entre seus centros. A esfera interna está carregada com uma carga total  $Q$  e a externa está aterrada.

a) Mostre que, em primeira ordem em  $c$ , a equação que descreve a superfície da esfera externa, tomando o centro da esfera interna como origem do sistema de coordenadas é

$$r(\theta) = b + c \cos \theta$$

b) Supondo que somente as componentes angulares  $\ell = 0$  do potencial são relevantes, determine sua expressão no espaço entre as esferas.



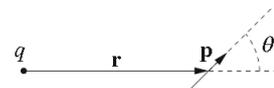
c) Determine as distribuições de carga na superfície das duas esferas, lembrando que, na superfície de um condutor,  $E_n = \sigma/\epsilon_0$ .

d) Calcule os momentos multipolares correspondente a essas distribuições de carga.

Nota: nos cálculos, termos proporcionais a  $c(\cos \theta)^2$  podem ser desprezados.

5. Um dipolo  $\vec{p}$  é colocado a distância  $r$  de uma carga pontual e formando um ângulo  $\theta$  com o vetor  $\vec{r}$ .

a) Calcule a força eletrostática sobre o dipolo. Esta força satisfaz a terceira lei de Newton?



b) Calcule a expressão do torque que atua sobre o dipolo.

Problemas do Frenkel, Cap. 3 – 3, 7 e 8

Problemas do Jackson, Cap. 4 – 4.6 a) e b); 4.7