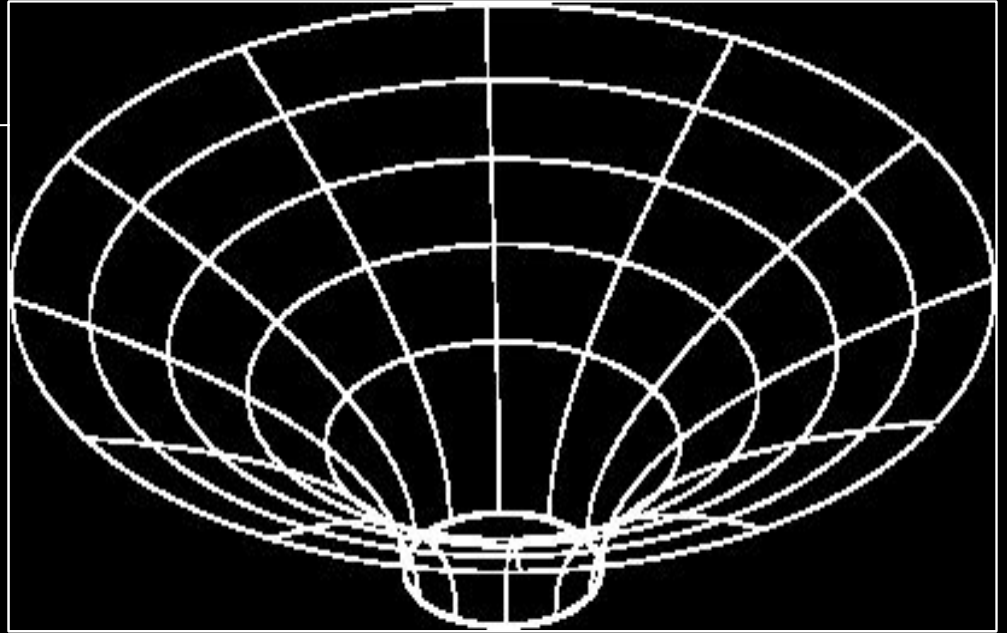


Raios de luz no espaço-tempo de Schwarzschild

4300337 - Introdução à
Relatividade



Raios de luz no espaço-tempo de Schwarzschild

SUMÁRIO:

- Raios de Luz
- Coordenadas de Eddington–Finkelstein
- Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Métrica no Espaço-Tempo Schwarzschild

Raio de Schwarzschild

Elemento de raio

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Elemento
de
Linha

Elemento
de
tempo

Elemento
de
ângulo sólido

$$r_s = 2GM$$

Raios de Luz

- Geodésica nula $\Rightarrow$ Elemento de linha nulo:

$$\Rightarrow ds^2 = 0$$

- Independência angular $\Rightarrow$ Elemento de ângulo sólido nulo:

$$\Rightarrow d\Omega^2 = 0$$

- **Resultado:** Equação nas coordenadas t e r !

$$\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Raios de Luz

- Integrando essas equações, temos:

$$t(r) = \pm(r - r_0 + r_S \ln \left| \frac{r - r_S}{r_0 - r_S} \right|) + t_0.$$

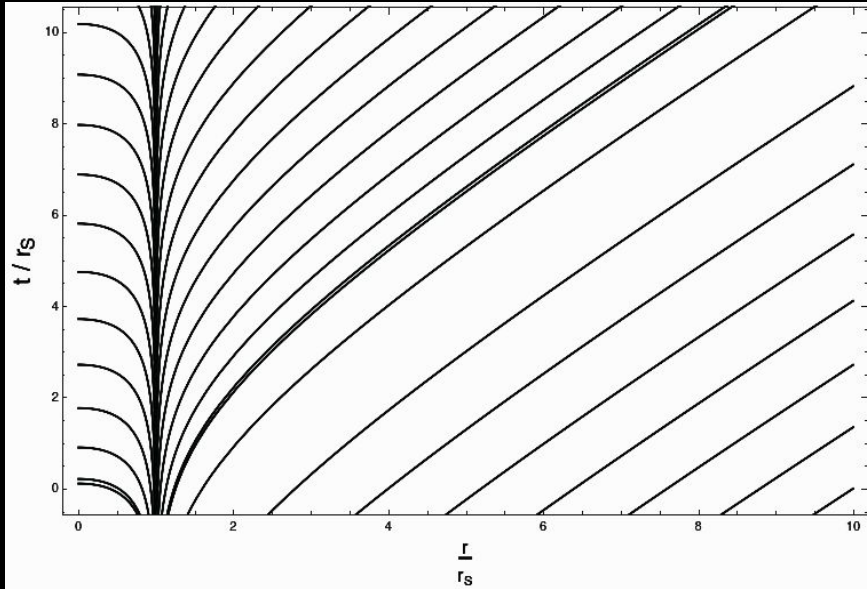
Condições Iniciais:

$$r_0, t_0 = t(r_0)$$

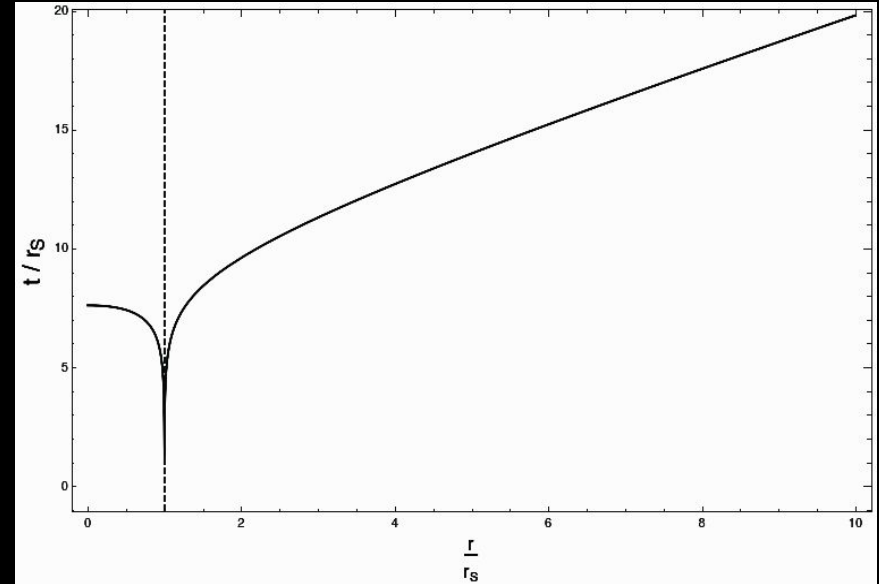
Raios de Luz

- Escolhendo sinal positivo (+) na equação anterior, temos

$$t(r) = r - r_0 + r_S \ln \left| \frac{r - r_S}{r_0 - r_S} \right| + t_0.$$



Trajetórias de luz

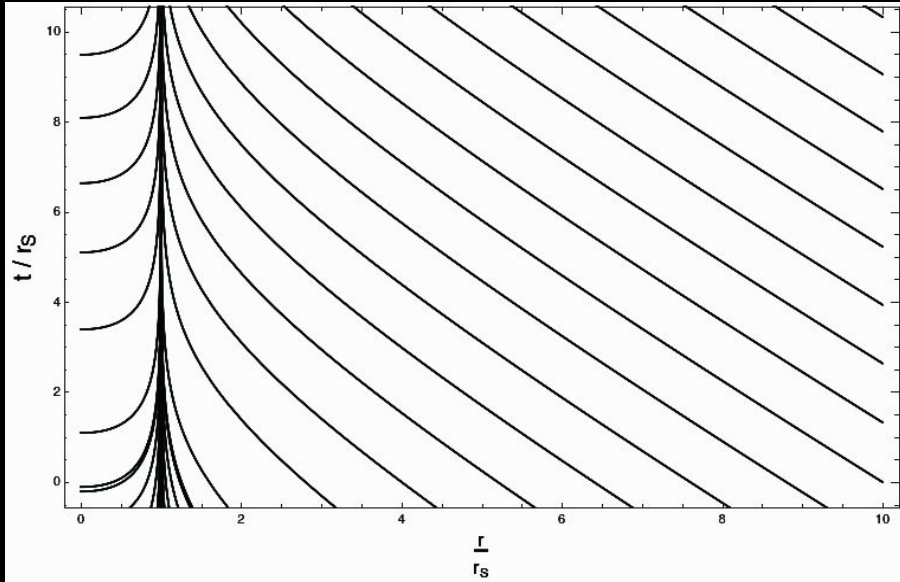


Raio de Luz específico

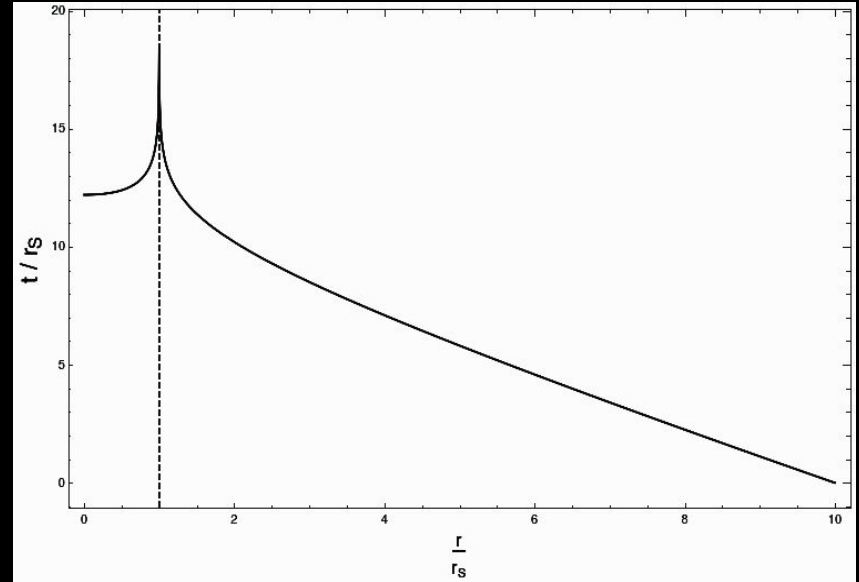
Raios de Luz

- Escolhendo sinal positivo (-) na equação anterior, temos

$$t(r) = -(r - r_0 + r_S \ln \left| \frac{r - r_S}{r_0 - r_S} \right|) + t_0.$$

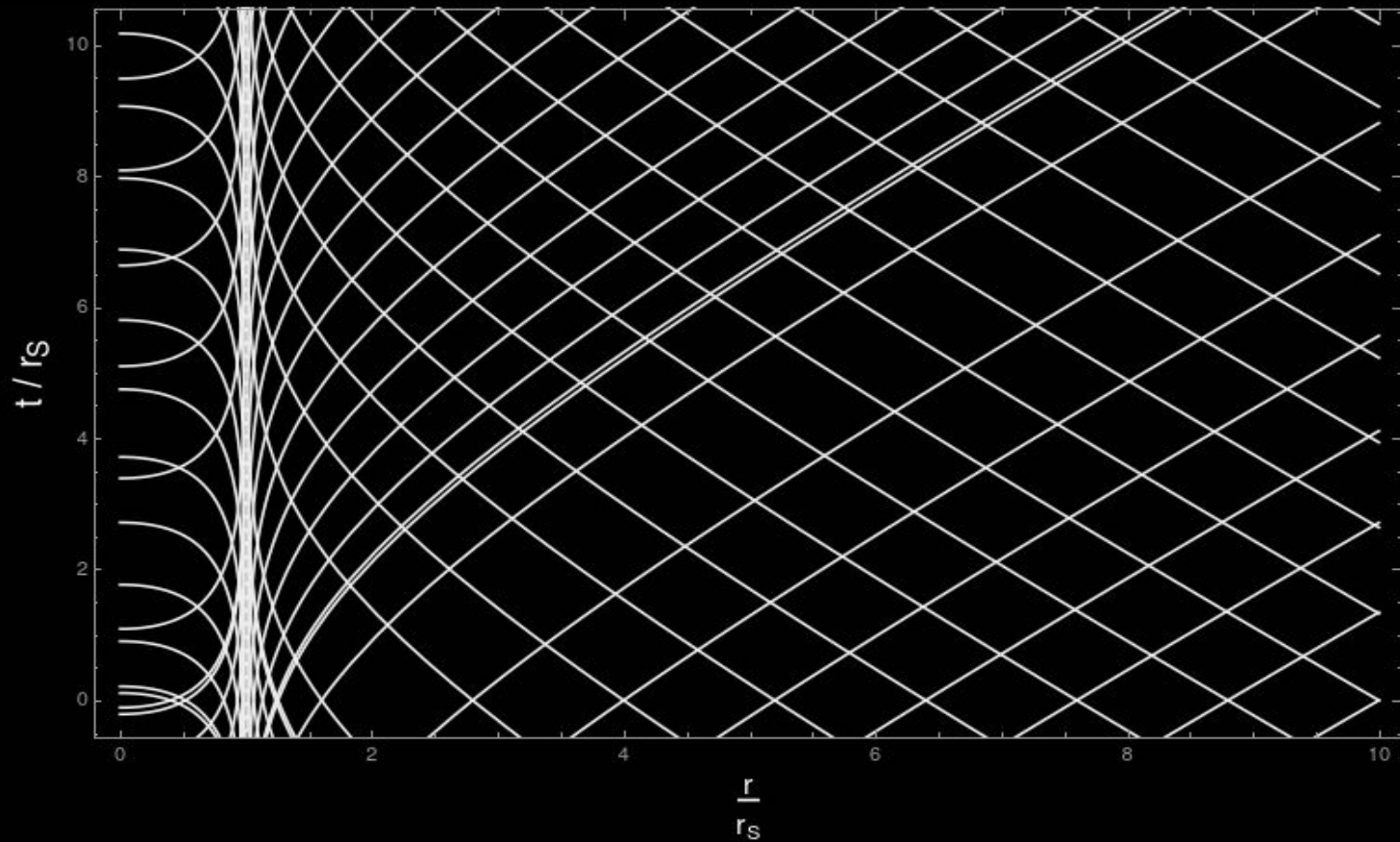


Trajetórias de luz



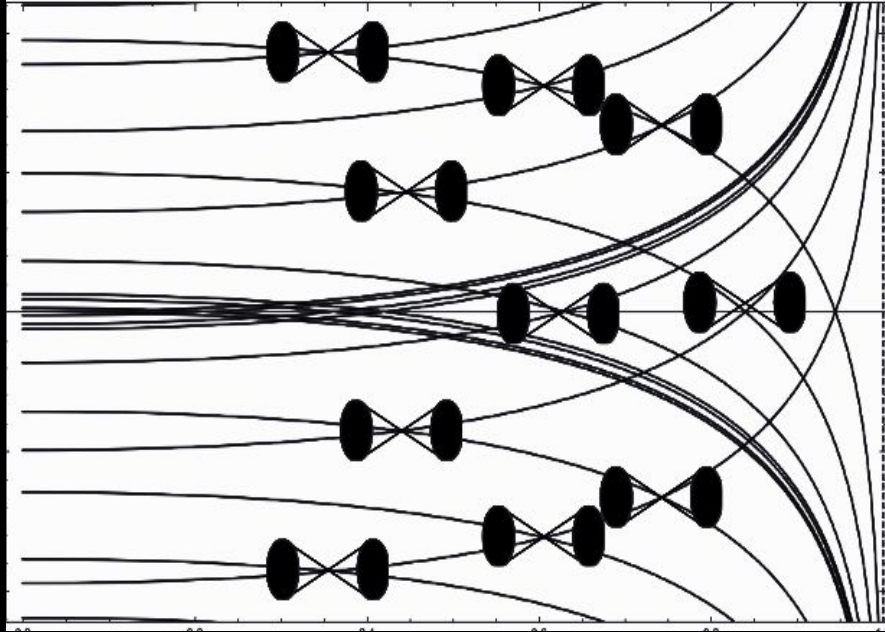
Raio de Luz específico

Raios de Luz

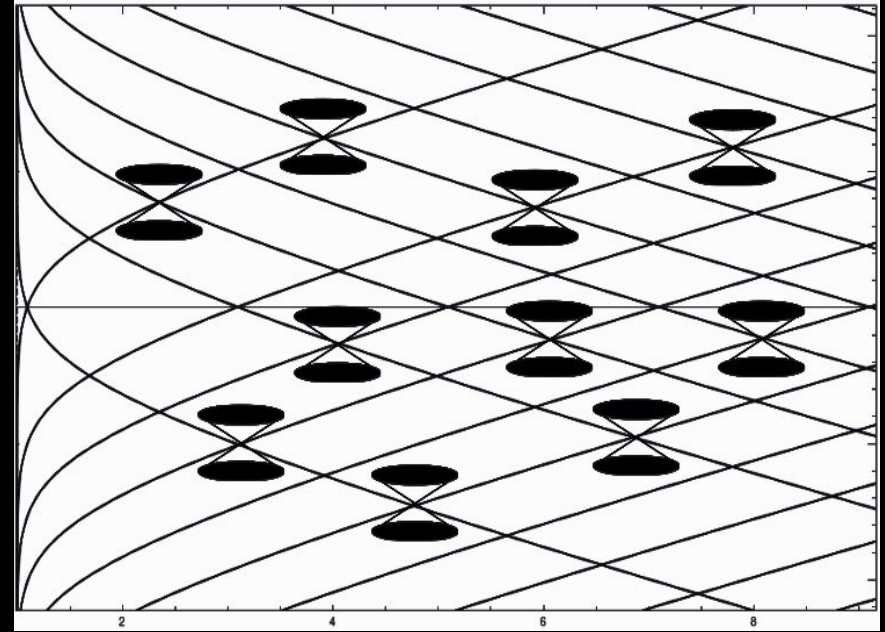


Raios de Luz

- Cones de Luz:



$r < r_s$



$r > r_s$

Raios de Luz

Anomalias:

- Ao atravessar r_s , cones de luz 'giram' 90° ;
- Quando $r \rightarrow r_s$, $(1 - r/r_s) \rightarrow 0$ e $(1 - r/r_s)^{-1} \rightarrow \infty$;
- Podemos contornar essas anomalias propondo um novo sistema de coordenadas.

Coordenadas de Eddington–Finkelstein

Definição:

$$t = v - r_S \ln \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)$$

↑
novo parâmetro

→

$$dt = dv - \left(1 - \frac{r_S}{r} \right)^{-1} dr.$$

colocando no elemento
de linha de luz radial

$$- \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dv^2 + 2dvdr = 0$$

Coordenadas de Eddington–Finkelstein

Teremos então: $\left(\left(1 - \frac{r_S}{r} \right) dv - 2dr \right) dv = 0$

→ Caso $dv = 0$: $v = \text{constante}$;

→ Caso $dv \neq 0$ e $dr = 0$: então $r = r_S$.

→ Caso $dv \neq 0$ e $dr \neq 0$: integramos o termo diferencial e encontramos:

$$v(r) = v_0 + 2 \ln \left| \frac{r - r_S}{r_0 - r_S} \right| + 2(r - r_0).$$

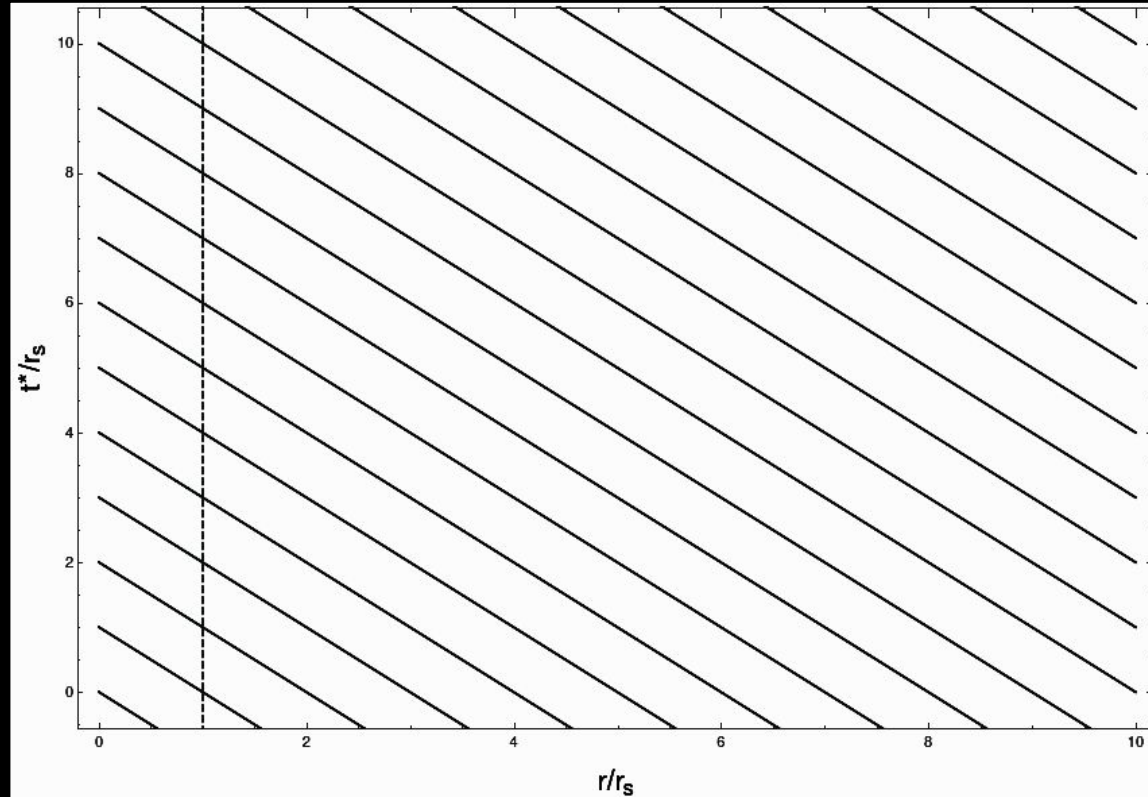
Coordenadas de Eddington–Finkelstein

Condições Iniciais: $r_0, v_0 = v(r_0)$

Aqui é útil definir uma nova coordenada $\mathbf{t}^* = \mathbf{v} - \mathbf{r}$ para plotar gráficos $\mathbf{t}^* \times \mathbf{r}$ pois ela assume um papel parecido com a da coordenada temporal t .

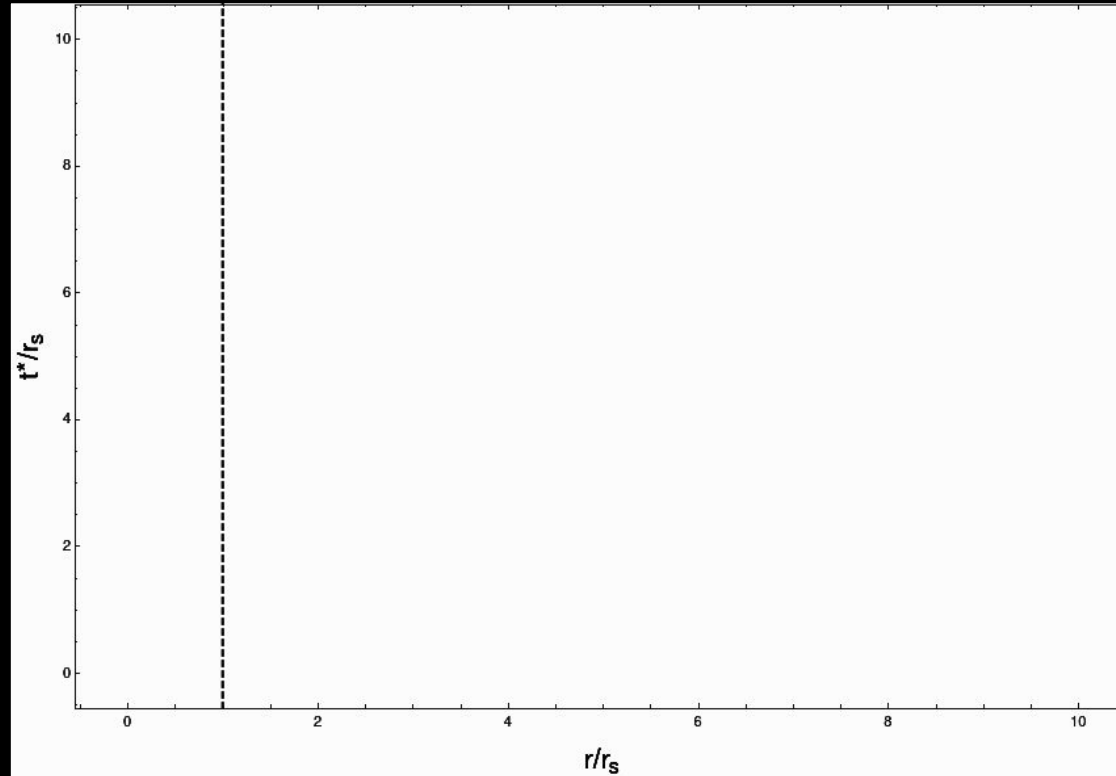
Coordenadas de Eddington–Finkelstein

→ Caso $dv = 0$:



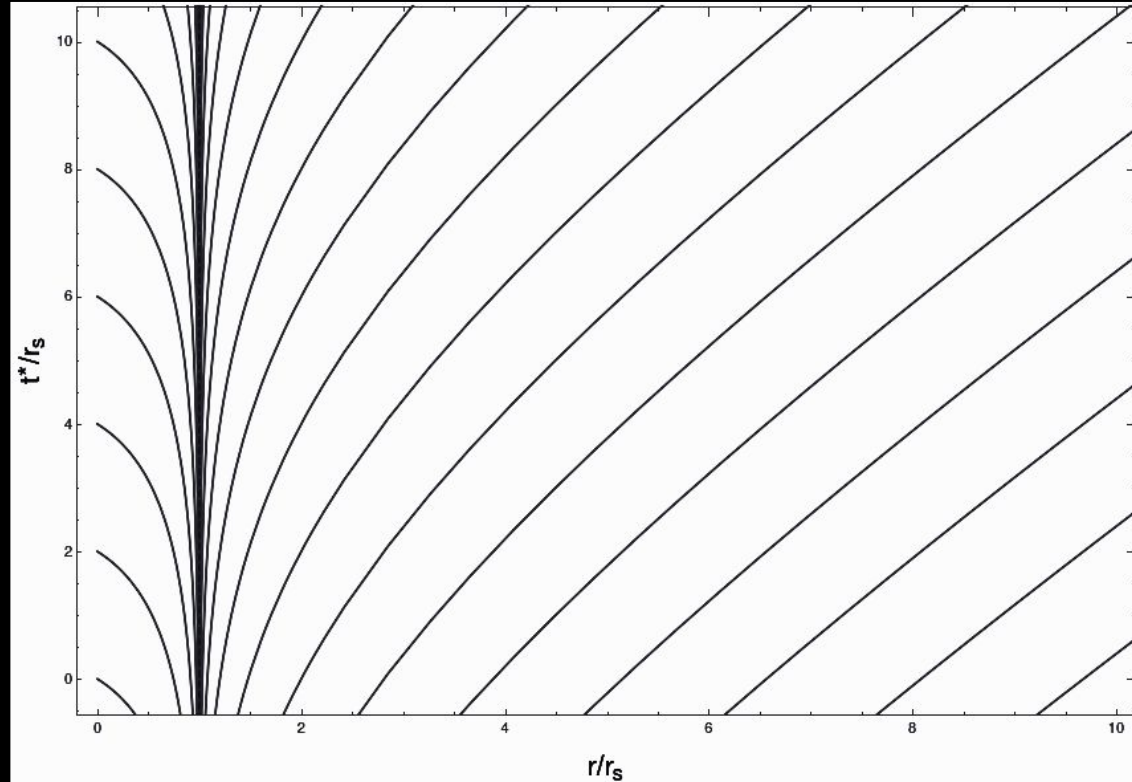
Coordenadas de Eddington–Finkelstein

→ Caso $dv \neq 0$ e $dr = 0$:

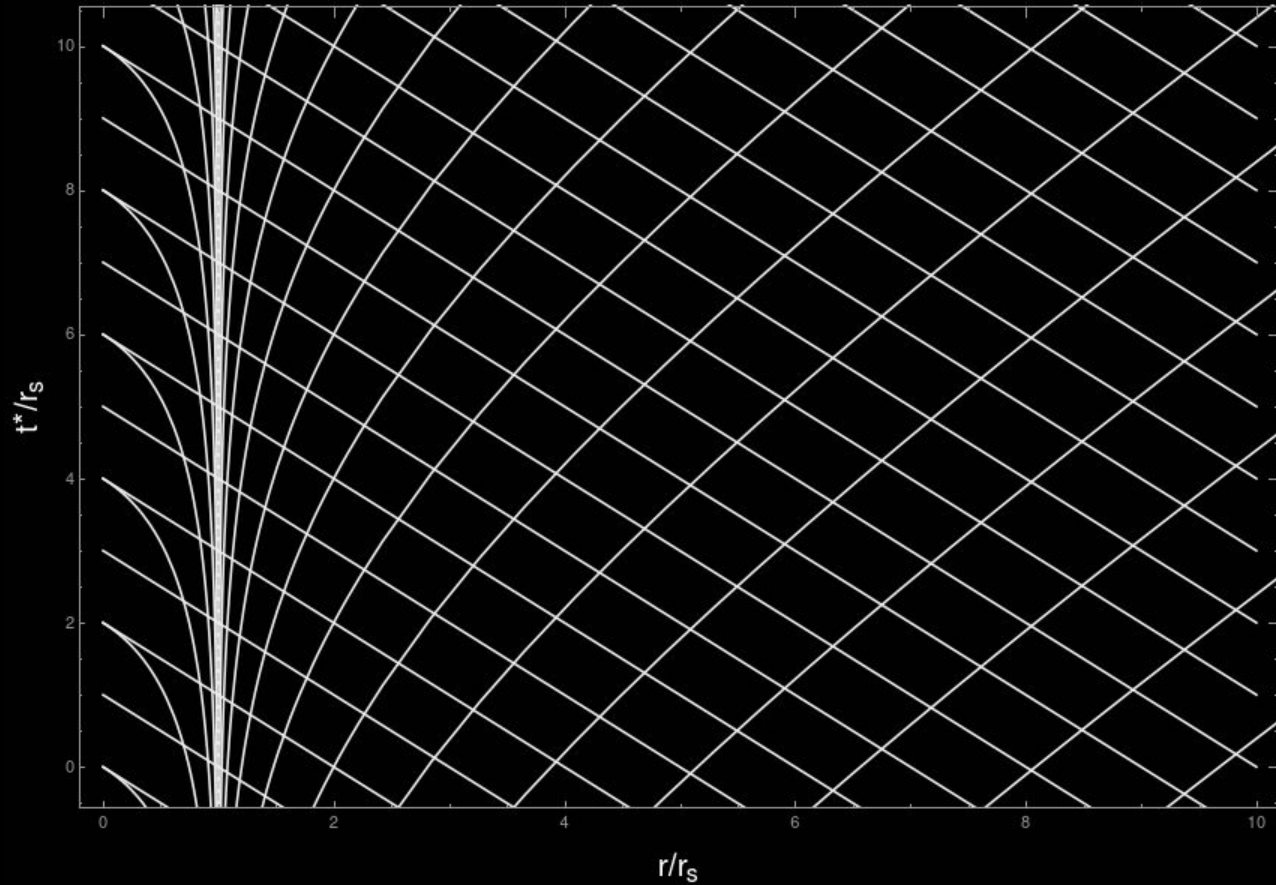


Coordenadas de Eddington–Finkelstein

→ Caso $dv \neq 0$ e $dr \neq 0$:

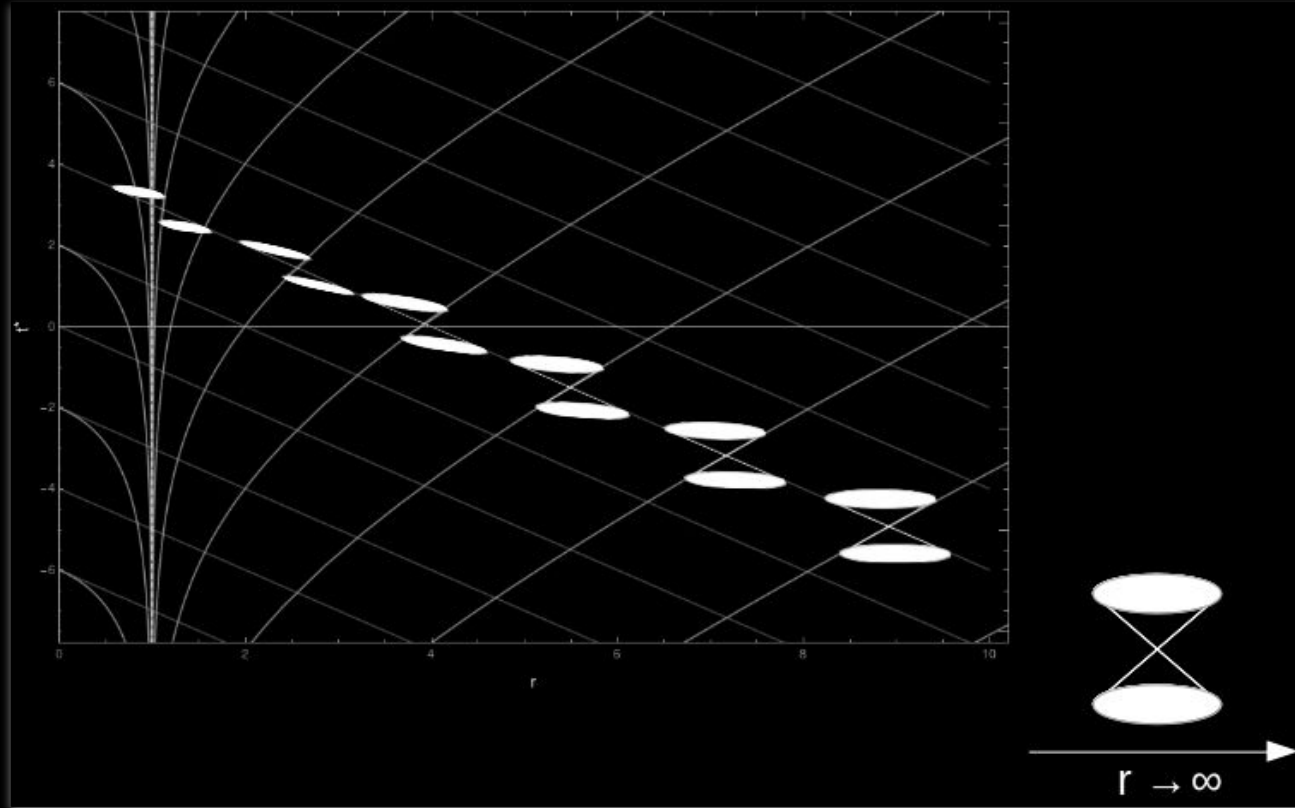


Coordenadas de Eddington–Finkelstein



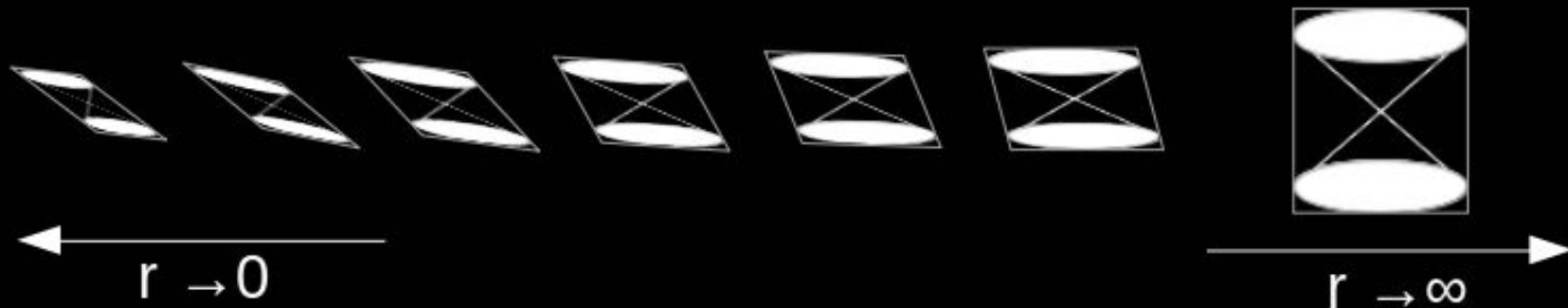
Coordenadas de Eddington–Finkelstein

Os cones de luz nesse caso, estarão na intersecção das curvas



Coordenadas de Eddington–Finkelstein

A medida que nos aproximamos do horizonte de eventos ($r = r_s$), o cone de luz dos observadores, num referencial inercial local em queda livre, é achatado



Coordenadas de Eddington–Finkelstein

- Esse sistema de coordenadas ajuda entender melhor o que acontece com os raios de luz no espaço-tempo de Schwarzschild, mas ainda temos uma complicação com os cones de luz;
- Podemos propor um sistema de coordenadas que preservem os cones de luz a 45° , como em um espaço-tempo plano: as coordenadas de **Kruskal-Szekeres**.

Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Definimos o sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres como:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{2r_S} \right) \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \\ X = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{2r_S} \right) \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \end{array} \right. \quad \text{para } r > r_s$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{2r_S} \right) \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \\ X = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{r}{2r_S} \right) \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right) \end{array} \right. \quad \text{para } r < r_s$$

Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Para todo r , encontramos

$$T^2 - X^2 = \left(1 - \frac{r}{r_S}\right) \exp\left(\frac{r}{r_S}\right)$$

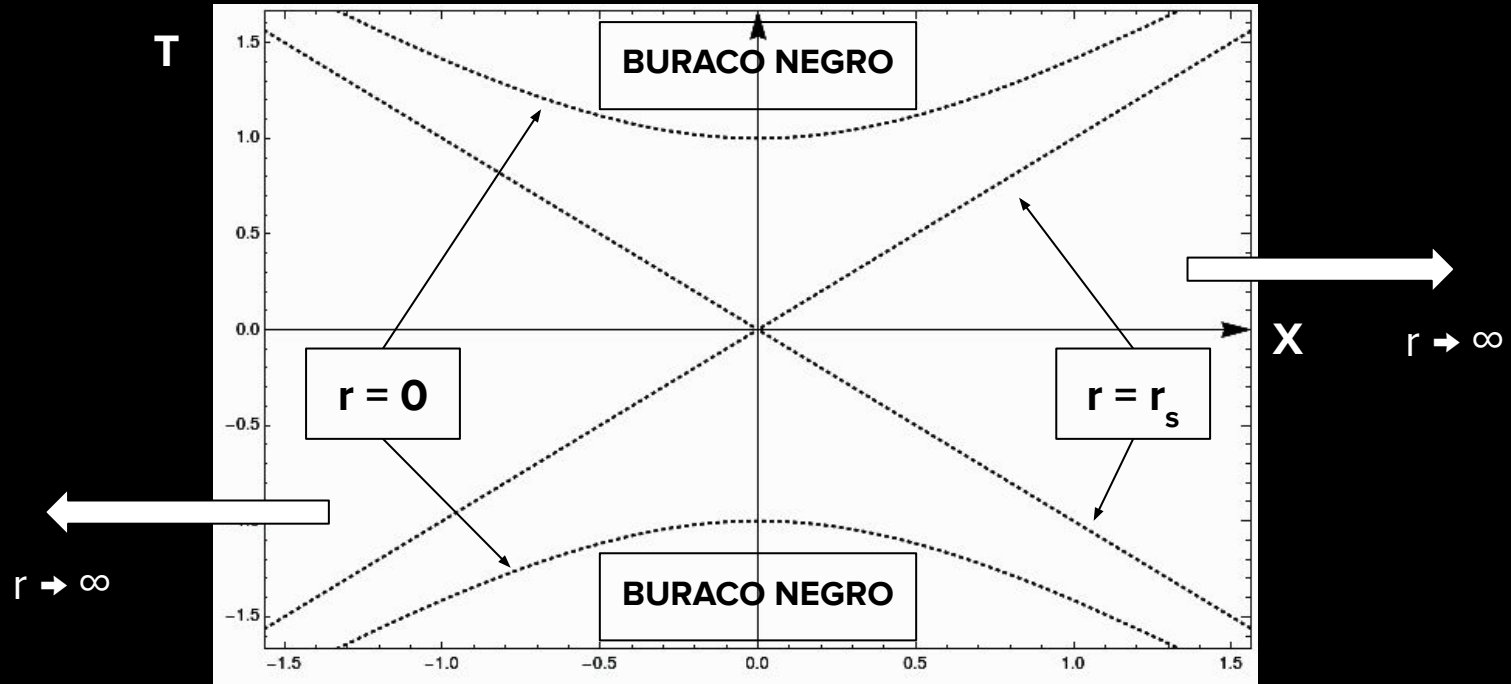
Porém

- para $r > r_s$ $\rightarrow t = 2r_S \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{X}\right)$
- para $r < r_s$ $\rightarrow t = 2r_S \operatorname{arctanh}\left(\frac{X}{T}\right)$

Podemos mapear todo espaço em um diagrama de T por X

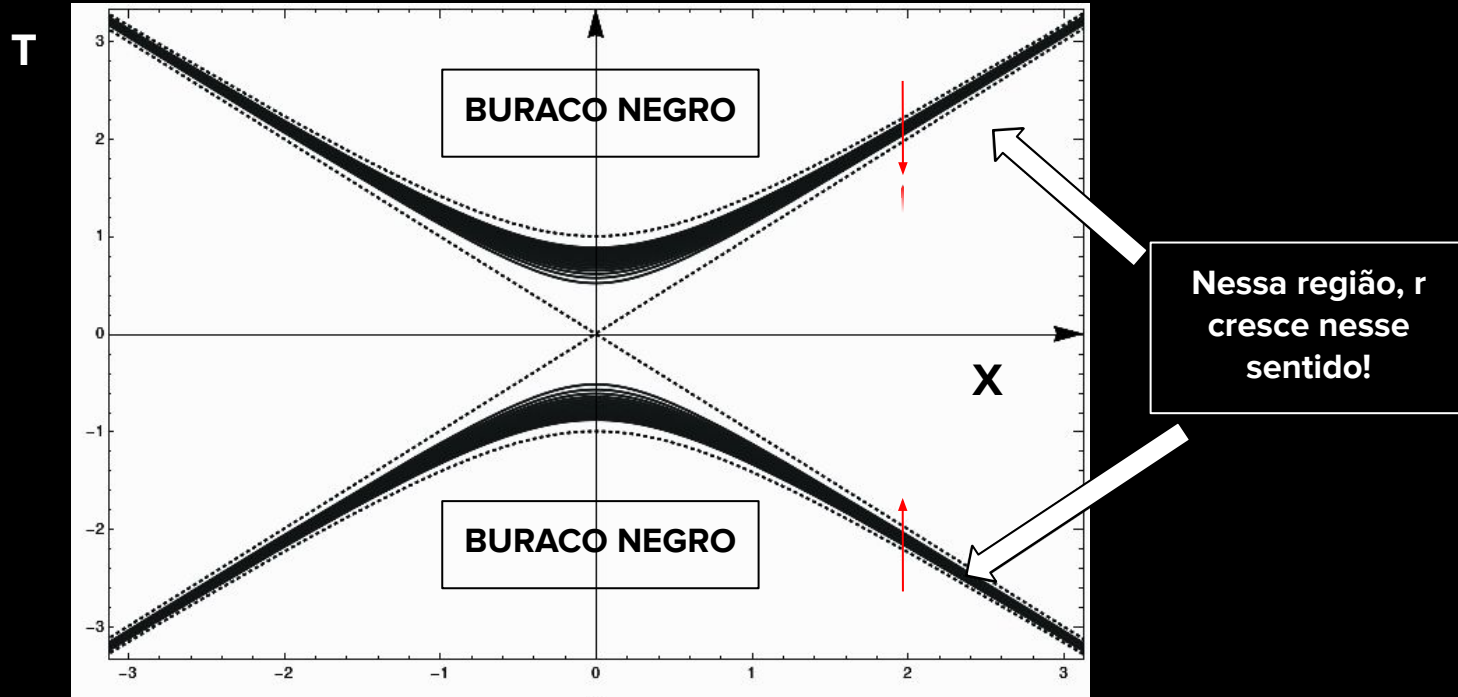
Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Em termos da coordenada r , temos



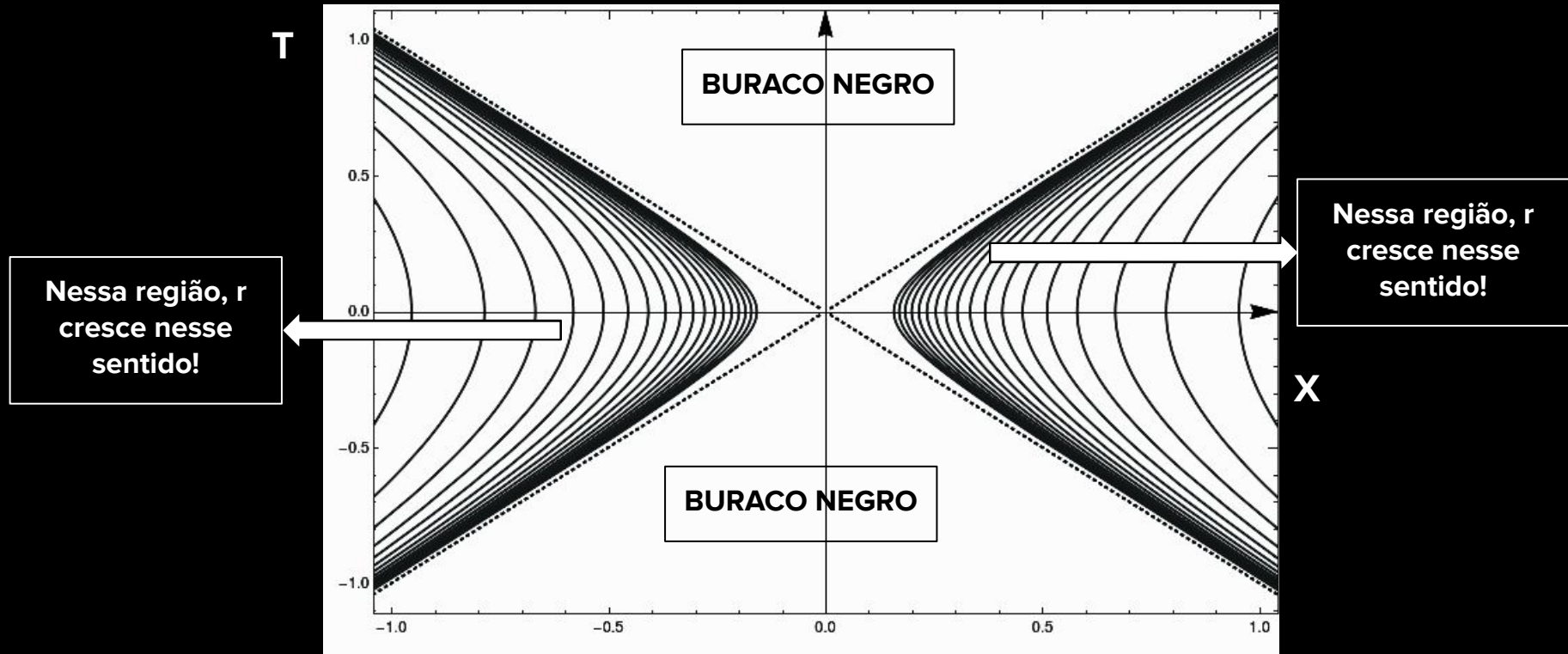
Coordenadas de Kruskal-Szekeres

A região $r < r_s$ está confinada na região entre as curvas pontilhadas



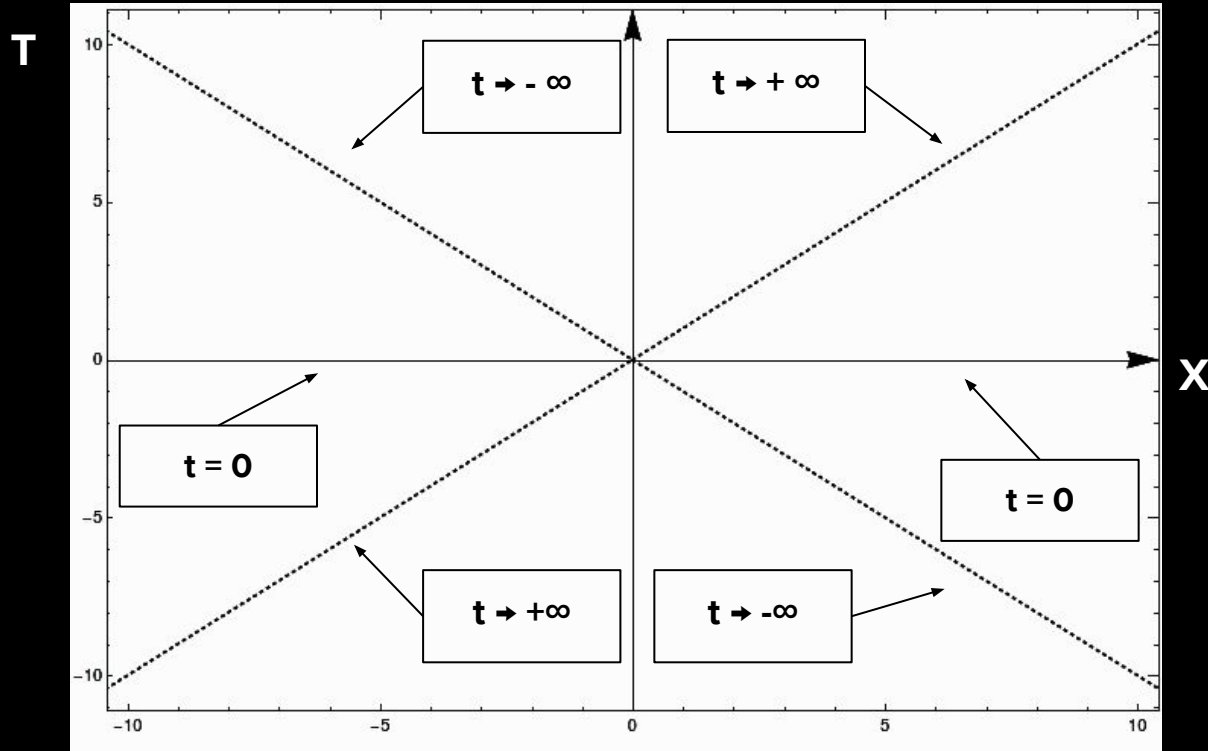
Coordenadas de Kruskal-Szekeres

A região $r > r_s$ se comporta assim:



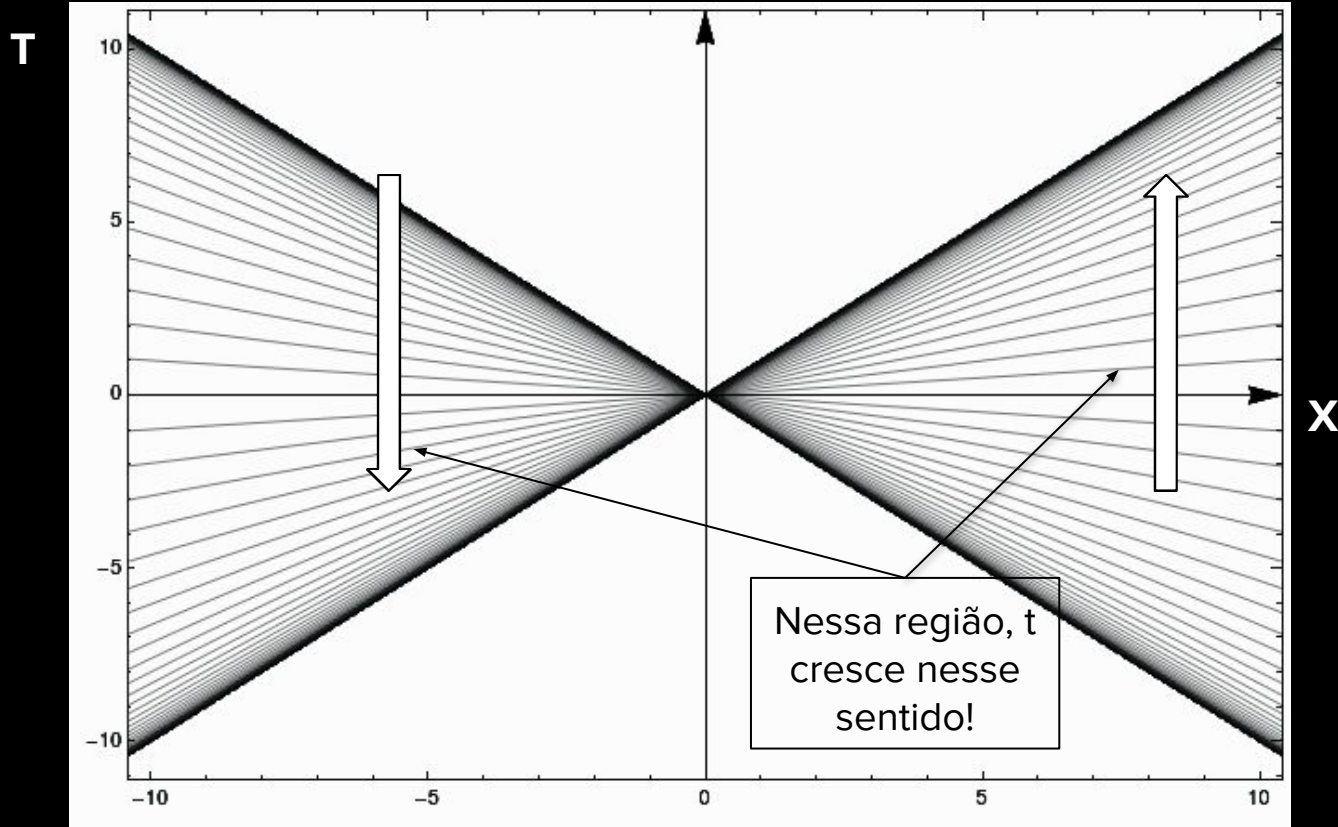
Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Em termos da coordenada t , num geral, temos:



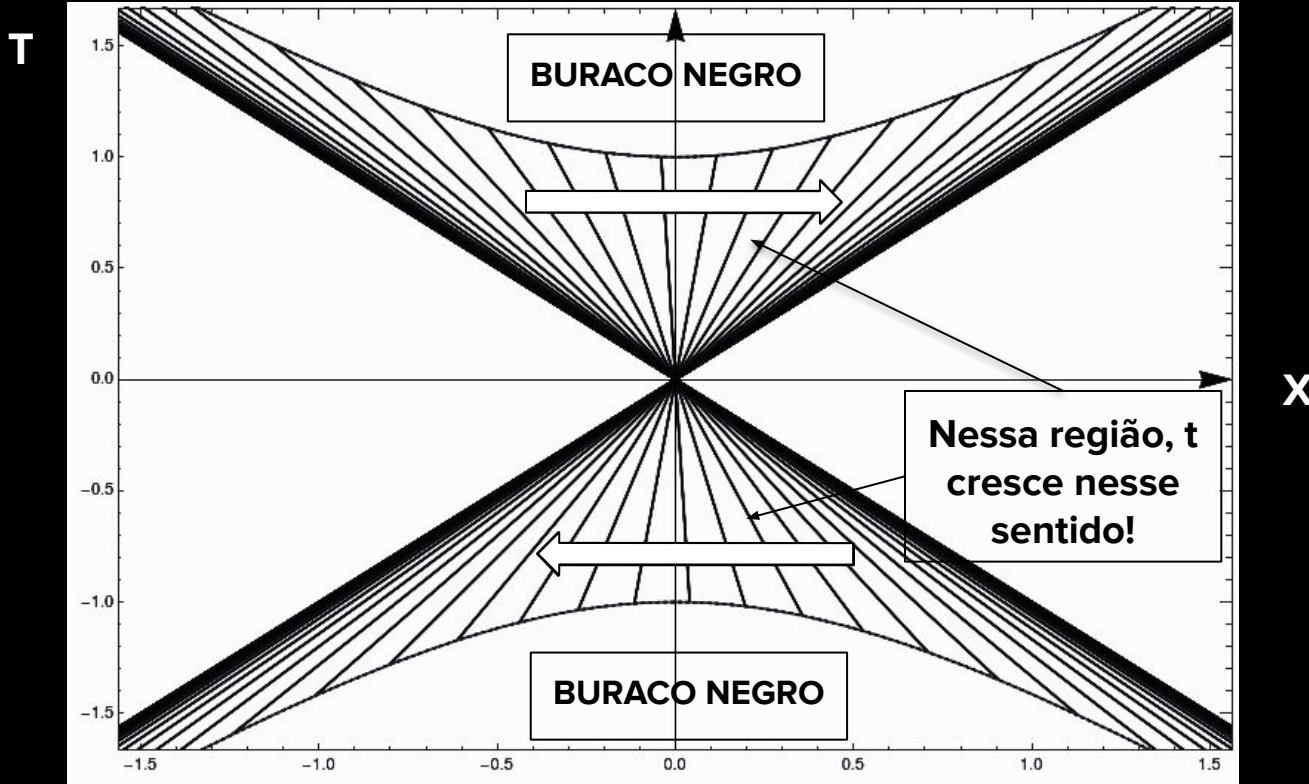
Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Em termos da coordenada r , temos: na região $r > r_s$

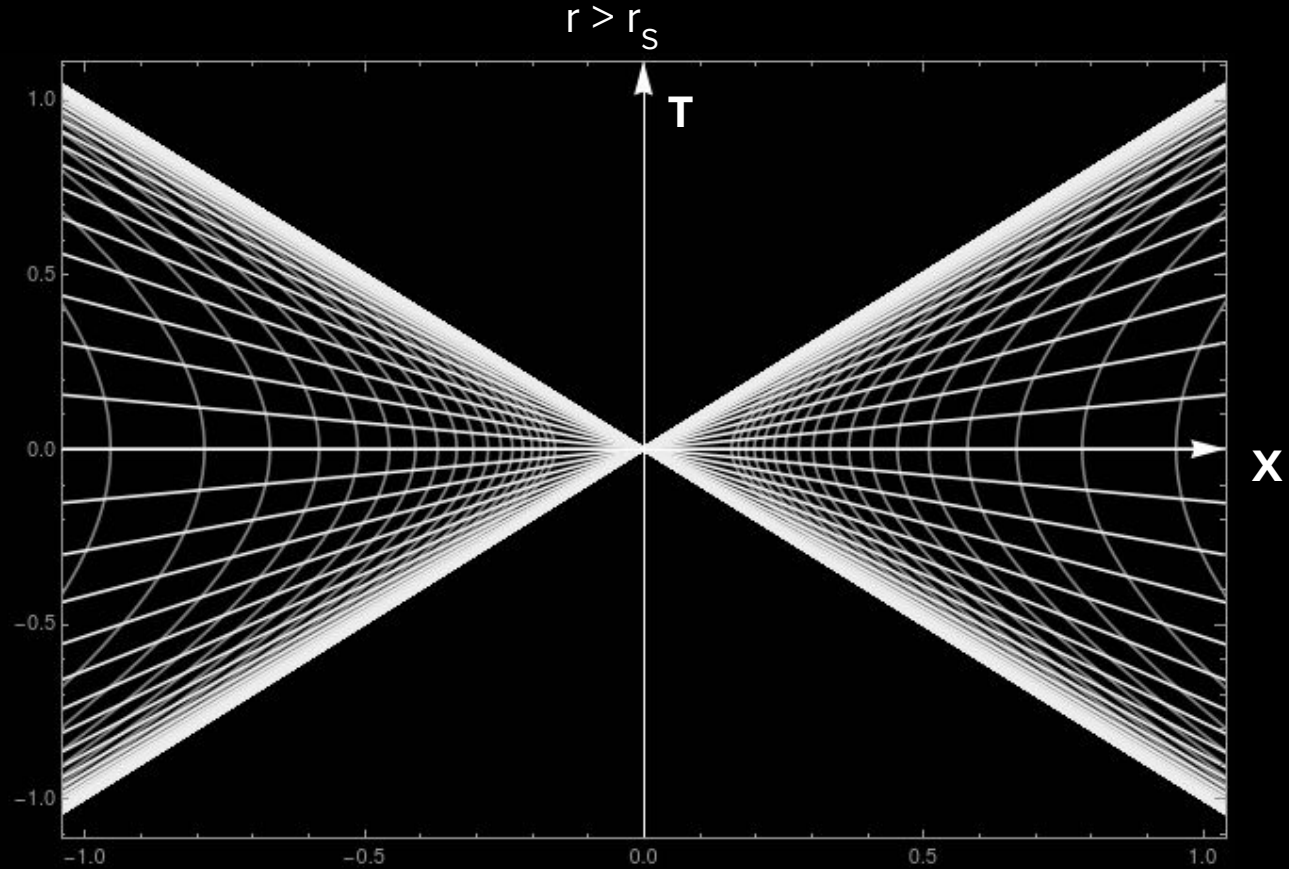


Coordenadas de Kruskal-Szekeres

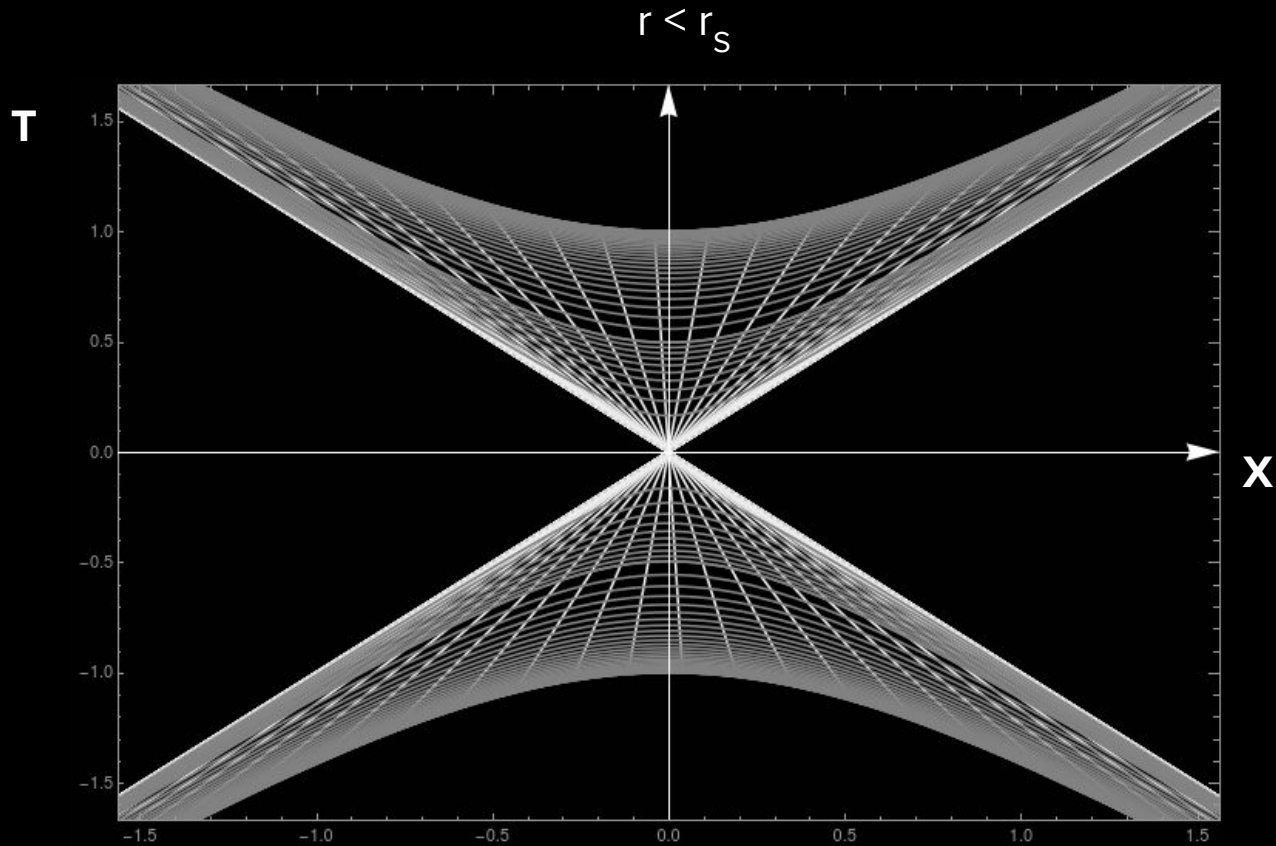
Em termos da coordenada t , temos: na região $r < r_s$



Coordenadas de Kruskal-Szekeres

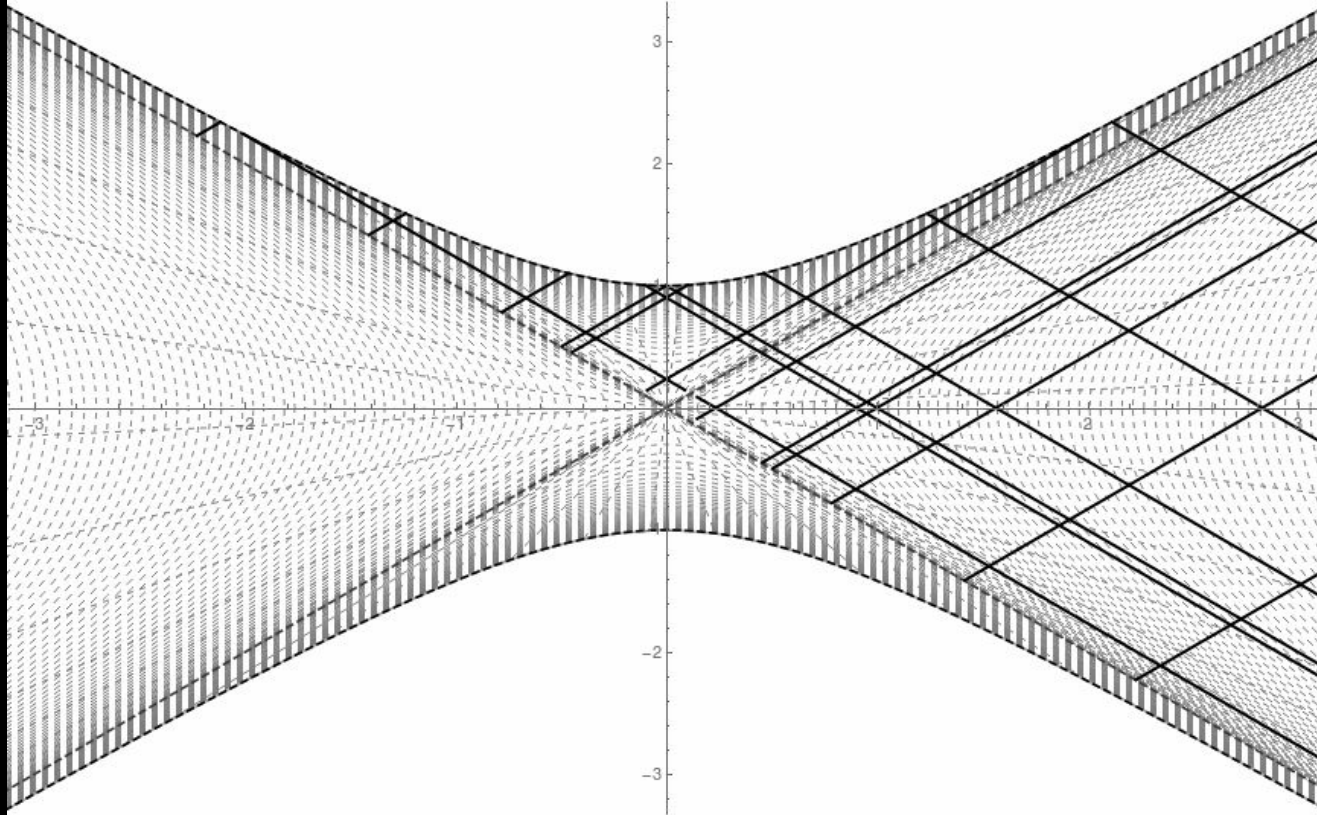


Coordenadas de Kruskal-Szekeres



Coordenadas de Kruskal-Szekeres

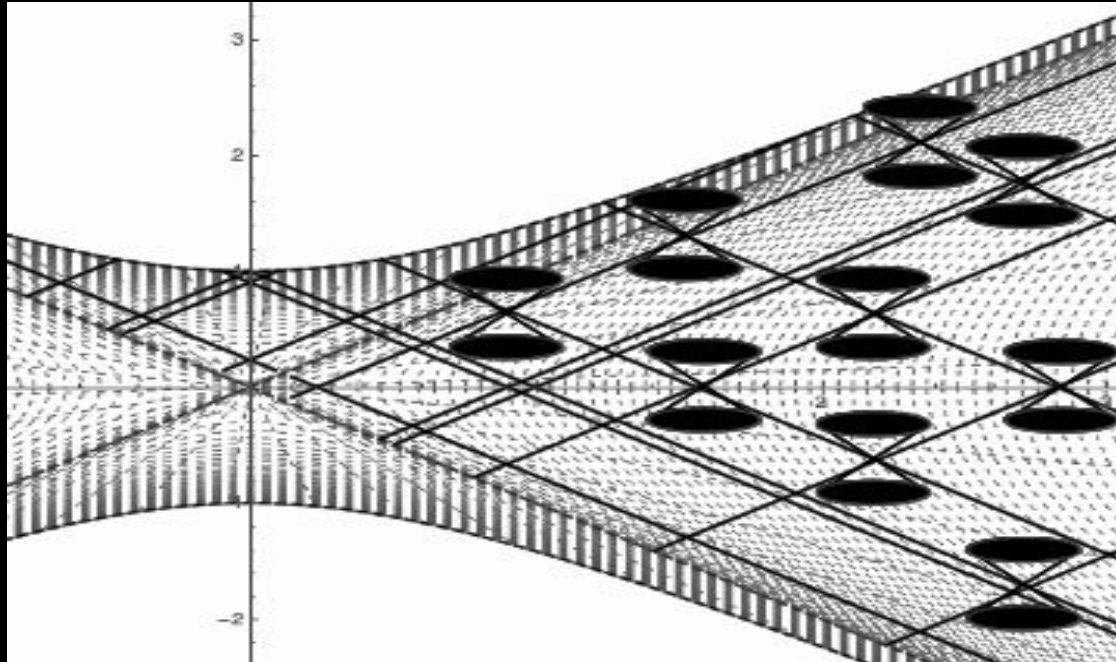
Trajetoórias de Luz (curvas retas em negrito)



Coordenadas de Kruskal-Szekeres

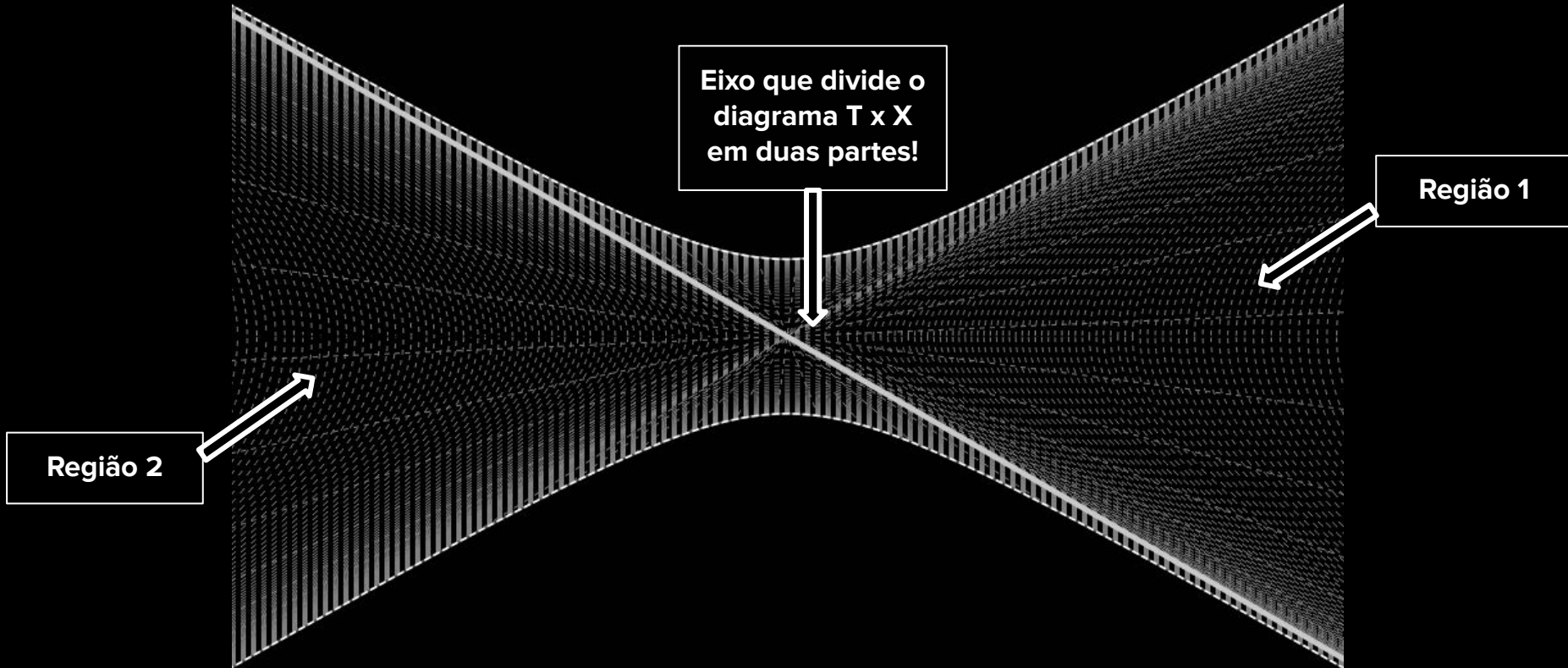
Cones de Luz

Como as linhas de tempo constante são retas, então os cones de luz permanecem a 45° como num espaço tempo plano!



Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Note que podemos dividir esse diagrama em duas partes!



Coordenadas de Kruskal-Szekeres

- Com a definição de coordenadas T e X que definimos, nós conseguimos acessar toda região 1 do diagrama.
- A região 2 seria acessível caso fizéssemos a troca de $T \rightarrow T' = -T$ e $X \rightarrow X' = -X$.
- Qual seria o significado físico da região 2???

