Máximos e Mínimos Condicionados

- **Problema:**
  São dadas:
  $g : \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^1
  Supor que O é valor regular de g e considerar a superfície (de dimensão $p - q$)

- **Problema:**
  São dadas:
  $g : \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^1
  Supor que O é valor regular de g e considerar a superfície (de dimensão $p - q$)
  $S = Z(g) \subset \Omega \subset \mathbf{R}^p$

- **Problema:**
  São dadas:
  $g : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^1
  Supor que O é valor regular de g e considerar a superfície (de dimensão $p - q$)
  $S = Z(g) \subset \Omega \subset \mathbf{R}^p$
  $f : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ de classe C^1

- **Problema:**
  São dadas:
  $g : \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^1
  Supor que O é valor regular de g e considerar a superfície (de dimensão $p - q$)
  $S = Z(g) \subset \Omega \subset \mathbf{R}^p$
  $f : \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ de classe C^1
  Perguntas:
  - $f|_S$ tem mínimo [máximo] em S?

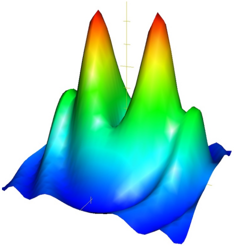
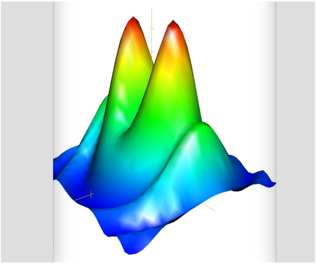
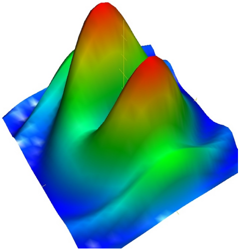
- **Problema:**
  São dadas:
  $g : \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ de classe C^1
  Supor que O é valor regular de g e considerar a superfície (de dimensão $p - q$)
  $S = Z(g) \subset \Omega \subset \mathbf{R}^p$
  $f : \Omega = \Omega^{\circ} \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ de classe C^1
  Perguntas:
  • $f|_S$ tem mínimo [máximo] em S?
  • No caso em que $f|_S$ tem mínimo [máximo] num ponto $\overline{x} \in S$, como obter $\overline{x}$?

Máximos e Mínimos Condicionado

Exemplo 1

- **Exemplo 1:** $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

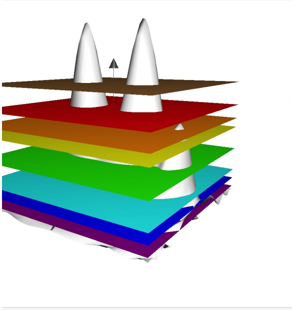
- **Gráfico de f:**

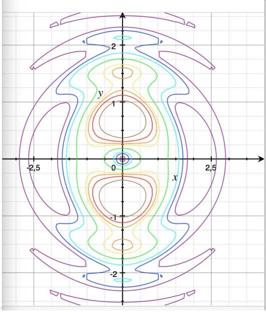




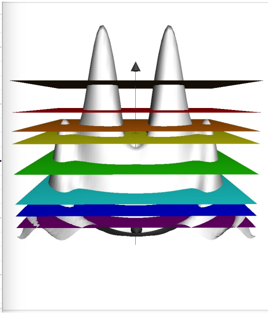
Máximos e Mínimos Condicionado

Exemplo 1

- **Curvas de nível de f:**



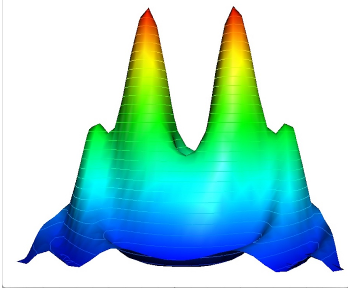


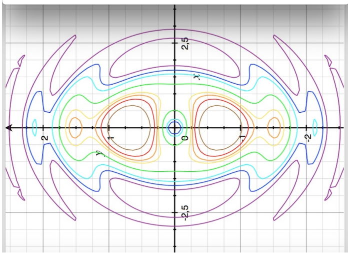


Máximos e Mínimos Condicionado

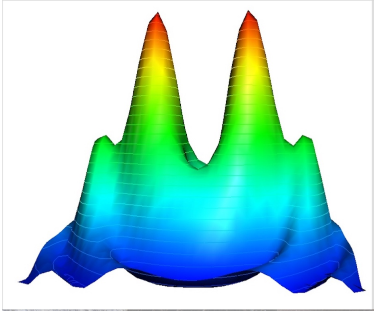
Exemplo 1

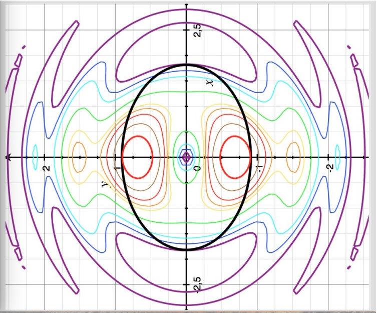
- **Curvas de nível de f:**





- **Curvas de nível de f e 1-superfície $S = Z(g)$ = uma elipse $\subset \mathbb{R}^2$:**

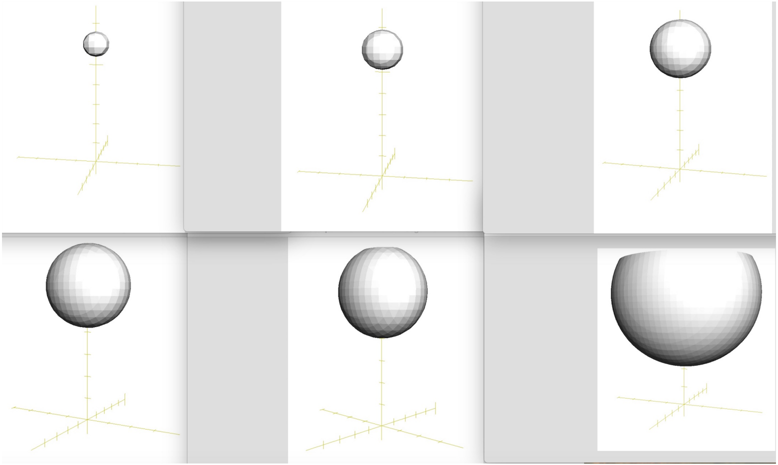




Atenção: Algumas curvas de nível de f tangenciam S (no caso, uma de nível "vermelho" e uma de nível "roxo").
Pontos de tangência no nível "vermelho" são pontos de máximo de $f|_S$.
Pontos de tangência no nível "roxo" são pontos de máximo de $f|_S$.

- **Exemplo 2:** $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$
  - $P = (0, 0, 3)$ **e** $f(x) = d(x, P)$

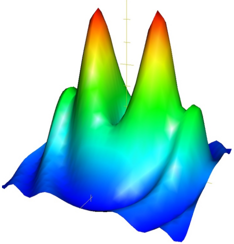
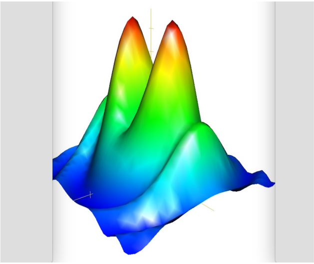
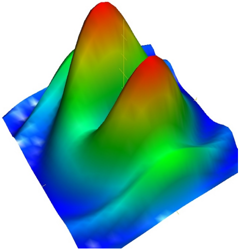
- **Superfícies de nível de f:**



Máximos e Mínimos Condicionado

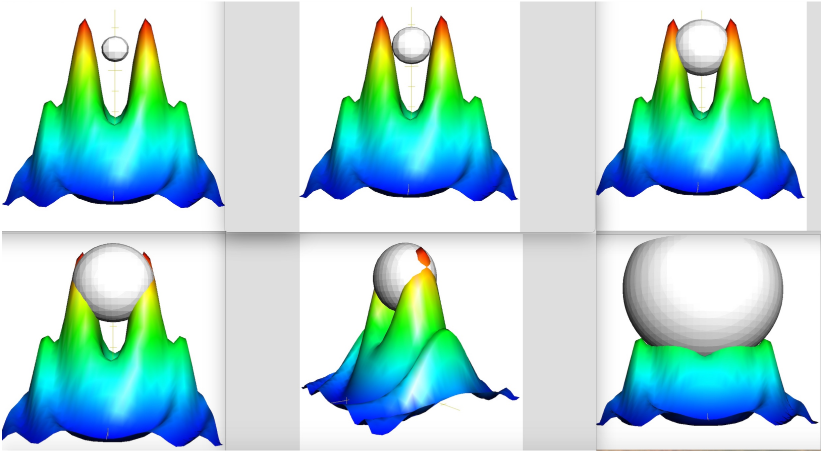
Exemplo 2

- 2-**superfície** $S = Z(g) \subset \mathbf{R}^3$:

Exemplo 2

- **Curvas de nível de f e 2-superfície $S = Z(g) \subset \mathbf{R}^3$:**



Atenção: Algumas superfícies de nível de f tangenciam S (no caso, a do meio superior, a primeira (ou segunda) inferior, e a terceira inferior, por exemplo).

- **Pontos críticos de $f|_S$:**

Os pontos críticos de $f|_S$, entre eles os de máximo e os de mínimo (locais e globais), quando existem, são pontos $\overline{x} \in S$ para os quais existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbf{R}$ tais que:

$$\nabla f(\overline{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\overline{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\overline{x}) + \cdots + \lambda_q \nabla g_q(\overline{x}),$$

onde $g = (g_1, g_2, \ldots, g_q) : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ e $S = Z(g)$, com O valor regular de g.

• **Pontos críticos de $f|_S$:**

Os pontos críticos de $f|_S$, entre eles os de máximo e os de mínimo (locais e globais), quando existem, são pontos $\overline{x} \in S$ para os quais existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbf{R}$ tais que:

$$\nabla f(\overline{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\overline{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\overline{x}) + \cdots + \lambda_q \nabla g_q(\overline{x}),$$

onde $g = (g_1, g_2, \ldots, g_q) : \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ e $S = Z(g)$, com O valor regular de g.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ são chamados de Multiplicadores de Lagrange.