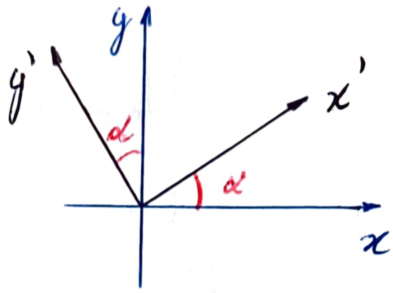
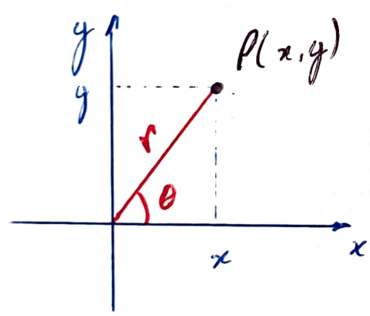
Rotação

Uma rotação é uma mudança de coordenadas ortogonais obtida pela rotação de um ângulo α, ao redor de um eixo definido.

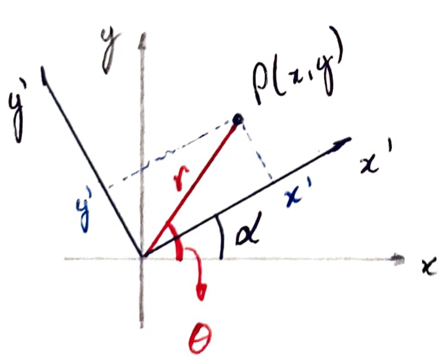


Podemos encontrar as coordenadas (x', y') de um ponto com coordenadas (x, y). Todo ponto no plano xOy pode ser representado pela distância do ponto até a origem r e o ângulo formado com eixo x e θ, e neste caso tem-se a relação:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

e no sistema de coordenadas $x'y'$:



$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta - \alpha) \\ y' = r\,\mathrm{sen}\,(\theta - \alpha) \end{cases}$$

Identidades trigonométricas:

- $\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$
- $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\operatorname{sen}(b)$

Com isso, de maneira equivalente, temos:

$$x' = r(\cos\theta \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha)$$

$$x' = \underbrace{r\cos\theta}_{x} \cdot \cos\alpha + \underbrace{r\operatorname{sen}\theta}_{y} \operatorname{sen}\alpha$$

$$y' = r(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha - \cos\theta\operatorname{sen}\alpha)$$

$$y' = \underbrace{r\operatorname{sen}\theta}_{y}\cos\alpha - \underbrace{r\cos\theta}_{x}\operatorname{sen}\alpha$$

ou seja,

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

escrevendo x e y em termos de x' e y', obtemos

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Exemplo:

Faça uma mudança no sistema de coordenadas para a ~~faça a rotação da~~ equação $xy = 1$, ~~por~~ utilizando um ângulo de $\pi/4$.

Solução:

- $x = x' \cos(\pi/4) - y' \operatorname{sen}(\pi/4)$

$$x = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $y = x' \operatorname{sen}(\pi/4) + y' \cos(\pi/4)$

$$y = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \cdot y = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right) = 1$$

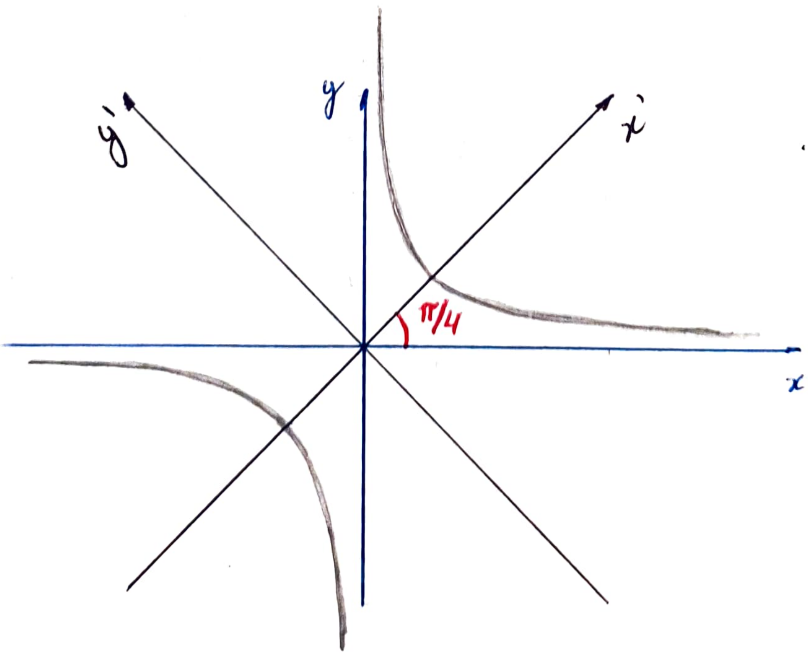
$$* \quad \frac{\sqrt{2}}{2} x' \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} x' \frac{\sqrt{2}}{2} y' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \frac{\sqrt{2}}{2} y'$$

$$\frac{2}{4} x'^2 + \cancel{\frac{2}{4} x'y'} - \cancel{\frac{2}{4} y'x'} - \frac{2}{4} y'^2$$

$$\boxed{\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1}$$

$$\boxed{\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1}$$

Hipérbole no sistema $x'Oy'$



$\therefore$ A equação $x \cdot y = 1$, rotacionada por um ângulo de $\pi/4$ é

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$