UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 5940 – DINÂMICA ESTRUTURAL

Sistemas Discretos com N GDL
Resposta Livre

Objetivos

Objetivo principal desta aula é apresentar e discutir a resposta livre e forçada harmônica de sistemas discretos possuindo múltiplos graus de liberdade
Serão cobertos os seguintes principais tópicos:

- Resposta livre
- Resposta forçada harmônica
- Resposta forçada harmônica – conceito de ***FRF***
- Propriedades da FRF

Bibliografia:

1 Clough, R. e Penzien, J., Dynamics of Structures, McGraw Hill, 1993.
2 Craig, R., Kurdila, A., Fundamentals of Structural Dynamics, John wiley, 2006.

PARTE I

SISTEMAS COM N GDL

RESPOSTA LIVRE

Sistemas com N GDL – Resposta Livre

O modelo de N GDL obedece à seguinte equação de movimento:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{f(t)\}$$

Matrizes simétricas de ordem N !

Onde:

- $[M]$ – Matriz de massa
- $[K]$ – Matriz de rigidez
- $[C]$ – Matriz de amortecimento
- $\{f(t)\}$ – Vetor de forças externas
- $\{u\}$ – vetor de deslocamentos físicos

Cont. ...

Para o estudo da vibração livre não amortecida: $\begin{cases} \{f(t)\} = \{0\} \\ [C] = [0] \end{cases}$

E com isto temos:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

E a solução desta última equação para condições iniciais não nulas é dada por:

$$\{u(t)\} = \{\phi\}e^{st}$$

Onde $\{\phi\}$ é um vetor de ordem N, de valores ***independentes da variável tempo*** e s um ***número complexo***. Substituição desta solução na equação do movimento livre dá

$$[[K] + s^2[M]]\{\phi\}e^{st} = \{0\}$$

Cont. ...

Como $e^{st} \neq 0$ esta última equação pode ainda ser escrita como:

$$\boxed{[[K] - \lambda[M]]\{\phi\} = \{0\}}$$

$\lambda = -s^2$

Que na verdade constitui-se num sistema homogêneo do tipo: $[A]\{x\} = \{0\}$

Rearranjando de forma mais conveniente temos:

$$\boxed{[K]\{\phi\} = \lambda[M]\{\phi\}}$$

$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$

Ou ainda:

$$\boxed{[M]^{-1}[K]\{\phi\} = \lambda\{\phi\}}$$

$[D]\{x\} = \lambda\{x\}$

matriz dinâmica

Cont. ...

Importantíssimo:

As variáveis λ e $\{\phi\}$ são denominadas de *autovalores* e *autovetores* do problema da vibração livre não amortecida. Estes parâmetros estão diretamente relacionados Com as propriedades físicas do sistema, as *freqüências naturais não amortecidas* e os chamados *modos normais ou naturais de vibração* ! Portanto, a determinação Destas propriedades fundamentais do sistema de N GDL reside na solução de um *autoproblema generalizado* (*generalized eigenproblem*) ! $[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$

Retomemos a equação:

$$\boxed{[[K] - \lambda[M]]\{\phi\} = \{0\}}$$

Esta última equação possui solução não trivial se e somente se:

$$\boxed{\left|[K] - \lambda[M]\right| = \{0\}}$$

Cont. ...

Na forma polinomial:

$$\sum_{p=1}^{N} a_p \lambda^p = 0$$

Onde os coeficientes ***a_1 ... a_N*** dependem das características de massa e rigidez. Esta última equação (ou a anterior) denomina-se ***equação característica*** do sistema com N GDL e suas raízes são na verdade os autovalores do sistema em estudo. O *p-ésimo* autovalor do sistema relaciona-se com a correspondente freqüência natural não amortecida através da seguinte relação

$$\omega_{n_p} = \pm i\sqrt{\lambda_p}$$

Onde: $i = \sqrt{-1}$

Cont. ...

Determinamos assim o chamado **Modelo Modal** do sistema conservativo:

$$[\omega_n] = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_N} \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1, \{\phi\}_2, \ldots, \{\phi\}_N] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{1N} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

Relações de Ortogonalidade

São relações importantes entre modos normais de um mesmo sistema. Escrevemos inicialmente para modos *r* e *s* distintos

$$[[K]-\lambda_i[M]]\{\phi\}_i=\{0\}\ \begin{cases}[[K]-\omega_r^2[M]]\{\phi\}_r=\{0\} & \textbf{r-ésimo modo}\\ [[K]-\omega_s^2[M]]\{\phi\}_s=\{0\} & \textbf{s-ésimo modo}\end{cases}$$

Agora, pré-multiplicamos a primeira equação por $\{\phi\}_s^T$ e pós-multiplicamos a transposta da segunda por $\{\phi\}_r$ obtendo assim

$$\{\phi\}_s^T[[K]-\omega_r^2[M]]\{\phi\}_r=\{0\} \qquad \textbf{r-ésimo modo}$$

$$\{\phi\}_s^T[[K]-\omega_s^2[M]]\{\phi\}_r=\{0\} \qquad \textbf{s-ésimo modo}$$

Cont. ...

Estas duas equações podem ser combinadas fornecendo:

$$\boxed{(\omega_r^2 - \omega_s^2)\{\phi\}_s^T[M]\{\phi\}_r = \{0\}}$$

E se agora tivermos $\omega_r \neq \omega_s$ esta última equação será satisfeita se e somente se:

$$\{\phi\}_s^T[M]\{\phi\}_r = 0 \qquad r \neq s$$

$$\{\phi\}_s^T[K]\{\phi\}_r = 0 \qquad r \neq s$$

Importantíssimo:

Estas duas relações matriciais acima constituem-se nas ***relações de ortogonalidade*** entre os modos normais de vibração em relação às matrizes de massa e rigidez, respectivamente !

Cont. ...

Para o caso especial onde $\omega_r = \omega_s$ temos:

$$\{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_r = M_r \qquad r = s$$

$$\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_r = K_r \qquad r = s$$

Estas duas últimas expressões definem os valores da massa modal $\boldsymbol{M_r}$ e rigidez modal $\boldsymbol{K_r}$ (ou massa e rigidez generalizada) associadas ao ***r-ésimo*** modo normal de vibrar do sistema com N GDL não amortecido valendo a seguinte relação:

$$\omega_r^2 = \frac{\{\phi\}_r^T [K] \{\phi\}_r}{\{\phi\}_r^T [M] \{\phi\}_r} = \frac{K_r}{M_r}$$

Cont. ...

Generalizando em relação à matriz modal **[*Φ*]**:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = diag[M_r]$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = diag[K_r]$$

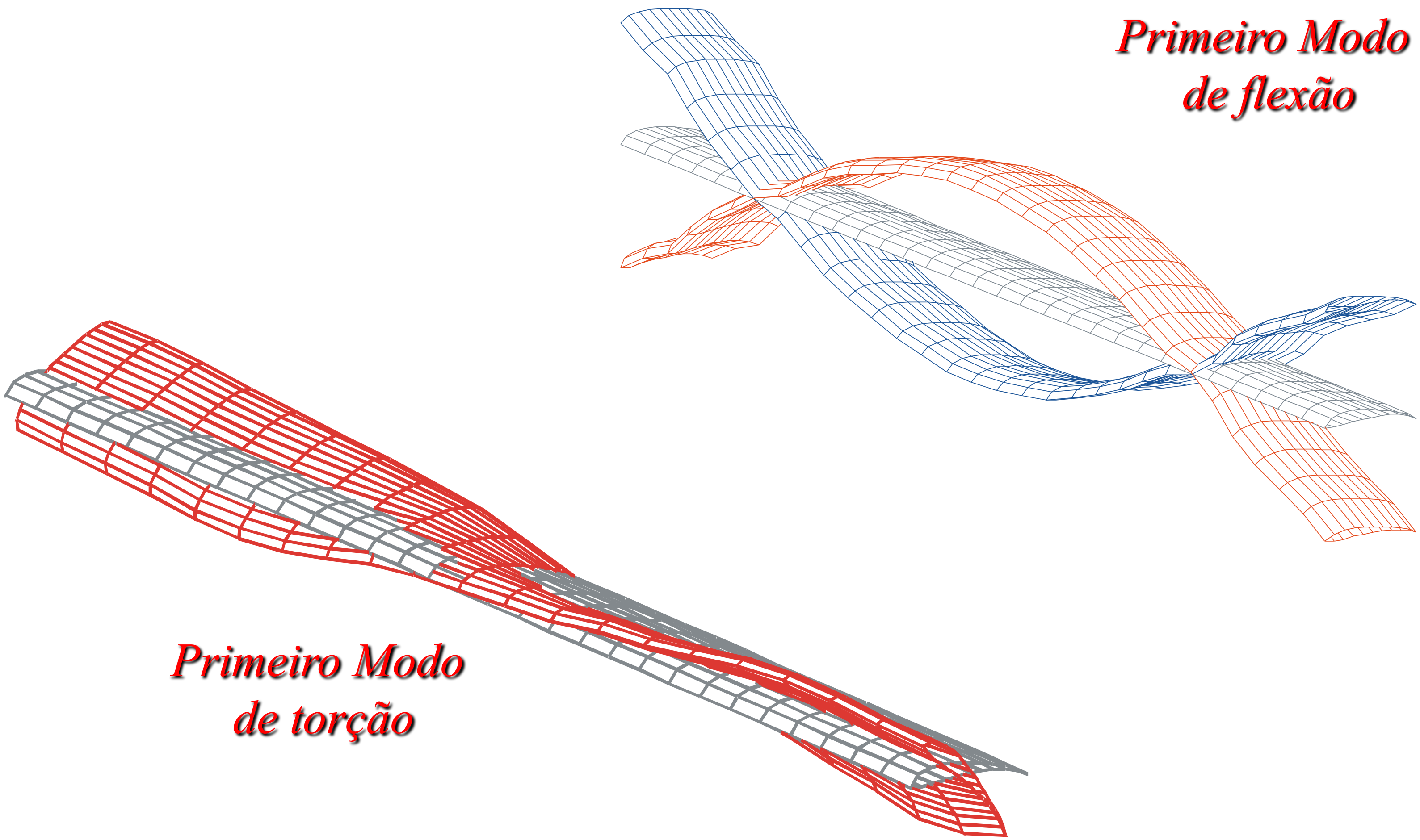
E os valores da massa modal podem ser usado para se obter os chamados modos normais normalizados, da seguinte forma

$$\{\psi\}_r = \frac{1}{\sqrt{M_r}}\{\phi\}_r \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &[\Psi]^T[M][\Psi] = [I] \\ &[\Psi]^T[K][\Psi] = [\omega_r^2] \end{aligned}$$

Vejamos alguns exemplos !

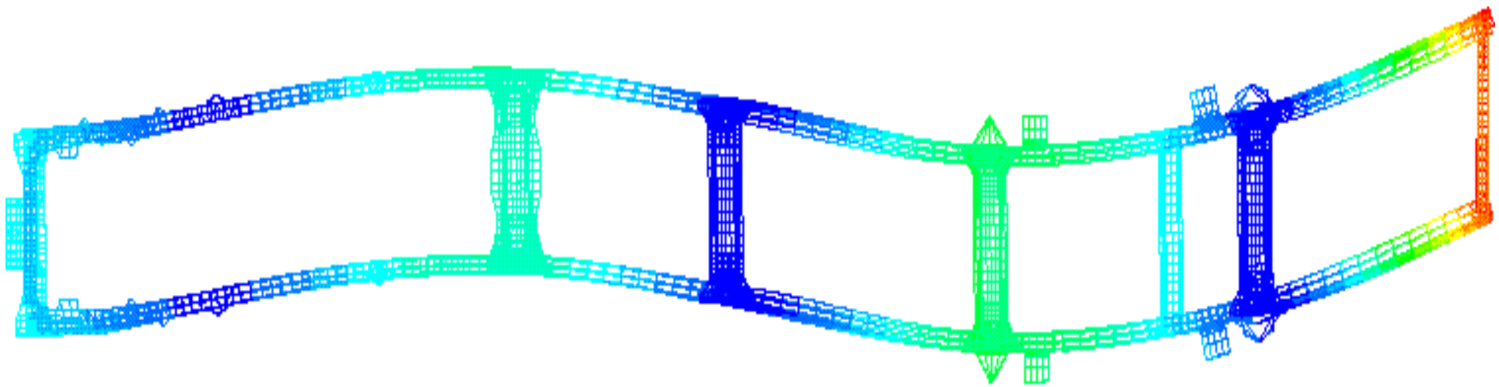
Cont. ...

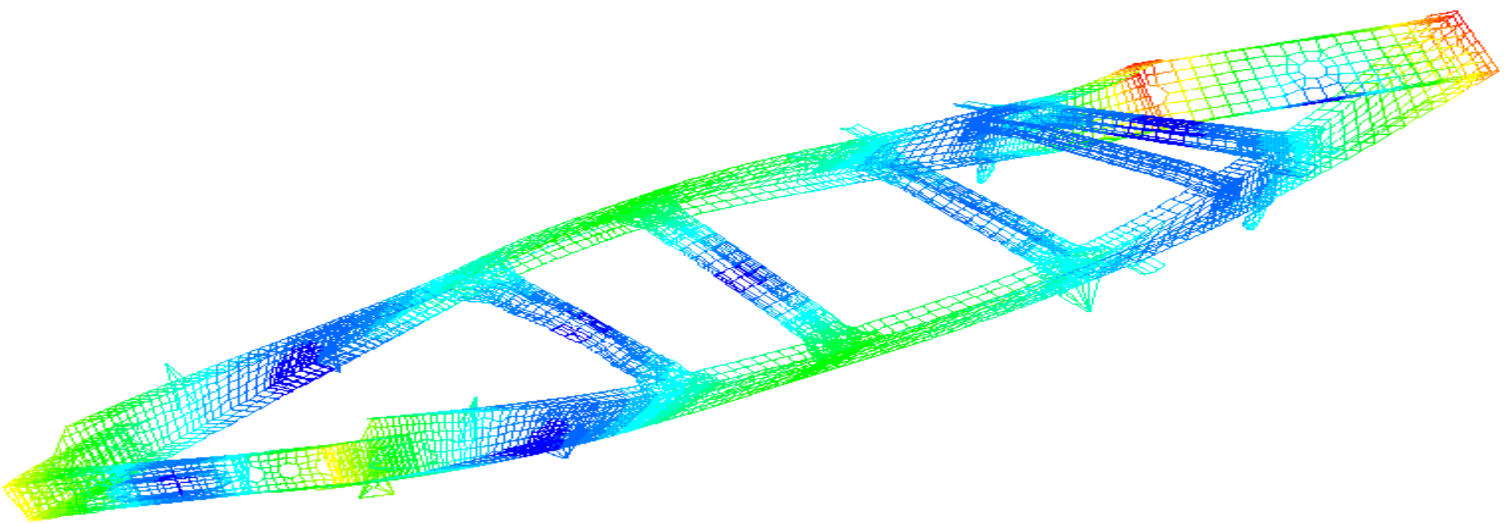
Dois modos de vibrar de uma estrutura aeronáutica



Cont. ...

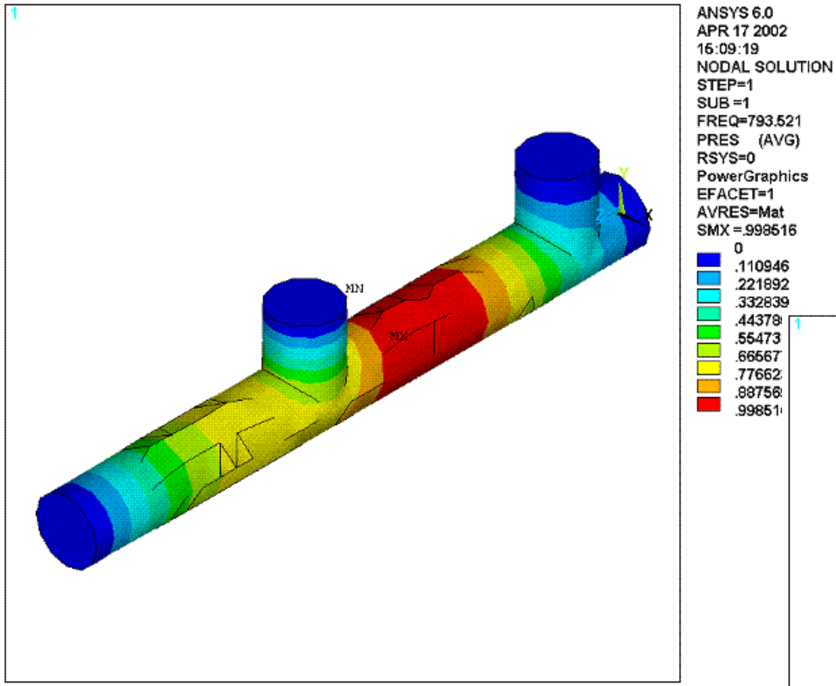
Modos de flexão lateral e flexo-torção em chassi de veículo

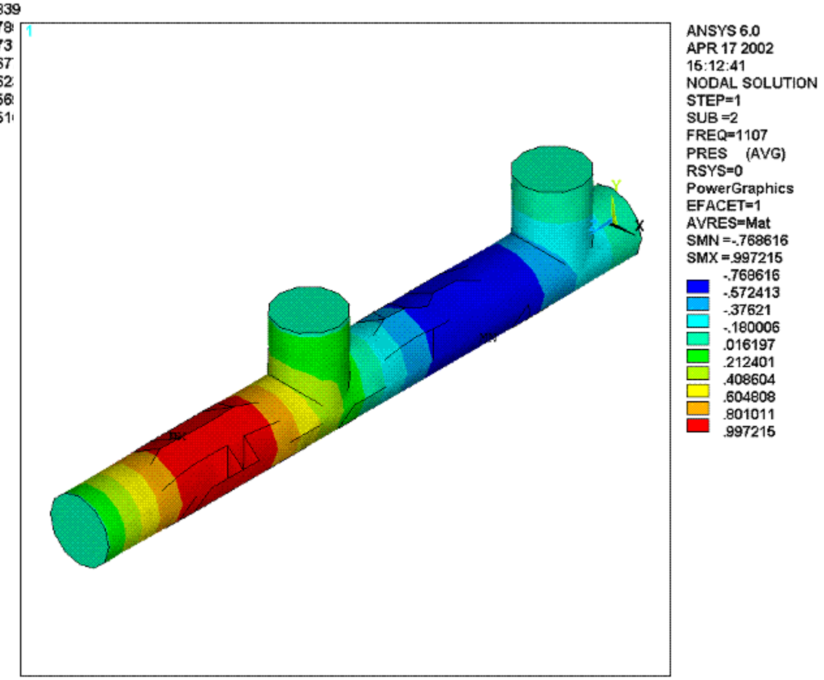




Cont. ...

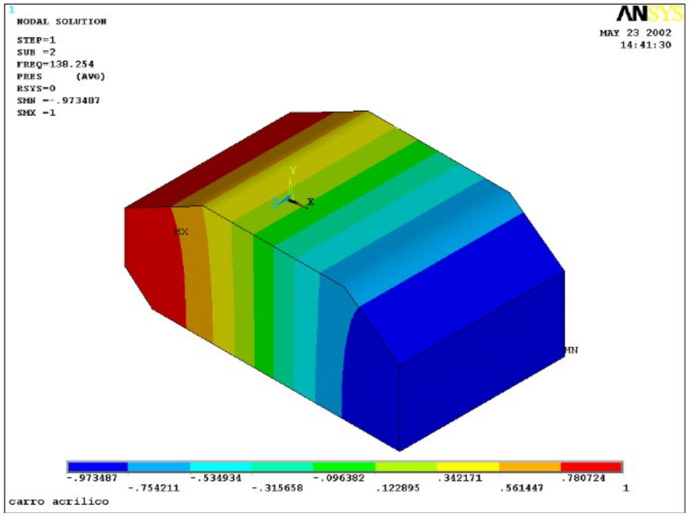
Modos acústicos em filtros do tipo “passa-alta”

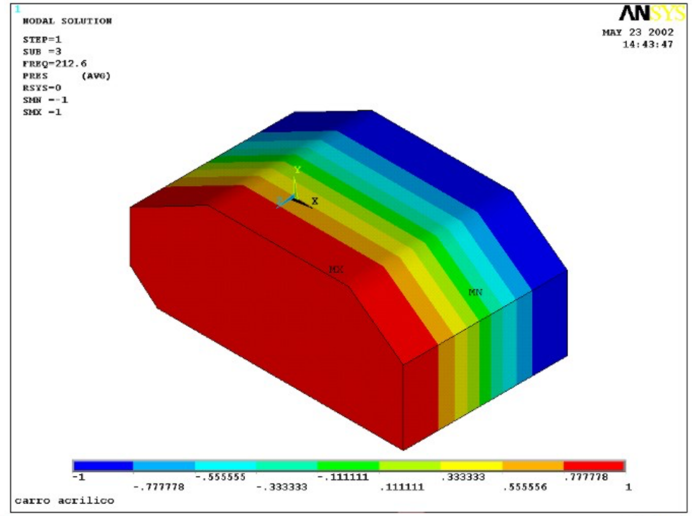


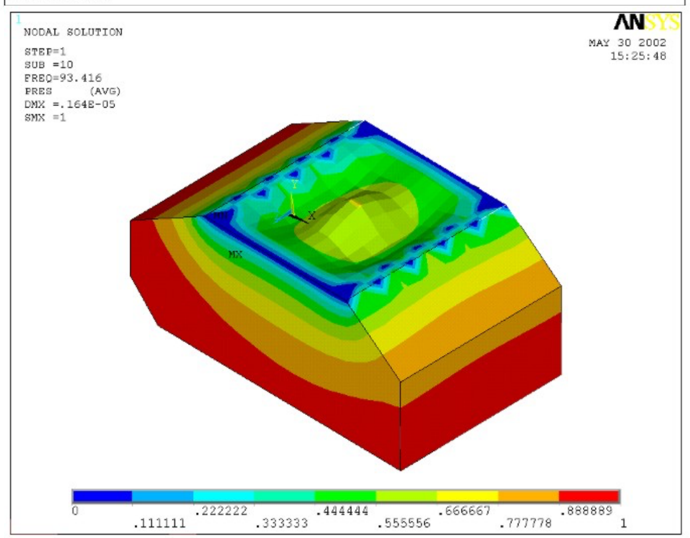


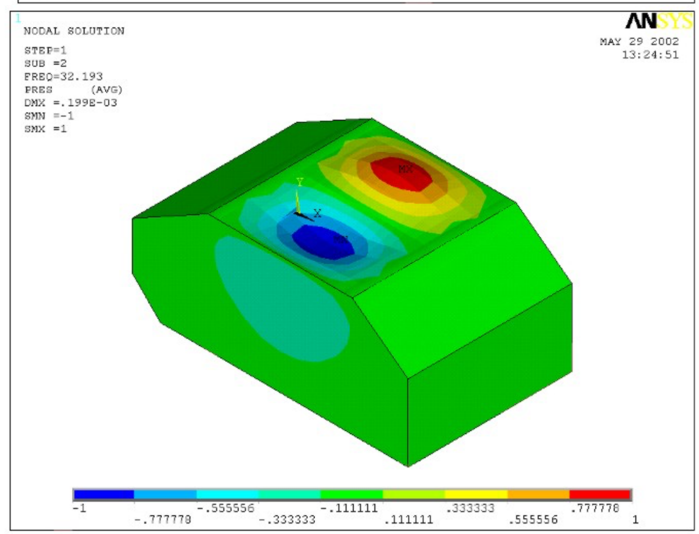
Cont. ...

Modos acústicos e vibroacústicos em cavidades









Cont. ...

Na verdade o que fizemos até aqui foi apenas determinar o modelo modal do sistema. Vamos agora escrever a solução para o movimento livre conservativo. Retomemos a solução apresentada anteriormente

$$\boxed{\{u(t)\} = \{\phi\}e^{st}}$$

$$\lambda_r = -s_r^2$$

$$\boxed{\{u(t)\}_r = \left(a_r e^{\sqrt{-\lambda_r}\,t} + b_r e^{-\sqrt{-\lambda_r}\,t}\right)\{\phi\}_r}$$

Ou ainda

$$\omega_{n_r} = \pm i\sqrt{\lambda_r}$$

$$\boxed{\{u(t)\}_r = \left(a_r e^{i\omega_{n_r} t} + b_r e^{-i\omega_{n_r} t}\right)\{\phi\}_r}$$

a_r e ***b_r*** dependem das CIs !

Cont. ...

Estas duas últimas expressões revelam que a resposta dinâmica do sistema é controlada pela parcela dependente da variável tempo, que por sua vez depende do autovalor λ_r e que por sua vez depende das características de **[*M*]** e **[*K*]** ! Se ambas forem positivas definidas, todos os autovalores serão ***positivos e não nulos*** e os correspondentes autovetores serão **reais** !

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{N} (a_r e^{i\omega_r t} + \bar{a}_r e^{-i\omega_r t})\{\phi\}_r$$

Esta última equação pode ser escrita como:

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{N} \{\phi\}_r \eta_r$$

Cont. ...

Ou de forma compacta:

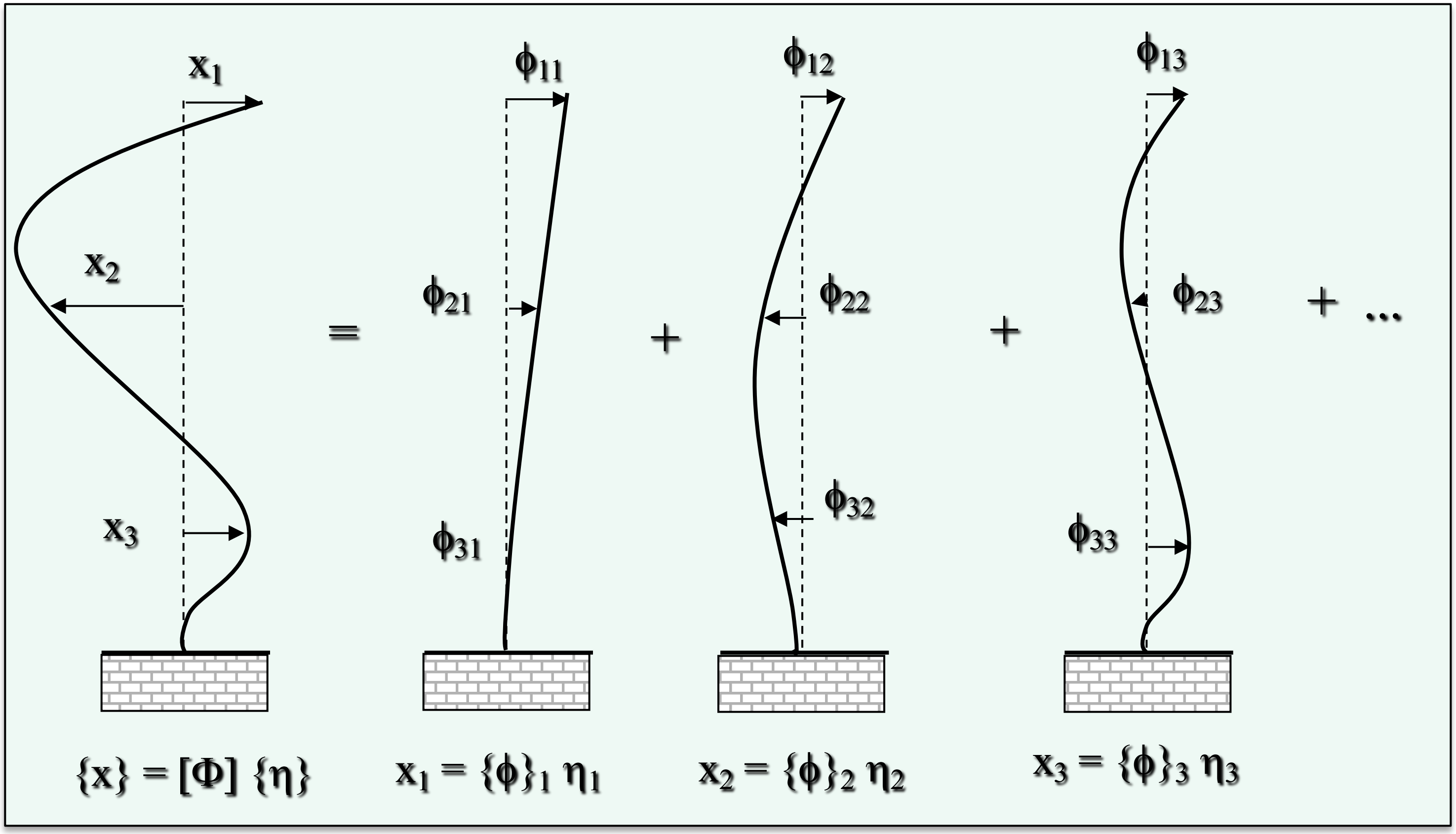
$$\{u\} = [\Phi]\{\eta\}$$

resposta livre

base modal

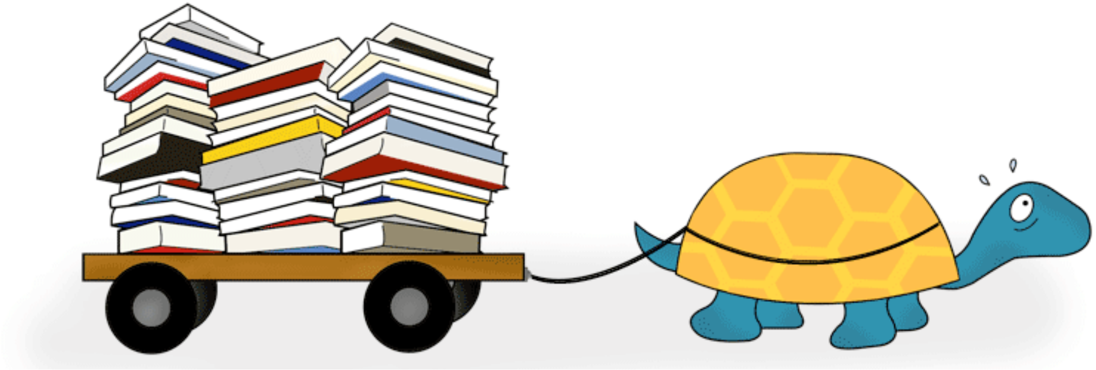
coordenadas modais

SUPERPOSIÇAO MODAL



FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 5940 – DINÂMICA ESTRUTURAL

Sistemas Discretos com N GDL
Resposta Forçada Harmônica

PARTE II

SISTEMAS COM N GDL

RESPOSTA FORÇADA

- Resposta harmônica – conceito de ***FRF***
- Conceito de anti-ressonância

Sistemas com N GDL – Resposta Forçada Harmônica

Neste caso voltamos a equação:

$$\boxed{[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{f_0\}e^{i\omega t}}$$

Onde ω é a freqüência de excitação harmônica e $\{f_0\}$ o vetor de amplitudes. Como solução adotamos a mesma usada no caso da vibração livre (por hipótese !)

$$\boxed{\{u\}=[\Phi]\{\eta\}}$$

Substituição na equação acima fornece:

$$\boxed{[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\}+[C][\Phi]\{\dot{\eta}\}+[K][\Phi]\{\eta\}=\{f_0\}e^{i\omega t}}$$

Cont. ...

Pré-multiplicando esta última por $[\Phi]^T$:

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{\eta}\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{\eta\} = [\Phi]^T\{f_0\}e^{i\omega t}$$

$[\Phi]^T[M][\Phi]$	$[\Phi]^T[C][\Phi]$	$[\Phi]^T[K][\Phi]$	$[\Phi]^T\{f_0\}$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$[m_r]$	?	$[k_r]$	$\{\mu\}$
massa modal	***amort. modal***	***rigidez modal***	***excitação modal***

Questão básica :

A *mesma* relação de ortogonalidade baseada no modelo modal do sistema *não* amortecido que *diagonaliza* as matrizes de massa e rigidez seria capaz de *diagonalizar* a *matriz de amortecimento* ?

Resp.: Se e somente se [C] for combinação entre [M] e [K] !

Cont. ...

Neste caso:

$$[C] = [M]\sum_{b} a_b\left[[M]^{-1}[K]\right]^{b}$$

Caughey, T.

E para o caso onde b = 0, 1 temos:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K]$$

Amortecimento de Rayleigh

Que é amplamente conhecido como ***amortecimento proporcional*** !

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = a_0[m_r] + a_1[k_r]$$

Cont. ...

Procedendo o desacoplamento obtemos agora um novo conjunto de equações:

$$[M_r]\{\ddot{\eta}\} + [C_r]\{\ddot{\eta}\} + [K_r]\{\eta\} = \{\mu\}\, e^{i\,\omega\, t}$$

Que agora constitui-se num *conjunto de equações desacopladas* na chamada *coordenada modal ou normal* η ! Para o *r*-ésimo modo de vibrar temos

$$\ddot{\eta}_r + 2\,\varsigma_r\,\omega_r\;\dot{\eta}_r + \omega_r^2\,\eta_r = \mu_r\, e^{i\,\omega\, t}$$

É importante notar que esta última equação é essencialmente a equação de um sistema de 01 GDL, somente que não mais expressa na coordenada física *u(t)* mas sim nas coordenadas modais *η(t)* ! Os parâmetros que aparecem nesta equação correspondem aos parâmetros modais associados ao modo *r* e são dados por:

Cont. ...

$$\varsigma_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r\, m_r}}$$

Fator de amortecimento modal

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$$

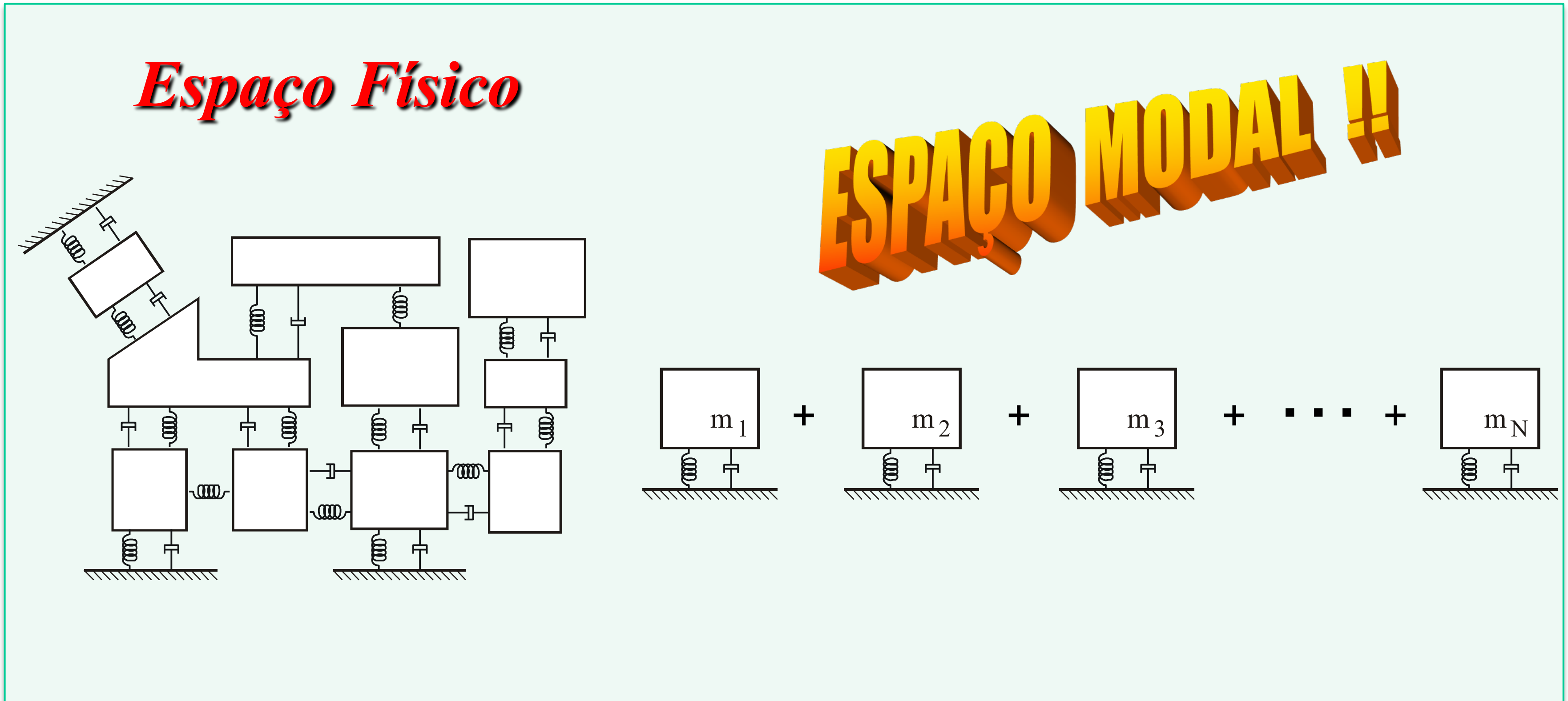
Freqüência natural não amortecida

$$\mu_r = \frac{1}{m_r}\{\phi\}_r^T\{f_0\}$$

Força de excitação modal

Cont. ...

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = f_0 e^{i\ \omega t} \qquad [M_r]\{\ddot{\eta}\} + [C_r]\{\ddot{\eta}\} + [K_r]\{\eta\} = \{\mu\}\ e^{i\,\omega\,t}$$



Cont. ...

Retomando agora a equação do r-ésimo modo temos:

$$\ddot{\eta}_r + 2\varsigma_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = \mu_r e^{i\omega t}$$

Cuja solução pode ser expressa como:

$$\eta_r(t) = Q_r e^{i\omega t}$$

Substituição desta última na equação anterior fornece o seguinte valor para a amplitude modal associada ao r-ésimo modo de vibrar do sistema

$$Q_r = \frac{\mu_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\,2\varsigma_r \omega_r \omega}$$

Cont. ...

E a solução nas coordenadas físicas {u} é dada usando o conceito de superposição modal ({u} = [Φ]{η}) ou seja:

$$u(t) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\phi\}_r \{\phi\}_r^T \{f_0\}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\ 2\zeta_r \omega_r \omega)}\ e^{i\omega t}$$

E desta última expressão podemos extrair a matriz de FRF do sistema

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^{N} \frac{\{\phi\}_r \{\phi\}_r^T}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\ 2\zeta_r \omega_r \omega)}$$

Cont. ...

O lado esquerdo da última equação pode ser expandido como

$$\left[H(\omega) \right] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

Sendo cada elemento $H_{ij}(\omega)$ da matriz de FRF definido como:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{U_i}{F_j}(\omega)$$

FRF de Receptância

Onde U_i (ω) representa a resposta de deslocamento na coordenada i e F_j (ω) a força aplicada na coordenada j, ambas no ***domínio da freqüência***

Cont. ...

Esta última matriz destaca dois tipos de FRF:

$$H_{ii}(\omega) = \frac{U_i}{F_i}(\omega) \quad i = j$$

Diagonal principal de [H(ω)] denominada FRF de ponto, excitação e resposta no mesmo ponto !

$$H_{ij}(\omega) = \frac{U_i}{F_i}(\omega) \quad i \neq j$$

Elementos fora da diagonal principal de [H(ω)], são as FRF de transferência, ou seja excitação e resposta em pontos distintos !

Princípio da Reciprocidade: $H_{ij}(\omega) = H_{ji}(\omega) \quad i \neq j$

Cont. ...

Se considerarmos, por exemplo um sistema possuindo apenas 02 GDL, escrevemos

$$H_{11}(\omega) = \frac{\phi_{11}\phi_{11}}{m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + i\,2\varsigma_1\omega_1\omega)} +$$

1º Modo

$$+ \frac{\phi_{21}\phi_{21}}{m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + i\,2\varsigma_2\omega_2\omega)}$$

2º Modo

$$H_{12}(\omega) = \frac{\phi_{11}\phi_{12}}{m_1(\omega_1^2 - \omega^2 + i\,2\varsigma_1\omega_1\omega)} +$$

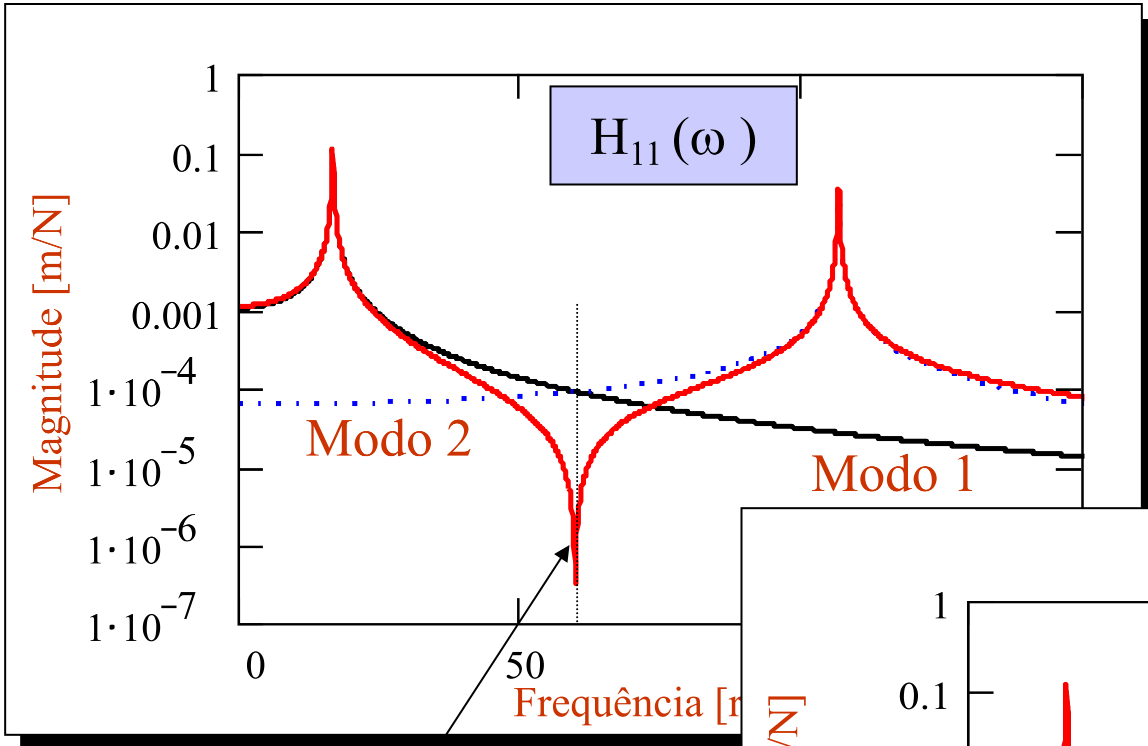
1º Modo

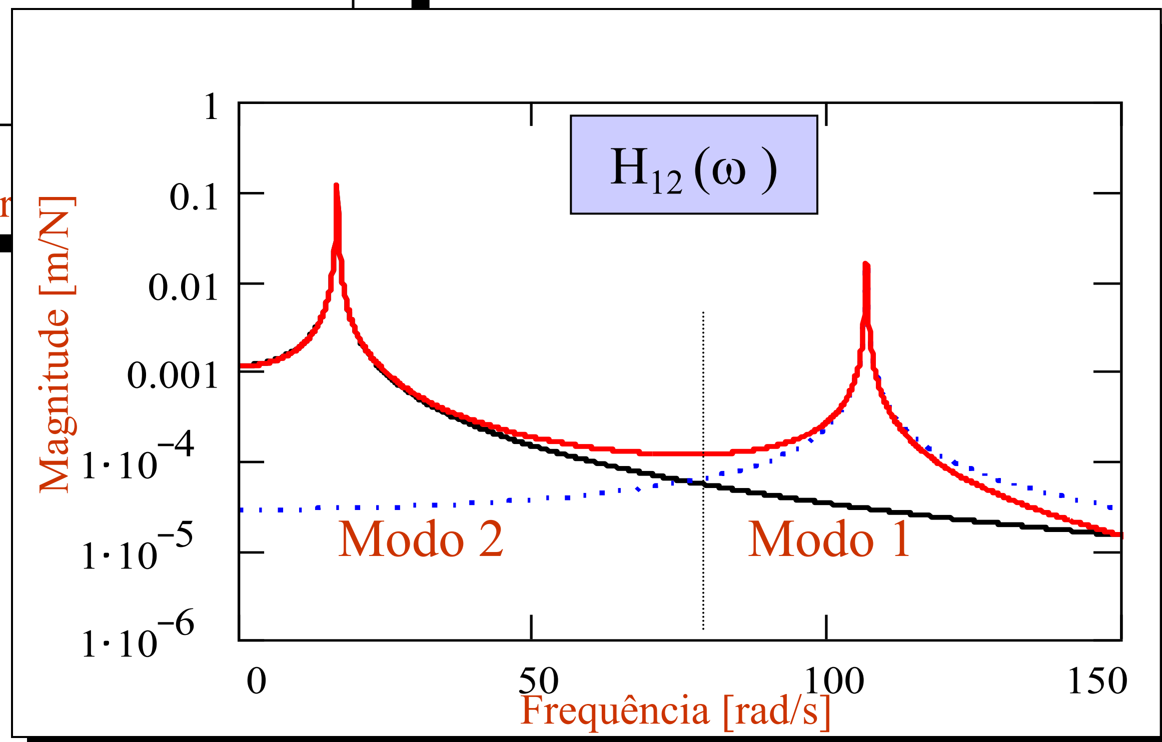
$$+ \frac{\phi_{21}\phi_{22}}{m_2(\omega_2^2 - \omega^2 + i\,2\varsigma_2\omega_2\omega)}$$

2º Modo

Cont. ...

FRF

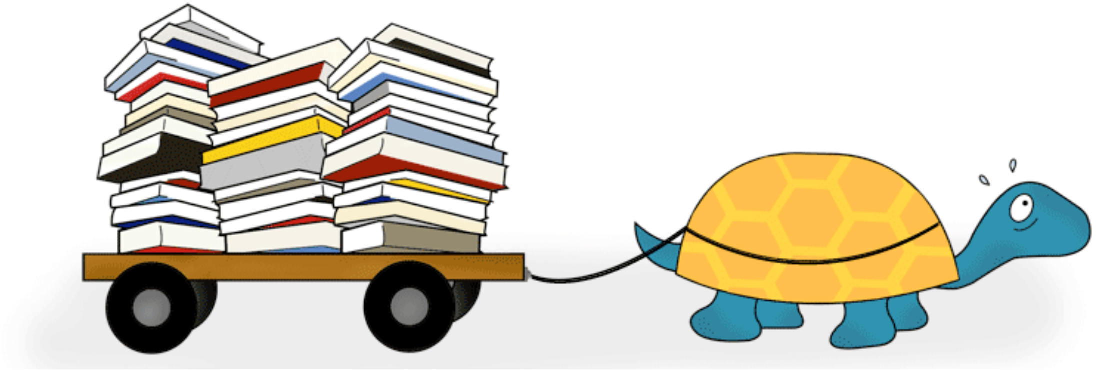




Anti-ressonância

FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 5940 – DINÂMICA ESTRUTURAL

Sistemas Discretos com N GDL
Resposta Forçada Harmônica
Amortecimento Viscoso Geral

PARTE III

SISTEMAS COM N GDL

RESPOSTA FORÇADA AMORTECIMENTO VISCOSO GERAL

- Resposta harmônica – conceito de ***FRF***
- Conceito de anti-ressonância

Sistemas com N GDL – Amortecimento Não Proporcional

Será considerado agora o caso onde a matriz de amortecimento [C] não satisfaz a condição de ortogonalidade em relação aos modos do sistema conservativo associado. Neste caso retomamos a equação para o movimento livre

$$\boxed{[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{0\}}$$

Tendo como solução

$$\boxed{\{u(t)\} = \{\bar{U}\}e^{\lambda t}}$$

A qual substituída na primeira resulta

$$\boxed{\left[[M]\lambda^2 + [C]\lambda + [K]\right]\{\bar{U}\} = \{0\}} \Rightarrow \boxed{[Q(\lambda)]\{\bar{U}\} = \{0\}}$$

Cont. ...

Uma forma alternativa de se formular o problema é inicialmente escrevermos um sistema de ordem 2N dado por

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{f\} \\ [M]\{\dot{u}\}-[M]\{\dot{u}\}=\{0\} \quad \text{(Equação auxiliar !)} \end{cases}$$

Estas duas últimas equações podem ser combinadas em um sistema de equações nas variáveis físicas da seguinte forma

$$\boxed{[A]\{\dot{x}\}+[B]\{x\}=\{P\}}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} [B]=\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \{x\}=\begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{\dot{u}\} \end{Bmatrix} \{P\}=\begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Cont. ...

Tendo em mente a definição de u(t), podemos escrever $\{u(t)\} = \{\bar{U}\}e^{\lambda t}$

$$\{x(t)\} = \left\{ \begin{matrix} \{\bar{U}\} \\ \lambda\{\bar{U}\} \end{matrix} \right\} e^{\lambda t} = \lambda\{\bar{X}\}e^{\lambda t}$$

$$\{\dot{x}(t)\} = \left\{ \begin{matrix} \lambda\{\bar{U}\} \\ \lambda^2\{\bar{U}\} \end{matrix} \right\} e^{\lambda t} = \lambda\{\bar{X}\}e^{\lambda t}$$

Para o movimento livre temos

$$[A]\{\dot{x}\} + [B]\{x\} = \{0\}$$

Cont. ...

Substituindo-se as relações para a solução temos:

$$\boxed{[\lambda[A] + [B]]\,\{\bar{X}\} = \{0\}}$$

a qual corresponde a um auto-problema generalizado contendo 2N autovalores ocorrendo em pares complexos conjugados (λ_r, λ^*_r) para o caso sub-amortecido. E, para os auto-vetores temos

$$\{\psi'\}_r = \begin{Bmatrix} \{\psi\}_r \\ \lambda_r\{\psi\}_r \end{Bmatrix}$$

$$\{\psi'^*\}_r = \begin{Bmatrix} \{\psi^*\}_r \\ \lambda_r^*\{\psi^*\}_r \end{Bmatrix}$$

E, como no caso anterior, a solução livre pode ser escrita

$$\boxed{\{x(t)\} = [\Psi']\{q(t)\}}$$

Cont. ...

Aplicando o conceito do desacoplamento ao sistema 2N temos

$$[\Psi']^T[A][\Psi']\{q(\dot{t})\} + [\Psi']^T[B][\Psi']\{q(t)\} = [\Psi']^T\{P_0\}e^{i\omega t}$$

Resultando em

$$[A_r]\{\dot{q}(t)\} + [B_r]\{q(t)\} = \{\tau\}e^{i\omega t}$$

E, para o movimento livre amortecido

$$[A_r]\{\dot{q}(t)\} + [B_r]\{q(t)\} = \{0\}$$

Esta última equação nos oferece um sistema homogêneo de 2N equações desacopladas. Cada uma delas possui solução da forma

$$q_r(t) = \bar{Q}_r e^{\lambda_r t}$$

Depende das CIs

Cont. ...

E, uma vez obtidas as soluções individuais, estas podem ser combinadas em

$$\boxed{\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\psi'\}_r \bar{Q}_r e^{\lambda_r t}}$$

E, da solução livre amortecida podemos obter as seguinte condições de ortogonaliade

$$(\lambda_r + \lambda_p)\{\psi\}_p^T[M]\{\psi\}_r + \{\psi\}_p^T[C]\{\psi\}_r = 0$$

$$\lambda_r \lambda_p \{\psi\}_p^T[M]\{\psi\}_r - \{\psi\}_p^T[K]\{\psi\}_r = 0$$

Onde *r* e *p* representam modos distintos !

Cont. ...

Se r e p representarem um par complexo conjugado, temos

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\{\psi^*\}_r^T[C]\{\psi\}_r}{\{\psi^*\}_r^T[M]\{\psi\}_r} &= \frac{C_r}{M_r} = 2\omega_r\zeta_r \\[2em] \frac{\{\psi^*\}_r^T[K]\{\psi\}_r}{\{\psi^*\}_r^T[M]\{\psi\}_r} &= \frac{K_r}{M_r} = \omega_r^2 \end{aligned}}$$

Para estudarmos a resposta forçada harmônica, voltamos à equação não homogênea

$$[A]\{\dot{x}\} + [B]\{x\} = \{P\}$$

$$\{P\} = \{P_0\}e^{i\omega t}$$

$$\Longrightarrow \{P_0\} = \left\{ \begin{matrix} \{f_0\} \\ \{0\} \end{matrix} \right\}$$

Cont. ...

Aplicando novamente o desacoplamento modal, com condições iniciais nulas

$$[\Psi']^T[A][\Psi']\{\dot{q}(t)\} + [\Psi']^T[B][\Psi']\{q(t)\} = \underbrace{[\Psi']^T\{P_0\}}e^{i\omega t}$$

$$[A_r]\{\dot{q}(t)\} + [B_r]\{q(t)\} = \{\Upsilon_0\}e^{i\omega t}$$

onde $[A_r]$ e $[B_r]$ são matrizes quadradas e diagonais (2N). Temos agora 2N equações desacopladas e não homogêneas e para o r-ésimo modo de vibrar temos

$$\dot{q}_r(t) - \lambda_r q_r(t) = \Upsilon_r e^{i\omega t}$$

ou

$$\dot{q}_r(t) - \lambda_r q_r(t) = \frac{1}{a_r}\{\Psi'\}_r^T e^{i\omega t} \qquad \lambda_r = -\frac{b_r}{a_r}$$

Cont. ...

Como solução escrevemos

$$\{q(t)\} = \{\bar{Q}\}e^{i\omega t}$$

E, a amplitude modal do r-ésimo modo é dada por

$$\bar{Q}_r = \left(\frac{1}{i\omega - \lambda_r}\right)\frac{1}{a_r}\{\Psi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{f_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

E a solução completa fica então

$$\boxed{\{x(t)\} = \sum_{r=1}^{2N}\{\Psi'\}\left(\frac{1}{i\omega - \lambda_r}\right)\frac{1}{a_r}\{\Psi'\}_r^T \begin{Bmatrix} \{f_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}}$$

Cont. ...

E da solução geral extraímos a matriz de das FRF do sistema com amortecimento viscoso geral (não proporcional)

$$[H(\omega)] = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\{\Psi'\}_r \ \{\Psi'\}_r^T}{a_r(i\omega - \lambda_r)}$$

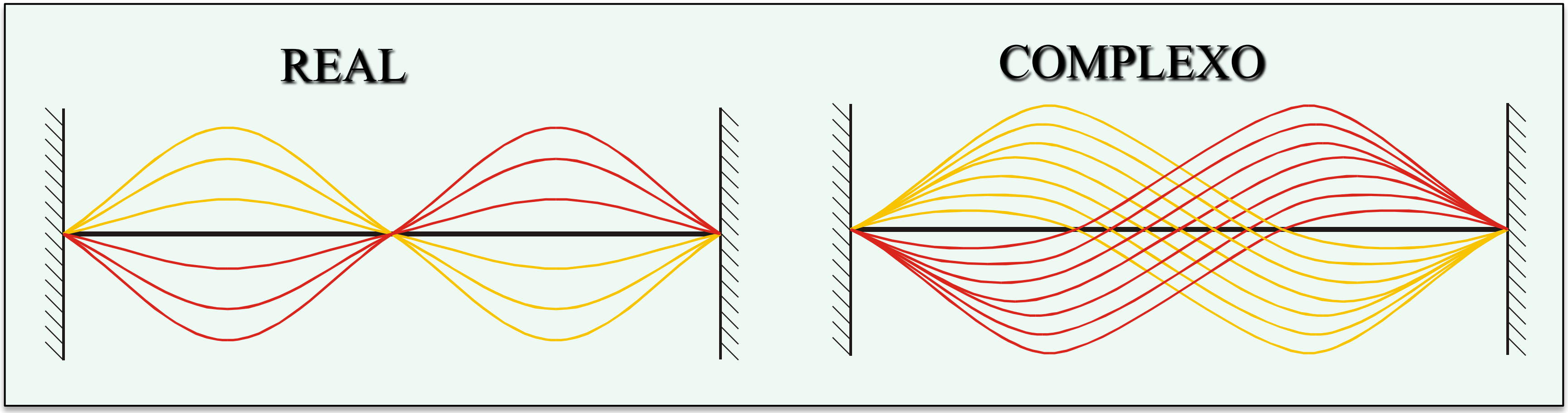
E um dos elementos desta matriz, $H_{jk}(\omega)$ pode ser escrito de duas formas

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{a_r(i\omega - \lambda_r)}$$

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{1}{a_r} \left(\frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\psi_{jr}^*\psi_{kr}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right)$$

Cont. ...

Modos reais versus modos complexos



FIM

Bom Estudo !