Questões 1)e) e 2)d)

1) $\lim_{x \to 100} 7 = 7$ → função constante.

①

2) d) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{x - 3}$ → ao substituir $x \to 3$, vejo que:

$\frac{2(3)^3 - 6(3)^2 + 3 - 3}{3 - 3} = \frac{2 \cdot 27 - 6 \cdot 9 + 0}{0} = \frac{54 - 54}{0} = \frac{0}{0}$ → tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Recorrendo à simplificação para retirar a indeterminação no numerador: deve-se realizar uma divisão de polinômios. $2x^3 - 6x^2 + x - 3$ → vejo que 3 é raiz, então:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 6x^2 + x - 3 & x - 3 \\
\underline{-2x^3 + 6x^2 } & \boxed{2x^2 + 1} \\
0 + x - 3 & \\
\underline{-x + 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

→ não tenho simplificar mais, por que a solução dessa expressão $2x^2 + 1$ está nos números complexos.

Voltando ao limite e substituindo:

$\lim_{x \to 3} \frac{(2x^2 + 1)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}} = \lim_{x \to 3} 2x^2 + 1 = 2(3)^2 + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = \boxed{19}$ //

Questão 3)e):

3) Sei que:

$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

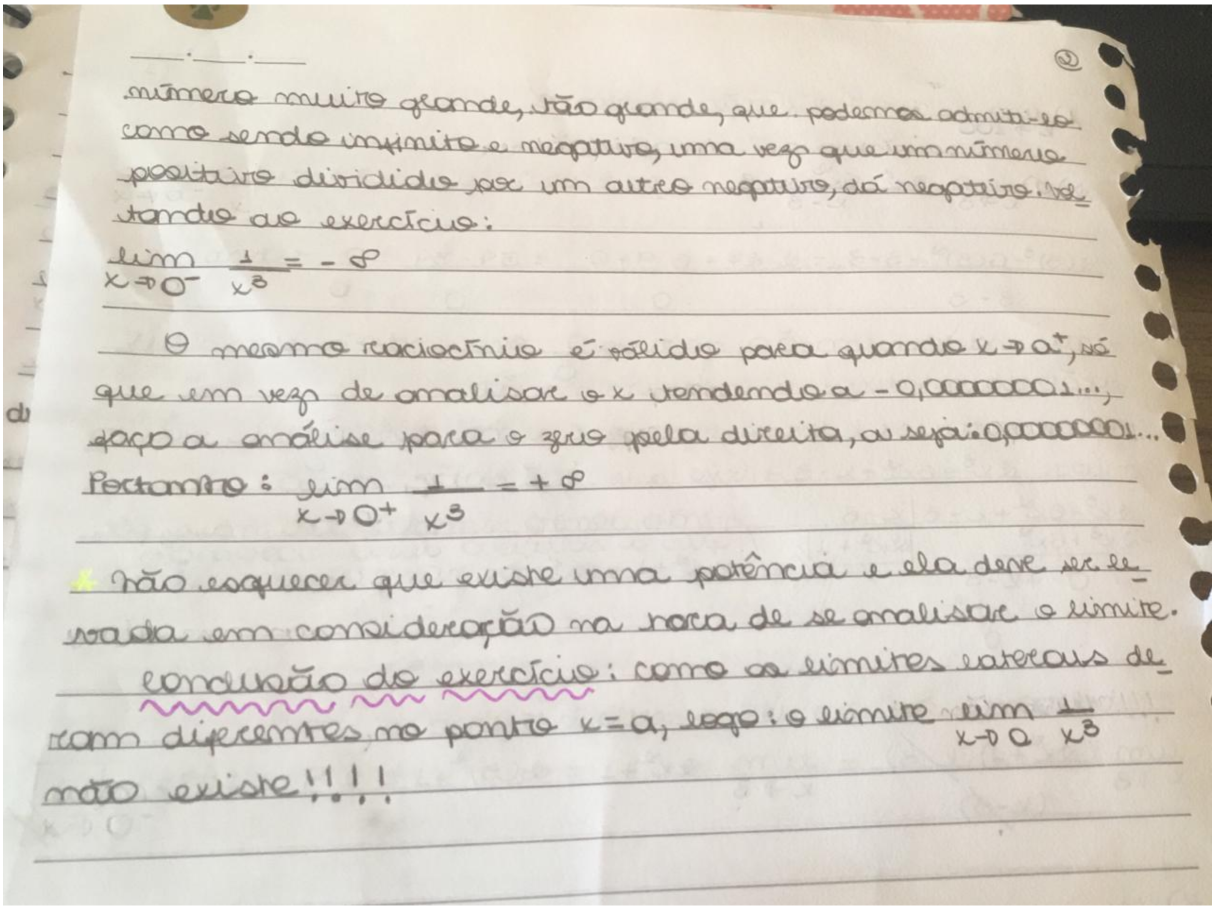
e) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $a = 0$ → analisando a reta real:

$-1 \quad a^- \quad 0 \quad a^+ \quad 1$

$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x^3}$

→ pensar que é um número menor que zero, porém maior que -1, por exemplo, $-0{,}0000000 1 \ldots$

Ao analisar o limite, vejo que tenho o número 1 no numerador dividido por um número muito pequeno (no denominador) → o resultado dessa divisão é um



②

número muito grande, tão grande, que podemos admiti-lo como sendo infinito e negativo, uma vez que um número positivo dividido por um outro negativo, dá negativo. Voltando ao exercício:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

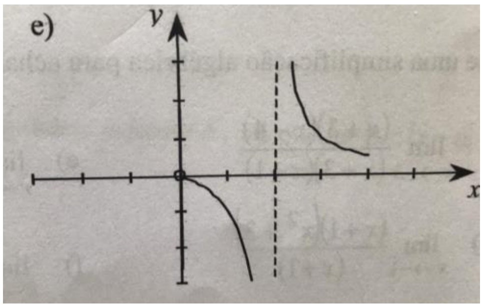
O mesmo raciocínio é válido para quando $x \to 0^+$, só que em vez de analisar o x tendendo a -0,0000001..., faço a análise para o zero pela direita, ou seja: 0,0000001...

Portanto: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

* não esquecer que existe uma potência e ela deve ser levada em consideração na hora de se analisar o limite.

Conclusão do exercício: como os limites laterais deram diferentes no ponto x = 0, logo: o limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}$ não existe!!!!

Questão 4)e)



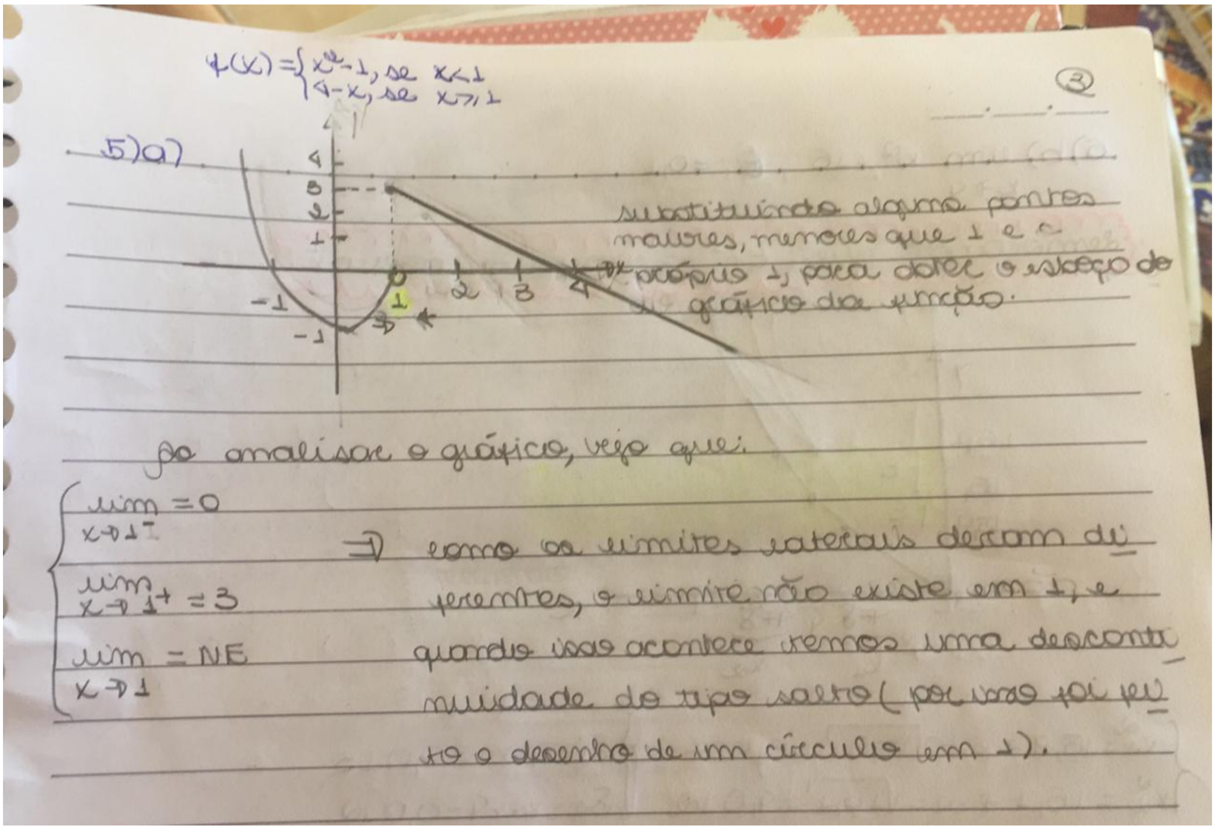
Primeiramente, como o gráfico da função já foi dado, vamos no eixo x e olhamos qual o limite se quer analisar. Vamos analisar os limites laterais de 2, ou seja: 2 para a direita (2^+) e 2 pra esquerda (2^-), bem como para o próprio 2.

Bom, nesse gráfico, escolhendo primeiramente analisar o limite de x tendendo a 2+, vamos no gráfico, no eixo x, e ao olhar 2 para a direita (pode olhar ao lado direito dessa reta pontilhada, mas sem sair das redondezas do x=2), vemos que o gráfico segue pra cima, ou seja, não tem um valor correspondente em y. Portanto, o limite para quando x tende a 2^+ vale: $+\infty$ (porque quando se analisa o 2 pela direita, vê-se que o gráfico vai pra cima, ou seja, sentido positivo de y, mas não tem nenhum valor específico em y).

Já ao analisarmos o 2, pela esquerda, vemos que a função vai seguir indefinidamente pra baixo, sem ter nenhum correspondente específico em y, então: o limite é tende a $-\infty$. Além disso, pode-se observar, também, uma tendência do

gráfico dessa função a chegar perto da reta pontilhada, mas NUNCA irá tocá-la (isso vale tanto quando se olha o 2 pela direita quanto pela esquerda).
Isso, porque a reta pontilhada é uma assíntota e uma assíntota é uma reta imaginária, sendo que, ao analisar a minha função de interesse, a função se aproxima dessa reta, assumindo valores muito grandes (tendendo ao infinito) positivos ou negativos. No caso desse exercício, temos uma assíntota vertical.
Indicação de material para leitura: http://www.calculo.iq.unesp.br/PDF/assintota-complemento.pdf

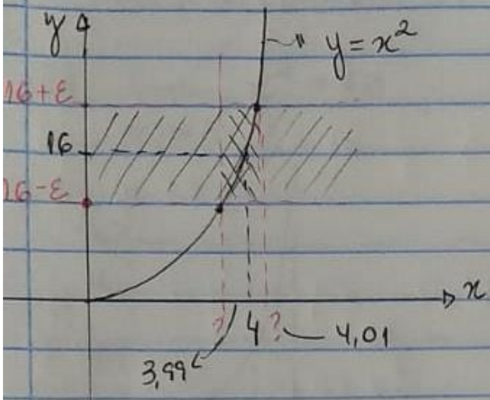
Questão 5)a)



Questão 6)b)

6.b) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$; $\varepsilon = 0,1$

pela definição $0 < |x-4| < \delta$ então $|x^2 - 16| < \varepsilon$



1º sabemos que $f(x) = x^2$, então

p/ $x^2 = 16 - 0,1 = 15,9 \Rightarrow x = \sqrt{15,9} \Rightarrow x \cong 3,98$

p/ $x^2 = 16 + 0,1 = 16,1 \Rightarrow x = \sqrt{16,1} \Rightarrow x \cong 4,01$

2º pela definição temos que $|x-4| < \delta$ então

- qdo $x = 3,98 \Rightarrow |x-4| < |3,98-4| < 0,02$
- qdo $x = 4,01 \Rightarrow |x-4| < |4,01-4| < 0,01$

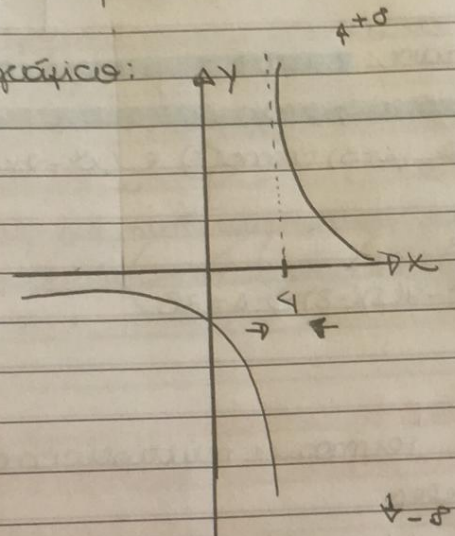
logo o maior δ p/ garantir que $|x-4| < \delta$ então $|x^2-16| < 0,1$ é $\delta = 0,01$

Questão 7)c)

f).c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{7}{x-4}$

$x - 4 = 0 \to x \neq 4 \to \{D = x \in \mathbb{R} / x \neq 4\}$

Esboço do gráfico:



Analisando, vemos que:

$\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{7}{x-4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{7}{x-4} = -\infty$

como os limites laterais deram diferentes entre si, o limite da função $f(x) = \dfrac{7}{x-4}$ não existe para $x=4$. Além disso, em $x = 4$, temos uma assíntota vertical.

Questão 8)h)

8) h) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$ → ao substituir x por −2, vejo que tenho uma indeterminação. A fim de retirá-la, recorro à simplificação algébrica. Neste exercício, tanto no denominador como no numerador tenho equações de 2º grau, então utilizo a fatoração para esse caso, que é: $a(x-x')(x-x'')$, onde:

a → coeficiente que acompanha x^2

x' e x'' → raízes da equação de segundo grau (com sinal).

Tomando o numerador como (I), o denominador como (II), respectivamente e utilizando as propriedades de limites, temos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x-6} = \frac{\lim\limits_{x \to -2} x^2+2x-3 \ \text{(I)}}{\lim\limits_{x \to -2} x^2+5x-6 \ \text{(II)}}$$

Resolvendo por Bhaskara:

(I) $x^2+2x-3 \to \Delta = 4-4(1)(-3) = 16$ → fatoração de (I)

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} \to x' = 1 \\ \to x'' = -3 \end{cases} \to \boxed{(x-1)(x+3)}$$

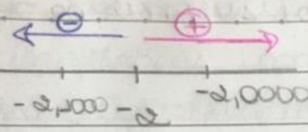
(II) $x^2+5x-6 \to \Delta = 25-4(6)(1) = 1$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{2} \begin{cases} \to x' = -2 \\ \to x'' = -3 \end{cases} \to \boxed{(x+2)(x+3)} \quad \text{fatoração de (II)}$$

Substituindo no limite, temos:

$$\frac{\lim\limits_{x \to -2} (x-1)\cancel{(x+3)}}{\lim\limits_{x \to -2} (x+2)\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-2-1}{-2+2} = \boxed{\frac{-3}{0}}$$

→ continua dando indeterminação → faço os limites laterais!



$$\lim_{x \to -2^-} \frac{(x-1)}{(x+2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{(x-1)}{(x+2)} = +\infty$$

} como os limites laterais deram diferentes, o limite não existe.

Questão 9)g)

9)

g) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)^2}$; $a=3$.

$\xleftarrow{\ominus}$ $\xrightarrow{\oplus}$

$-2{,}9999 \quad 3 \quad 3{,}00001$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{1}{+0{,}000\ldots} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x(x-3)^2} = \frac{1}{+0{,}000\ldots} = +\infty$$

Como o limite lateral à esquerda coincidiu com o limite lateral à direita, pode-se afirmar que o limite da função $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)^2}$, no ponto $a=3$, existe.

Questão 10)k)

10) k) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}}$ → substituindo x por $-\infty$, vemos que temos uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$. Devemos, então, retirá-la.

Reescrevendo $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x^2+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ e como: $x\to-\infty \Rightarrow \sqrt{x^2}=-x$,

temos: $\sqrt{x^2+1}=x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

⇒ Como o maior expoente do denominador é 1, devemos dividir por x:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{4x-3}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\frac{4x-3}{x}}{\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}}=\frac{4-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{4-\cancel{\frac{3}{-\infty}}\to 0}{-\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{(-\infty)^2}}\to 0}}$$

Lembrando que: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x^n}=0$

Logo: $\dfrac{4}{-\sqrt{1}}=\dfrac{4}{-1}\Rightarrow \boxed{-4}$

Questão 11) c)

11) * Para encontrar A.H, resolvemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

↳ Se o resultado de um dos limites derem uma constante, ou seja: um número finito como 1, 2, 3, ... e não derem $\pm\infty$, significa que temos uma assíntota horizontal, sendo esta uma reta $y = L$ (número finito).

OBS: só é preciso os dois ou um dos limites acima serem iguais a uma constante, se forem constantes diferentes, apenas significa que temos duas assíntotas horizontais.

* Para encontrar A.V: para uma função, percebemos que para alguns pontos em seu domínio a função não está definida, fazemos os limites para esses pontos. Se o resultado for $\pm\infty$ significa que temos uma assíntota vertical nesse(s) ponto(s).

Voltando ao exercício:

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

1º) Analiso o domínio da função, tanto no numerador, quanto no denominador:

no numerador: $2x^2 = 0 \to x^2 = 0 \to x = 0$

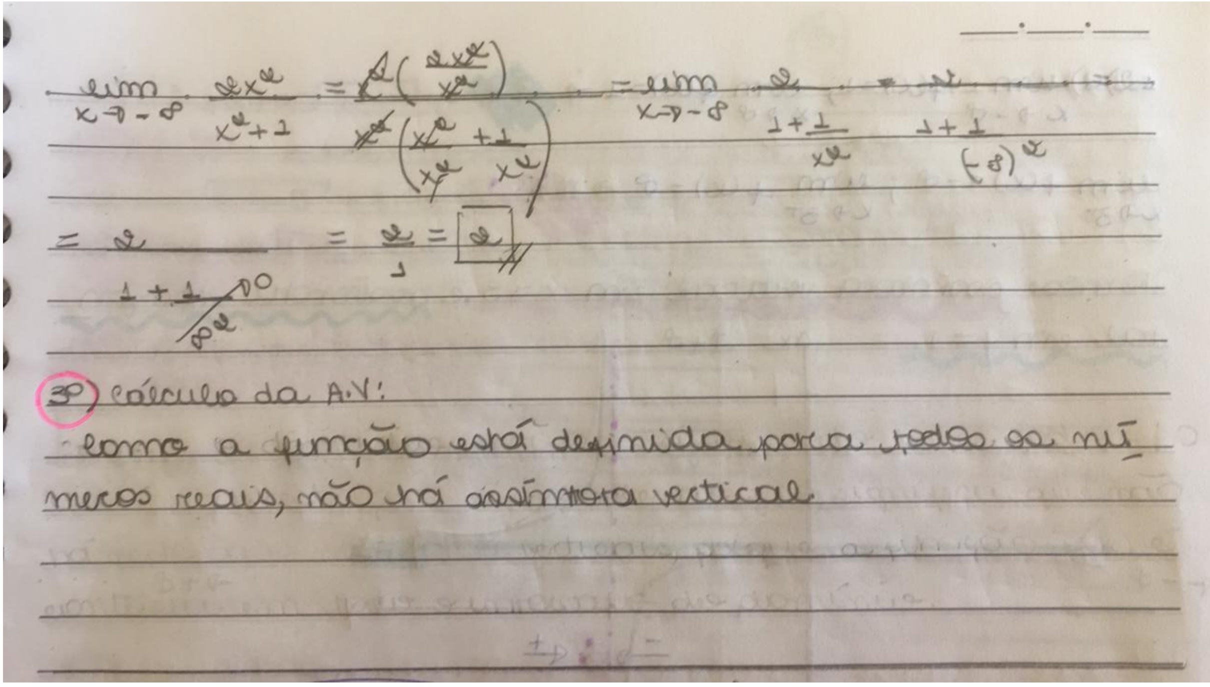
no denominador: $x^2+1 = 0 \to x = \pm\sqrt{-1} \to \nexists$ raiz real

Então, como nos números reais, não há nenhuma restrição no domínio da função, $D = \{\mathbb{R}\}$

2º) Cálculo da AH:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+\cancel{\frac{1}{\infty^2}}^{0}} =$$

$$= \frac{2}{1} = \boxed{2} //$$



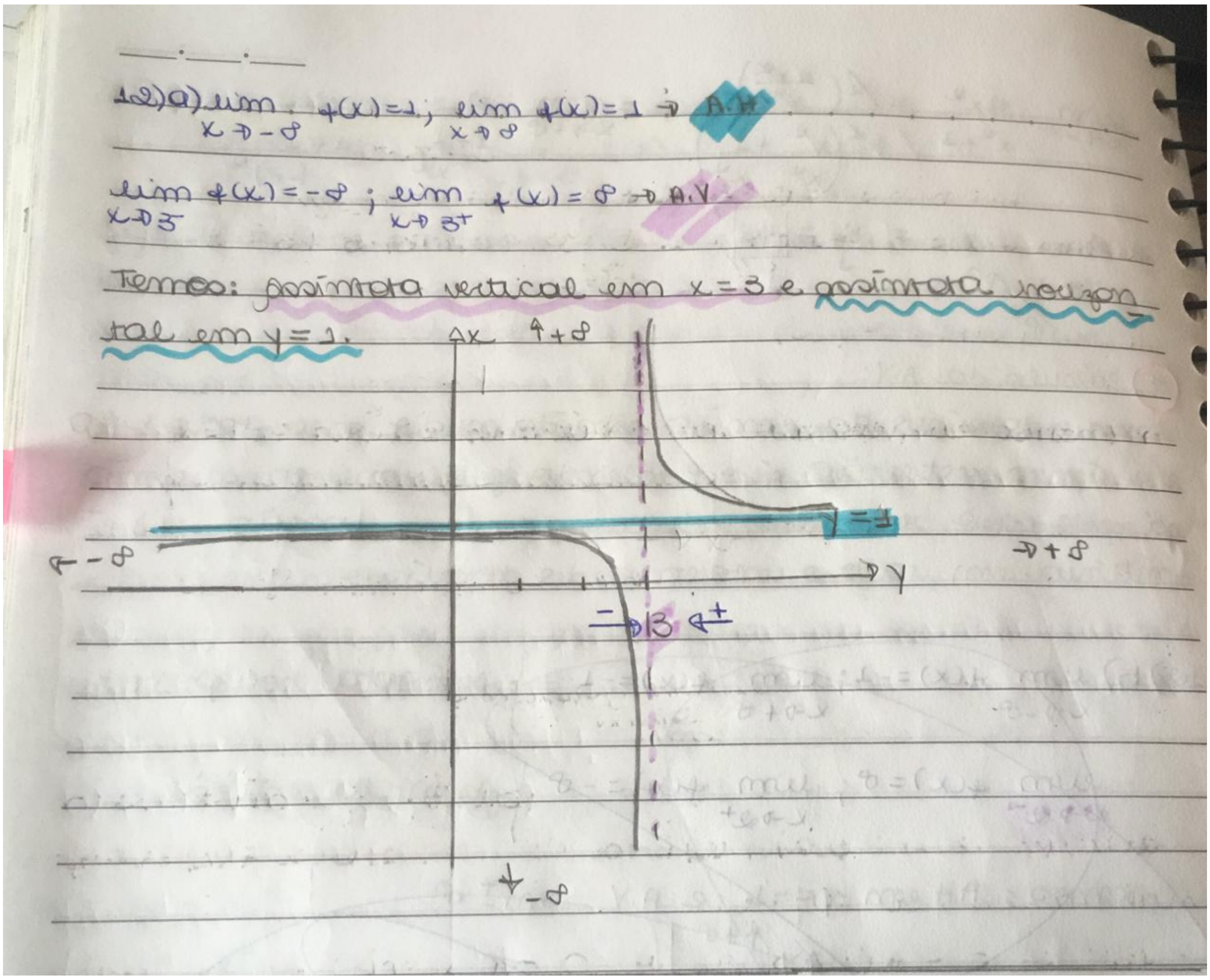
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{1+\frac{1}{(-\infty)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+\underbrace{\frac{1}{\infty^2}}_{\to 0}} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

3º) cálculo da A.V:

Como a função está definida para todos os números reais, não há assíntota vertical

Questão 12)a)



12)a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim_{x\to\infty} f(x)=1 \to$ A.H

$\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to3^+} f(x)=\infty \to$ A.V

Temos: assíntota vertical em $x=3$ e assíntota horizontal em $y=1$.

Questão 13)

13) Para uma função ser contínua:

1) $\exists f(c)$
2) $\lim_{x \to c} f(x) = L$
3) $\lim_{x \to c} f(x) = L = f(c)$

Todas três condições devem ser satisfeitas!

→ 4) a) salto, pois o limite da função não existe.

4) e) infinita → os limites tendem ao infinito e como infinito não é um número, não pode comparar com as demais condições.

5) d) Removível, pois é contínua antes e depois do ponto c analisado.

Questão 14)a)

(5)

14) a) $f(x) = \sqrt{2x-5} + 3x$, $a = 4$

i) $\exists f(a)$ → substituindo $a=4$, vejo se a função existe:

$f(4) = \sqrt{2.4-5} + 3.4 = \sqrt{8-5} + 12 \Rightarrow \boxed{f(4) = \sqrt{3} + 12}$

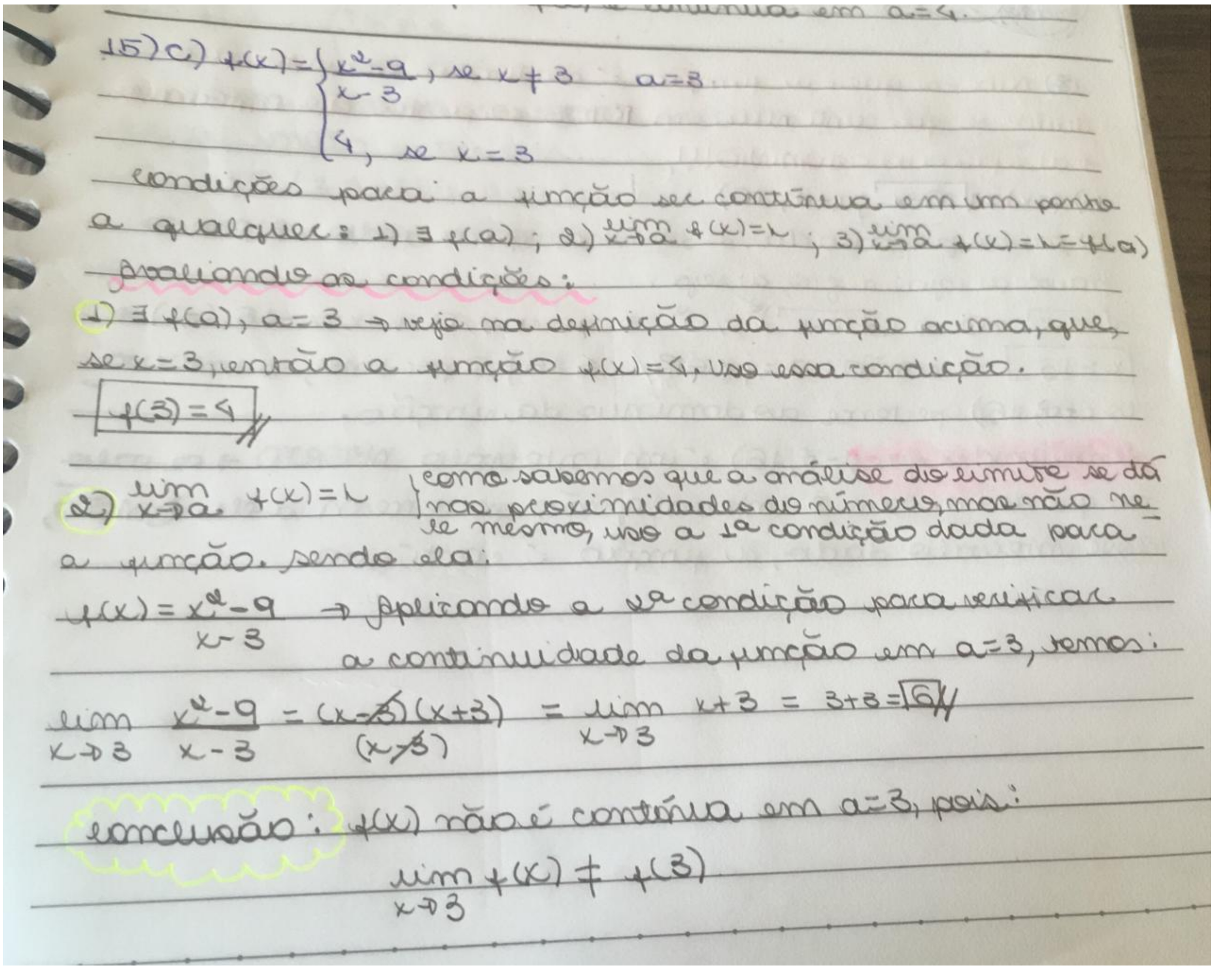
ii) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ → $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x-5} + 3x = \sqrt{(2)(4)-5} + 3.4 = \boxed{\sqrt{3} + 12}$ → OK!

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a)$

→ analisando, vejo que: $\boxed{\lim_{x \to 4} \sqrt{2x-5} + 3x = f(4) = \sqrt{3} + 12}$

ou seja: a função $f(x)$ é contínua em $a=4$.

Questão 15)c)



... é contínua em $a=4$.

15) c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 4, & \text{se } x=3 \end{cases}$ $a=3$

condições para a função ser contínua em um ponto a qualquer: 1) $\exists f(a)$; 2) $\lim_{x\to a} f(x)=L$; 3) $\lim_{x\to a} f(x)=L=f(a)$

Avaliando as condições:

1) $\exists f(a)$, $a=3$ → vejo na definição da função acima, que, se $x=3$, então a função $f(x)=4$, uso essa condição.

$\boxed{f(3)=4}$ //

2) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ { como sabemos que a análise do limite se dá nas proximidades do número, mas não nele mesmo, uso a 1ª condição dada para a função, sendo ela:

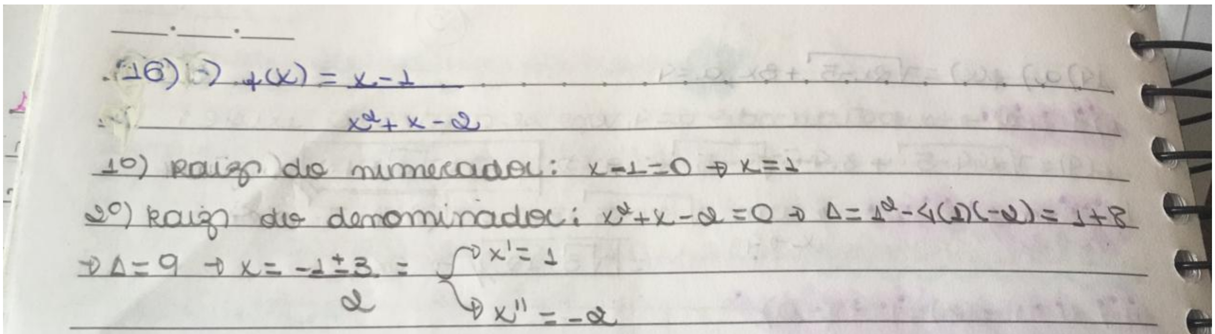
$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ → aplicando a 2ª condição para verificar a continuidade da função em $a=3$, temos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-\cancel{3})(x+3)}{(x-\cancel{3})} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = \boxed{6} //$$

conclusão: $f(x)$ não é contínua em $a=3$, pois:

$$\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

Questão 16)



___·___·___

16) a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

1º) Raiz do numerador: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

2º) Raiz do denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4(1)(-2)=1+8$

$\Rightarrow \Delta=9 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \to x'=1 \\ \to x''=-2 \end{cases}$

Descontinuidade em $x=1$ e $x=-2$ //

Questão 17)b)

17) Sabe-se que: a função é contínua no intervalo dado, se for contínua em TODOS os pontos do intervalo
$\Rightarrow$ ou seja: OLHO O DOMÍNIO!!!

b) $f(x)=\sqrt{16-x}$; $(-\infty, 16)$

Uma raiz quadrada é definida para todo número maior ou igual a zero, ou seja:

$\sqrt{16-x} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{16-x})^2 \geq 0^2 \Rightarrow 16-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -16 \ (-1) \Rightarrow$ $\boxed{x \leq 16}$ $\Rightarrow$ então: $D=\{x \in \mathbb{R} / x \leq 16\}$ $\Rightarrow$ por isso, o intervalo $(-\infty, 16)$ pertence ao domínio da função.

Lembrando que: $(-\infty, 16)$ é um intervalo ABERTO $\Rightarrow$ os valores que delimitam o intervalo, não pertencem a ele. Então, nesse intervalo dado, a função é contínua.

Questão 18)j)

18) j) $f(x) = \dfrac{4x-7}{(x+3)(x^2+2x-8)}$

① Raiz do numerador: $4x-7=0 \Rightarrow 4x=7 \Rightarrow \boxed{x=\frac{7}{4}}$

② Raiz do denominador: como no denominador tenho os termos se multiplicando, analiso o que zera cada um dos termos. Tomando $(x+3)$ como I e (x^2+2x-8) como II, temos:

I $x+3 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x \neq -3$

II $x^2+2x-8=0 \Rightarrow \Delta = 2^2-4(1)(-8) \Rightarrow \Delta = 36$

$x = \dfrac{-2 \pm 6}{2}$ $\begin{cases} \Rightarrow x' \neq 2 \\ \Rightarrow x'' \neq -4 \end{cases}$

$D=\{x \in \mathbb{R} / x \neq -4, x \neq -3, x \neq 2\}$

Para esses valores, e se a função atender aos critérios: $f(x)=f(a)$; $\lim_{x \to a} f(x)=L$ e $f(a)=L$, ela será contínua.