Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 9 - página 85 a 102.
Artur Hideyuki Tomita

3. Limite e Continuidade (continuação).

3.5 Limite de funções compostas.

Páginas 85 a 90.

Juntamente com as outras operações que já vimos e a composta, podemos passar a ter funções mais complicadas a partir de funções mais simples.

O importante aqui é lembrar que a composta de funções contínuas é contínua.

A ideia básica de composta é como se fizéssemos uma 'escala' para chegar de x a $g \circ f(x)$. Vamos de x a $f(x)$ e depois de $f(x)$ até $g(f(x))$. Então se x fica próximo de p, $f(x)$ fica próximo de $f(p)$ e consequentemente $g(f(x))$ fica próximo de $g(f(p))$. Note que a notação usando limite diz exatamente isso se alteramos o valor da função pelo limite das função para que torná-las contínuas.

O Exemplo 1, já vimos que a raiz é uma função contínua e a função dentro da raiz foi chamada de u. Ou seja, $u = u(x)$ então temos a composta $\sqrt{u(x)}$. É necessário diminuir o domínio para que $u(x) \geq 0$ para que se possa compor com a raiz quadrada. Porém, a função está definida nos pontos próximos a 1 então podemos calcular o limite.

No Exemplo 2, o que 'dificulta' a conta é o que esta dentro da quarta potência, assim chamamos o que está dentro de $u = u(x)$. Depois disso temos que fazer com que u seja a única variavel para poder escrever a composta (assim tem que ajustar o denominador). O que sobra é uma fração de polinômios.

O começo do Exemplo 3 é o mesmo argumento usado no Exemplo 2.

O Exemplo 4 usa o fato que $h(u) = u^2$ é uma função contínua para aplicar a composta.

Exemplos 5 e 6 são demonstrações de fatos importantes, então precisa lembrar do enunciado.

Exemplo 7 mostra que o importante é o limite e não o valor da função, se o valor da função não bate com o limite.

3.6 Teorema do Confronto

Geralmente chamado Teorema do Sanduíche. Imagine que você está tentando pegar um pernilongo, se ele não fugir dentre as suas mão você vai esmagá-lo quando bater as mãos.

A ideia é que se a função que está no meio e uma função por cima e a outra por 'encostam' para o mesmo valor então o do meio também tem o mesmo valor.

No Exemplo 1, lembre que $|f(x)| \leq x^2$ se e somente se $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Como x^2 vai a 0 quando x vai a 0, temos que $-x^2$ também vai a 0 quando x vai a 0. Assim, a função $f(x)$, que está no meio, também vai a 0 quando x vai a 0.

O Exemplo 2 é um resultado importante. Se uma função é limitada em torno do ponto p e a outra vai para 0 quando x vai a p, então o produto vai para 0 quando x vai para 0. Note que aqui, a função limitada não precisa ter limite, e um exemplo disto é dado no Exemplo 3.

3.7 Continuidade das Funções Trigonométricas.

A verificação da continuidade usa o fato que $|\sin x| \leq x$ para todo x próximo a 0 (i.e, existe $r > 0$ tal que $|\sin x| \leq x$ para todo x tal que $-r < x < r$. Disto já sai imediatamente que a função seno é continua em 0. Nos outros pontos, e para a função coseno, utilizamos as propriedades trigonométricas e a continuidade do seno em 0.. O importante desta seção é apenas lembrar que as funções seno e coseno são contínuas.

3.8 O limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (página 94).

Vamos assumir que esse limite existe e que ele dá 1. A prova está no livro e usa o Teorema do Confronto. Note que antes de aplicar o limite fundamental é importante verificar se x vai para 0.

Um fato bastante utilizado é que a função $f(x) = 1$ se $x = 0$ e $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ para $x \neq 0$ é uma função contínua.

No Exemplo 1, para podermos escrever a composta, precisamos poder escrever $f(5x)$. Assim multiplica-se e divide por 5. Assim o limite que aparece é igual a $\lim_{x\to 0} 5.f(x) = 5.1 = 5$.

O Exemplo 2, temos que fazer alguma manipulação para aparecer o limite fundamental. Para isto são usadas as propriedades trigonométricas.

3.9 Propriedades Operatórias. Demonstração do Teorema do Confronto.

O importante aqui é lembrar a tabelinha no começo da subsecção, não se espera que saiba provar as afirmações desta subsecção.

4. Extensões do Conceito de Limite.

4.1 Limites no Infinito.

Neste caso, o infinito está relacionado ao domínio. Fica parecido em pensar no limite lateral, já que só se pode aproximar de $+\infty$ pela esquerda e de $-\infty$ pela direita. Pensando apenas em termos de ordem, pode-se imaginar o $+\infty$ á direita de todos os reais e o $-\infty$ à esquerda de todos os reais. Os pontos próximos ao +-infinito seriam $\{x : x > N\}$ para N. Quanto maior o N mais próximos estarão de $+\infty$. Neste caso, basta por isso se preocupar com N positivo.

Os pontos próximos ao −-infinito seriam $\{x : x < M\}$ para M. Quanto menor o M mais próximos estarão de $-\infty$ (menor no sentido de que o M é um número negativo de módulo grande). Por isso podemos nos preocupar com M negativos.

As operações neste caso funcionam como nos limites que já vimos e estão listadas nos Teoremas 1 e 2 da páginas 100 e 101.

Os Exemplos 1 e 2 dizem que se $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^n}$ com n inteiro positivo vão a 0 quando x vai a +-infinito.

O Exemplo 3, como x vai a infinito, tomamos o maior grau (a ideia é fazer um deles ficar limitado e o outro fator vai para infinito). **Nunca faça isto se x vai para um número real, por que o argumento não funciona.**

Na parte que vamos mostrar que é limitada, por ser polinômio, puxamos o maior grau pra fora, e sobra um número real diferente de 0 e uma soma de coisas que vão para 0 (pelo Exemplo 2). A parte que vai para infinito em cima e embaixo, podemos cortar (no caso ambos 'somem' por ser o mesmo grau e só sobra a parte limitada). Calculamos o limite do que sobra depois de cortar.