

Radiação Cherenkov

12/05/2020

Estudaremos aqui a radiação emitida por um meio polarizável (dielétrico) transparente devido à presença no meio de uma partícula carregada relativística.

Determinaremos sob quais condições a condição de radiação é satisfeita e as propriedades principais dessa radiação: ângulo de emissão, distribuição em frequência.

Boa parte do trabalho consiste em determinar o campo eletromagnético no meio dielétrico, já que ele difere do campo de uma partícula em movimento no vácuo, como estudamos antes via potenciais de Liénard - Wiechert

Trataremos de um caso bastante geral em que a permissividade do meio pode depender da frequência da onda eletromagnética

$$\epsilon = \epsilon(\omega) \Rightarrow n = n(\omega)$$

índice de refração
dependente da
frequência

No calibre de Lorentz, os potenciais satisfazem eqs de onda não-homogêneas

(2)

$$\nabla^2 V - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\text{com } w = \frac{c}{n} \quad \rho / \mu = \rho_0$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

O problema é mais facilmente tratável no espaço de Fourier

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega V(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

com suas correspondentes transformações inversas

$$V(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3r \int dt V(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{A}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3r \int dt \vec{A}(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Então

3

$$\begin{aligned}\nabla^2 V &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega v(\vec{k}, \omega) \nabla^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega [-k^2 v(\vec{k}, \omega)] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega v(\vec{k}, \omega) \frac{n^2 \partial^2}{c^2 \partial t^2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \left[-\frac{\omega^2 n^2}{c^2} v(\vec{k}, \omega) \right] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

Portanto, concluímos

$$v(\vec{r}, t) \xrightarrow{\text{Fourier}} v(\vec{k}, \omega)$$

$$\nabla^2 v(\vec{r}, t) \longrightarrow -k^2 v(\vec{k}, \omega)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \longrightarrow -\omega^2 v(\vec{k}, \omega)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \longrightarrow \vec{A}(\vec{k}, \omega)$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) \longrightarrow -k^2 \vec{A}(\vec{k}, \omega)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \longrightarrow -\omega^2 \vec{A}(\vec{k}, \omega)$$

Termos de fonte

(4)

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \rho(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \vec{J}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Logo, no espaço de Fourier as eqs de onda ficam

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right] v(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{n^2 \epsilon_0} \rho(\vec{k}, \omega)$$

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right] \vec{A}(\vec{k}, \omega) = \mu \vec{J}(\vec{k}, \omega)$$

Tomemos agora como densidades de carga e corrente aquelas associadas a uma partícula carregada com $q = ze$ movendo-se com velocidade \vec{v} no meio

\uparrow
carga do elétron

$$\rho = q \delta(\vec{r} - \vec{v}t) = ze \delta(\vec{r} - \vec{v}t) = \rho(\vec{r}, t)$$

$$\vec{J} = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}$$

Então

⑤

$$\begin{aligned} \rho(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3r \int dt [ze \delta(\vec{r} - \vec{v}t)] e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{ze}{(2\pi)^2} \underbrace{\int dt e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega)t}}_{= 2\pi \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} = \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \\ &= 2\pi \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

Prova:

De acordo com o teorema da integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\alpha} f(\alpha) d\alpha \right) dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\alpha)p} dp \right) f(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\alpha) f(\alpha) d\alpha$$

⇓

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\alpha)p} dp = \delta(x-\alpha)$$

(6)

Portanto

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right] v(\vec{k}, \omega) = \frac{ze}{2\pi \epsilon_0 n^2} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$\begin{aligned} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \right] \vec{A}(\vec{k}, \omega) &= \mu \vec{v} \rho(\vec{k}, \omega) \\ &= \mu \vec{v} \frac{ze}{2\pi} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{ze}{2\pi \epsilon_0} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

Seja, no espaço de Fourier, a solução para os potenciais é dada por

$$\left\{ \begin{aligned} v(\vec{k}, \omega) &= \frac{ze}{2\pi \epsilon_0 n^2} \frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2} \\ \vec{A}(\vec{k}, \omega) &= \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{ze}{2\pi \epsilon_0} \frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2} = n^2 \frac{\vec{v}}{c^2} v(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \right.$$

Calculamos agora o campo eletromagnético

(7)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

com a prescrição

$$\vec{\nabla} \longrightarrow i\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega \quad \text{Provar!}$$

$$\vec{\nabla} \times \longrightarrow i\vec{k} \times$$

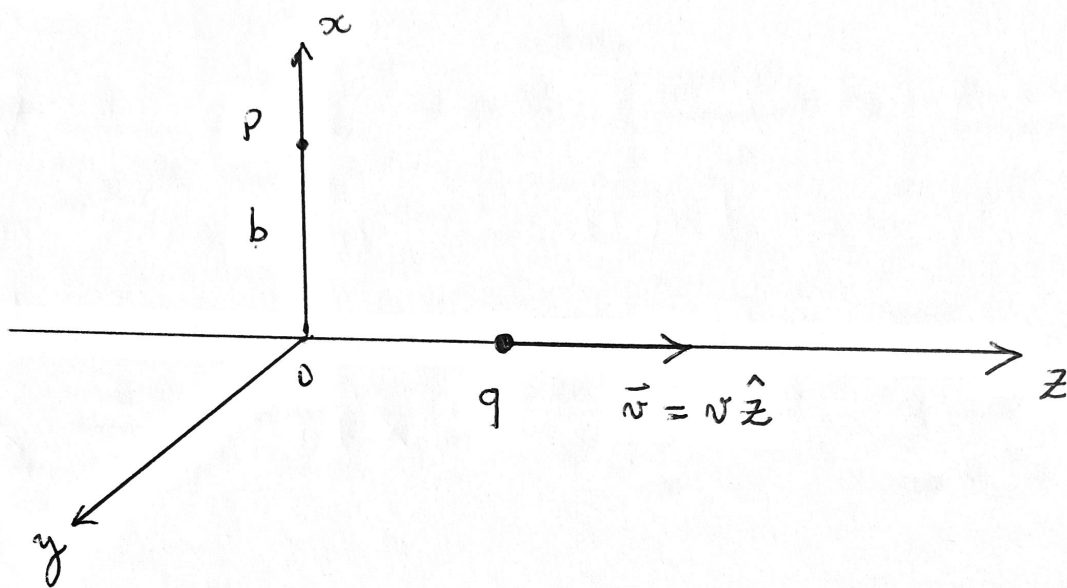
Temos então

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{k}, \omega) = i \left[\frac{\omega n^2}{c^2} \vec{v} - \vec{k} \right] v(\vec{k}, \omega) \\ \vec{B}(\vec{k}, \omega) = i \frac{n^2}{c^2} (\vec{k} \times \vec{v}) v(\vec{k}, \omega) \end{array} \right.$$

Perceba como é muito mais fácil obter os campos a partir dos potenciais do espaço de Fourier.

Calculemos agora o campo eletromagnético num ponto a uma distância b da trajetória da partícula. (8)

Sem perda de generalidade tomaremos esse ponto sobre o eixo x acima da origem



Integrando sobre \vec{k} , teremos em P o campo elétrico e sua dependência com a frequência

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Isso pode ser visto como uma transformada de Fourier parcial.

Na posição $\vec{r} = b\hat{x}$, temos

(9)

$$\vec{E}(b\hat{x}, \omega) = \vec{E}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{ibk_x}$$

Componentes de $\vec{E}(\omega)$

$$E_z(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ize}{2\pi\epsilon_0 n^2} \int d^3k e^{ibk_x} \left[\frac{\omega n^2 v}{c^2} - k_z \right] \frac{\delta(\omega - vk_z)}{k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} n^2}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ze}{2\pi\epsilon_0 n^2} \frac{1}{v} \left[\frac{\omega n^2 v}{c^2} - \frac{\omega}{v} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ibk_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} n^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_x^2 + k_y^2 + \underbrace{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} n^2}_{\equiv \alpha^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{(\alpha^2 + k_x^2)^{1/2}}$$

Portanto

$$E_z(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ze\omega\pi}{2\pi\epsilon_0 n^2 v^2} (\beta^2 n^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_x}}{(\alpha^2 + k_x^2)^{1/2}} dk_x$$

$$= 2K_0(\alpha b)$$

$K_0(x)$ é uma função de Bessel modificada de 2º tipo

Então

(10)

$$E_z(\omega) = -i \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\omega}{v^2} \left(\frac{1}{n^2} - \beta^2 \right) \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_0(\alpha b) = E_{||}$$

com

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 n^2(\omega)] \quad \text{e} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

De modo análogo

$$E_x(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ize}{2\pi\epsilon_0 n^2} \int d^3k e^{ibk_x} [-k_x] \frac{\delta(\omega - vk_z)}{K^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{ze}{2\pi\epsilon_0 n^2} \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ibk_x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{K_x^2 + K_y^2 + \alpha^2}}_{= \pi (K_x^2 + \alpha^2)^{-1/2}}$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{n^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x e^{ibk_x}}{(\alpha^2 + K_x^2)^{1/2}} dk_x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x e^{ibk_x}}{(\alpha^2 + K_x^2)^{1/2}} dk_x = -i \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibk_x}}{(\alpha^2 + K_x^2)^{1/2}} dk_x$$

$$= -2i \frac{d}{db} K_0(\alpha b) = 2i\alpha K_1(\alpha b)$$

Por simetria, $E_x(\omega)$ é a componente do campo $\perp \vec{v}$ (11)

Temos então

$$E_x(\omega) = \frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{v n^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} K_1(\alpha b) = E_{\perp} = E_s$$

↑
ordenadas
cilíndricas

De forma análoga

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \vec{B}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[i \frac{n^2}{c^2} (\vec{k} \times \vec{v}) \vec{V}(\vec{k}, \omega) \right] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Como $\vec{v} = v \hat{z} \Rightarrow B_z(\omega) = 0$

Em $\vec{r} = b \hat{x}$

$$\vec{B}(\omega) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{n^2}{c^2} \int d^3k (\vec{k} \times \vec{v}) \left[\frac{ze}{2\pi\epsilon_0 n^2} \frac{\delta(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2} \right] e^{i b k_x}$$

$$(\vec{k} \times \vec{v})_x = k_y v \quad e \quad (\vec{k} \times \vec{v})_y = -k_x v$$

$$(\vec{k} \times \vec{v})_z \equiv 0$$

Como o integrando é ímpar em k_y , temos

(12)

$$B_x(\omega) = 0$$

$$B_y(\omega) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{c^2} \frac{ze}{2\pi\epsilon_0} \int d^3k k_x e^{ibk_x} \frac{\delta(\omega - vk_z)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2}$$
$$= \frac{n^2 \beta}{c} E_x = B_\phi$$

Resumindo, em coordenadas cilíndricas

$$\left\{ \begin{aligned} E_z(\omega) &= i \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_0(\alpha b) = E_z(\omega, b) \\ E_\phi(\omega) &= \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\alpha}{\omega n^2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_1(\alpha b) = E_\phi(\omega, b) \\ B_\phi(\omega) &= \frac{n^2 \beta}{c} E_\phi(\omega, b) = B_\phi(\omega, b) \end{aligned} \right.$$

com

$$\alpha = \frac{\omega}{v} \left[1 - \beta^2 n^2(\omega) \right]^{1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Perceba que $\alpha = \frac{\omega}{v} [1 - \beta^2 n^2(\omega)]^{1/2}$ pode ser complexo.:

$$1 - \beta^2 n^2 < 1 \Rightarrow \beta > 1/n$$

Estamos interessados em regiões longe da trajetória da partícula, ou seja, na zona de radiação, tais que

$$\alpha b \gg 1$$

Comportamento assintótico das funções $K_0(\alpha b)$ e $K_1(\alpha b)$

$$K_0(\alpha b) \xrightarrow{b \gg 1/a} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha b}}{\sqrt{\alpha b}}$$

$$K_1(\alpha b) \longrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha b}}{\sqrt{\alpha b}}$$

Sendo assim, na zona de radiação

(14)

$$E_z(\omega, b) \xrightarrow{b \gg 1/\alpha} i \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \frac{e^{-\alpha b}}{\sqrt{\alpha b}}$$

$$E_s(\omega, b) \longrightarrow \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{v n^2} \left(\frac{\alpha}{b} \right)^{1/2} e^{-\alpha b}$$

$$B_\phi(\omega, b) \longrightarrow \frac{n^2 \beta}{c} E_s(\omega, b \gg 1/\alpha)$$

O fluxo de energia na zona de radiação pode ser obtido via vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*)$$

onde \vec{E} e \vec{B} são os campos dependentes da posição e do tempo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \vec{B}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

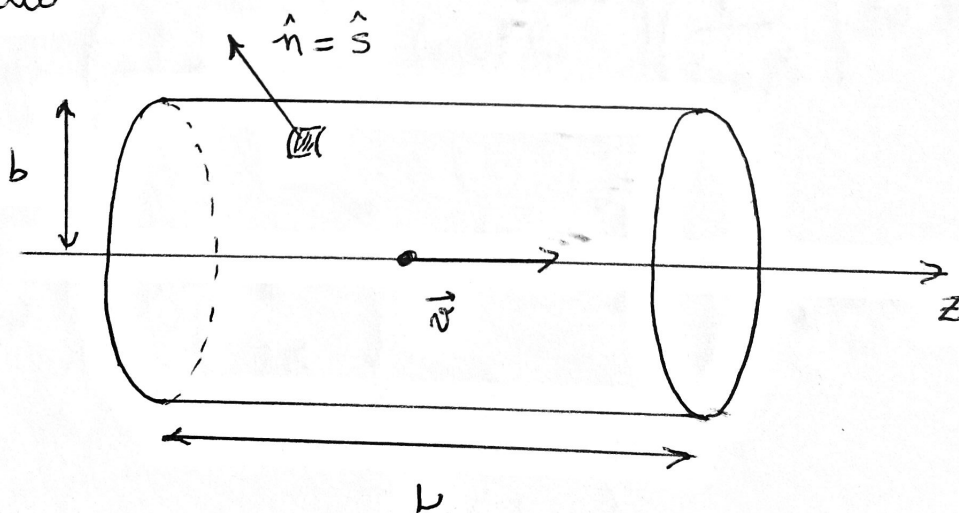
Portanto

$$E_z(b,t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega E_z(\omega,b) e^{-i\omega t}$$

$$E_s(b,t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega E_s(\omega,b) e^{-i\omega t}$$

$$B_\phi(b,t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega B_\phi(\omega,b) e^{-i\omega t}$$

Tomemos um cilindro de raio b centrado na trajetória da partícula



$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{s=b} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = -\frac{1}{2\mu} (2\pi b) \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}(E_z B_\phi^*) dz$$

$$(dz = v dt) = -\frac{\pi b v}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}(E_z B_\phi^*) dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}(E_z B_{\phi}^*) dt = \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E_z B_{\phi}^* dt \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega E(\omega, b) e^{-i\omega t} \right) \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int d\omega' B_{\phi}^*(\omega', b) e^{i\omega' t} \right) \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ \int d\omega \int d\omega' \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt \right)}_{= \delta(\omega' - \omega)} E_z(\omega, b) B_{\phi}^*(\omega', b) \right\}$$

$$= \text{Re} \left\{ \int d\omega E_z(\omega, b) B_{\phi}^*(\omega, b) \right\}$$

$$= \int d\omega \text{Re} [E_z(\omega, b) B_{\phi}^*(\omega, b)]$$

Na zona de radiação

(17)

$$E_z B_\phi^* \xrightarrow{b \gg 1/\alpha} i \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\omega}{bc^4} \left(\frac{\alpha^*}{\alpha} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) e^{-(\alpha + \alpha^*)b}$$

case 1: $\beta < 1/n$ (assumindo $\text{Im}[n(\omega)] = 0$)

$$\alpha = \frac{\omega}{c} [1 - \beta^2 n^2]^{1/2} \in \mathbb{R}$$

\Downarrow

$$\frac{\alpha^*}{\alpha} = 1 \quad e \quad e^{-(\alpha + \alpha^*)b} = e^{-2\alpha b}$$

vetor de Poynting
exponencialmente
atenuado!

Case 2: $\beta > 1/n$

$$\alpha = i|\alpha| \quad e \quad \alpha^* = -i|\alpha| = -\alpha$$

\Downarrow

$$i \left(\frac{\alpha^*}{\alpha} \right)^{1/2} = -1 \quad e \quad e^{-(\alpha + \alpha^*)b} = 1 \quad \text{radiação!}$$

logo, para $\beta > 1/n$

$$\beta > 1/n \Rightarrow v > \frac{c}{n}$$

partícula precisa estar acima da velocidade da luz no meio

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt} \right)_{s=b} &= - \frac{\pi b v}{\mu} \int d\omega \operatorname{Re} \left[E_z(\omega, b) B_\phi^*(\omega, b) \right] \\ &= \frac{\pi b v}{\mu} \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{bc^4} \int_{n(\omega) > 1/\beta} \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right] d\omega \\ &= \int \frac{d^2 E}{d\omega dt} d\omega \end{aligned}$$

com

$$\boxed{\frac{d^2 E}{d\omega dt} = \frac{\pi\beta}{\mu c^3} \left(\frac{ze}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \omega \left[1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right]}$$

Fórmula de Frank-Tamm (1937)

Num meio dielétrico real, ϵ e portanto n são dependentes da frequência, o que torna dispersivo

Num modelo simplificado de meio dielétrico dispersivo, podemos considerar cada elétron sujeito a uma força total

$$F = qE_0 \cos(\omega t) - m\gamma \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

força devido ao campo elétrico externo

amortecimento devido por exemplo à emissão de radiação pela carga

força restauradora devido à ligação química do elétron

A solução para a posição do elétron

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{com} \quad \tilde{x}_0 = \frac{(q/m) E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

E portanto, um momento de dipolo

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

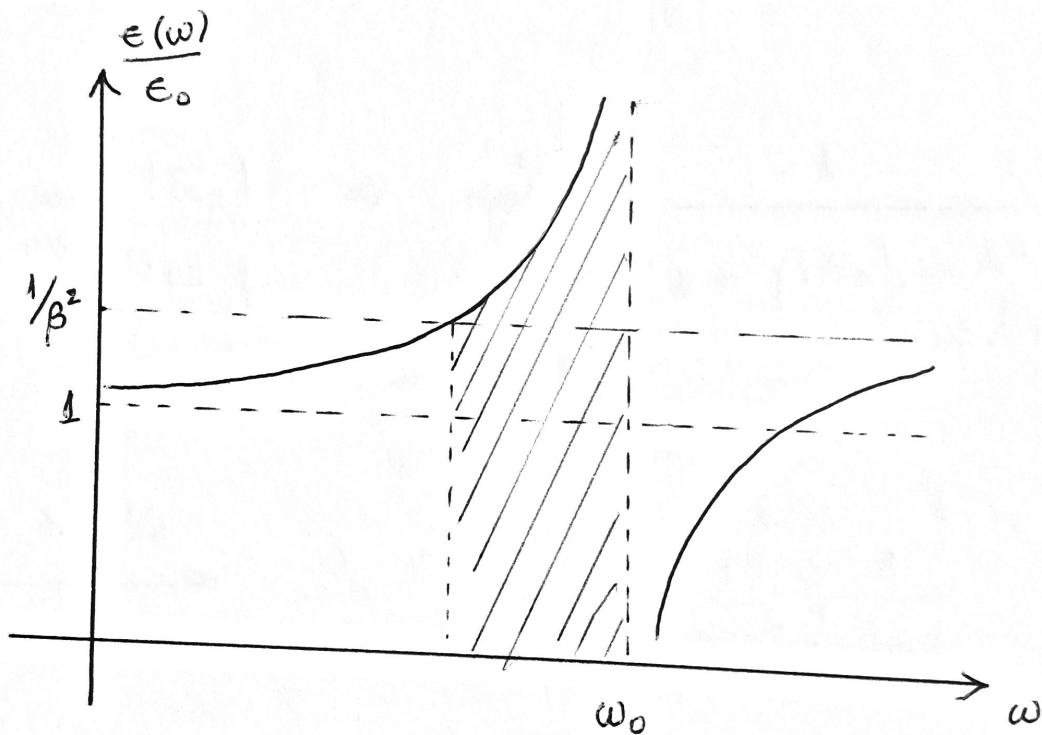
$$\tilde{x}_0 = |\tilde{x}_0| e^{i\phi}$$

com

$$\phi = \text{atan} \left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Na vizinhança de uma das frequências de ressonância do sistema anterior, $\epsilon(\omega)$ pode apresentar grandes variações. (20)

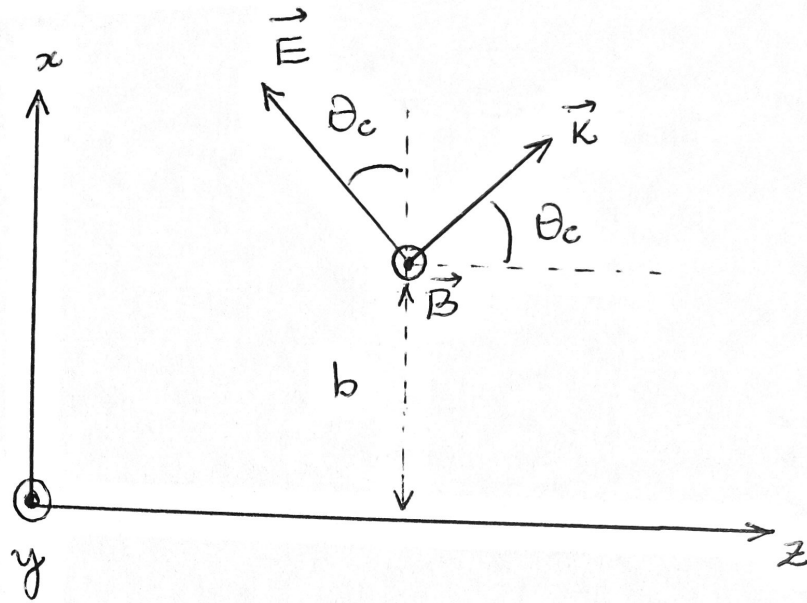
O gráfico abaixo mostra o comportamento típico de $\epsilon(\omega)$ na vizinhança de uma dessas frequências (região de dispersão anômala)



Radiação Cherenkov só será emitida na região hachurada do espectro, onde $n(\omega) > 1/\beta$.

Perceba que, apesar disso, para $\beta \approx 1$ essa região pode ser bastante extensa.

Ângulo de emissão



$$\tan \theta_c = \frac{|E_z|}{|E_s|} \Rightarrow \cos^2 \theta_c = \frac{1}{1 + \left(\frac{|E_z|}{|E_s|} \right)^2}$$

$$\frac{|E_z|}{|E_s|} \xrightarrow{b \gg 1/\alpha} \frac{\omega}{c^2} v n^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \frac{1}{|\alpha|}$$

Portanto

$$\frac{|E_z|^2}{|E_s|^2} \rightarrow \beta^2 n^2 - 1 \Rightarrow \boxed{\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}}$$

ângulo Cherenkov

Primeira medida experimental: Cherenkov (1934)