1. Integral de linha de campos escalares

Definição 1.1. Considere uma curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

(i) γ é chamada *lisa* quando a derivada $\gamma'(t)$ não se anula, para todo t no intervalo aberto (a, b).
(ii) γ é chamada *simples* quando $\gamma(t) \neq \gamma(u)$, para todo t e u no intervalo aberto (a, b).
(iii) γ é chamada *fechada* quando $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Seja γ uma curva parametrizada lisa. A norma da sua derivada $\|\gamma'(t)\|$ é a velocidade escalar de γ e se $\|\gamma'(t)\| = 1$ dizemos que γ está *parametrizada pelo comprimento de arco.* Neste caso o deslocamento medido sobre o traço da curva coincide com a variação do parâmetro. Costumamos usar s para indicar o parâmentro comprimento de arco.

Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\gamma : [a, b] \to D$ é uma curva parametrizada lisa e simples, consideramos a integral de f sobre γ, denotada por $\displaystyle\int_\gamma f\, ds$. Essa integral é definida através do limite de uma soma de Riemann e pode ser calculada pela fórmula:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt \tag{1.1}$$

Em particular

$$\int_\gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

é o comprimento de γ.

A integral em (1.1) não depende da parametrização, ou seja, se $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$ e $\sigma(u)$, $c \leq u \leq d$ são parametrizações lisas, simples e com um mesmo traço, então por mudança de variável é possível concluir que

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_c^d f(\sigma(u))\|\sigma'(u)\|\, du$$

Exemplo 1.2 (Lista 2 - (2 - b))**.** Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, onde $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Observamos que $\gamma'(t) = (\cos t - t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t \cos t, 1)$ e portanto $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}$. Sendo assim o comprimento de γ é dado pela integral

$$\int_0^{\sqrt{2}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2+t^2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Fazendo a mudança de variável

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}dt \quad \text{e} \quad 0 \le \theta \le \pi/4.$$

Obtemos

$$\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{t^2}{2}}\, dt = 2\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta = 2\int_0^{\pi/4} sec\,\theta\, \sec^2\theta\, d\theta =$$

$$= \left[\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\right]\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} + \, ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Acima usamos integração por partes para calcular uma primitiva de $\sec^3\theta$, chamamos $u = \sec\theta$ e $dv = \sec^2\theta\, d\theta$ e chegamos que

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta + \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta|\,\right]$$

.

2. Integral de linha de campos de vetores

Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo de vetores contínuo em um aberto D de $\mathbb{R}^2$ e

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{onde} \quad a \le t \le b,$$

uma curva lisa e simples em D. Também usamos uma notação vetorial para γ dada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}.$$

O elemento de comprimento orientado associado à curva $\vec{r}$ é denotado por $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$. Então também escrevemos

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy,$$

que são duas maneiras de denotar a integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ.

Esta integral é definida como limite de uma soma de Riemann e para computá-la usamos a fórmula:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left(P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\right)\,dt. \tag{2.1}$$

Se $\gamma(t),\ a \leq t \leq b$ e $\sigma(t),\ c \leq s \leq d$ são parametrizações lisas e simples com um mesmo traço então por mudança de variável é possível concluir que

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\sigma P\,dx + Q\,dy.$$

Se $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{j}$ é campo contínuo em um aberto D de $\mathbb{R}^3$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),\quad$ onde $\quad a \leq t \leq b$ é uma curva lisa simples em D valem as notações análogas inclusive a igualdade

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

que pode ser calculada com a parametrização lisa e simples γ de modo análogo a (2.1).

Exemplo 2.1 (Lista 2 - (7 - d))**.** Calcule $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário.

Vamos ilustrar a fórmula em (2.1) que chamamos de *cálculo direto*. Começamos a parametrizando a curva γ. Aqui é fácil notar que a primeira e segunda componente de γ satisfazem a equação do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e isto nos leva a parametrização de γ mas com a orientação invertida:

$$\gamma^- : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \\ z = \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Esta é uma parametrização lisa e simples de γ e portanto podemos usá-la para clacular a integral desejada. Para isto observamos que

$$d\vec{r} : \begin{cases} dx = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ dy = \cos\theta\,d\theta \\ dz = (-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \end{cases}$$

Portanto, escrevendo $\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz = -\int_{\gamma^-} x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$ e já fazendo algumas simplificações obtemos

$$\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz =$$
$$= -\left[\int_0^{2\pi} \big(\cos^2\theta + \cos\theta\,\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\big)\,d\theta\right] =$$
$$= -\left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\,cos2\theta\right)d\theta\right]$$
$$= -\left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\,cos2\theta\right)d\theta\right] =$$
$$= -\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{8}\right]\Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

3. Campos Gradientes no plano

Nesta seção vamos intriduzir a classe dos campos gradientes que possuem propriedades bem interessantes. Vamos começar com o caso de campos no plano e depois no espaço. Estas são as situações que vamos enfatizar mas o conceito de campo gradiente é o mesmo em qualquer espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.1. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ um campo de vetores contínuo em um aberto D de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $\vec{F}$ é um *campo gradiente* em D quando existe uma função φ definida em D de classe C^1 tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q$$

se verificam em todo $(x,y) \in D$. Esta função φ quando existe é chamada de *função potencial* de $\vec{F}$ em D.

O cálculo da integral $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ quando $\vec{F}$ é um campo gradiente pode ser feito em termos de um potencial φ como afirma o teorema abaixo. Este teorema é análogo ao teorema fundamental do cálculo para funções de uma variável.

Teorema 3.2. *Seja $\vec{F}$ um campo de vetores contínuo em um aberto D de $\mathbb{R}^n$. Se $\vec{F}$ é o gradiente de uma função $\varphi : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $\gamma : [a,b] \to D$ é uma curva lisa, então*

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Demonstração. Relembramos inicialmente que a derivada de $\varphi(\gamma(t))$ em relação a t é dada por $\vec{\nabla}\varphi(\gamma(t)).\vec{\gamma}'(t)$. Então temos

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_a^b \vec{\nabla}(\gamma(t)).\vec{\gamma}'(t)\,dt = \int_a^b (\varphi(\gamma(t)))'\,dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

como no enunciado.

□

O corolário a seguir é uma consequência imediata do Teorema 3.2.

Corolário 3.3. *Se um campo de vetores contínuo $\vec{F}$ é um campo gradiente, então a integral $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ depende apenas do ponto final e do ponto inicial da curva γ. Em particular, se γ é uma curva fechada esta integral é nula.*

4. Rotacional e campos gradientes

Observe que se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é de classe C^1 em um aberto D de $\mathbb{R}^2$ e φ é um potencial de $\vec{F}$ em D, então φ é de classe C^2. Portanto a seguinte igualdade deve ser verificada:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Logo concluimos que o campo de vetores $\vec{\text{Rot}}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$, chamado de *rotacional* de $\vec{F}$, é nulo. Este é o conteúdo do teorema abaixo, o qual fornece um critério que nos permite decidir se um dado campo de vetores pode ser um campo gradiente.

Teorema 4.1. *Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ um campo de vetores de classe C^1 em uma região aberta D de $\mathbb{R}^2$. Se $\vec{F}$ é um campo gradiente, então o seu rotacional é nulo, ou seja, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ em D.*

O conteúdo deste teorema pode escrito de outra forma, como no corolário abaixo.

Corolário 4.2. *Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ um campo de vetores de classe C^1 em uma região aberta D de $\mathbb{R}^2$. Se o rotacional de $\vec{F}$ não é nulo, então $\vec{F}$ não é um campo gradiente em D.*

Exemplo 4.3. O campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, definido em $D = \mathbb{R}^2$ tem rotacional $\vec{\text{Rot}}\,\vec{F} = \vec{j}$ e portanto $\vec{F}$ não é um vetor gradiente em D.

A recíproca do Teorema 4.1 não é verdadeira em geral, ou seja, um campo de vetores de classe C^1 pode ter rotacional nulo em um certo aberto D de $\mathbb{R}^2$ e não ser um campo gradiente em D.

Exemplo 4.4. Seja $\vec{F} = \dfrac{-y\,\vec{i} + x\vec{j}}{x^2+y^2}$, definido em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, possui rotacional nulo mas não é um campo gradiente em D.

De fato, se γ é a curva fechada simples e lisa dada por $\gamma(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta)$, onde $\rho > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, então

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2\,(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta)\;d\theta}{\rho^2} = 2\pi.$$

Como esta integral não é nula concluímos pelo Teorema 3.2 que $\vec{F}$ não é um campo gradiente. Enfatizamos o fato que esta integral não depende do raio ρ.

Exemplo 4.5. Consideramos as duas funções a seguir

$$\varphi(x,y) = \text{arctg}(\frac{y}{x}), \quad \text{definida em} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Eixo y}\}$$

e

$$\psi(x,y) = \text{arctg}(\frac{x}{y}), \text{definida em} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Eixo x}\}.$$

O gradiente destas funções são:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi(x,y) &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\,\frac{-y}{x^2}\,\vec{i} + \frac{1}{1+(y/x)^2}\,\frac{1}{x}\,\vec{j} = \\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}\end{aligned}$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\psi(x,y) &= \frac{1}{1+(x/y)^2}\,\frac{1}{y}\,\vec{i} + \frac{1}{1+(y/x)^2}\,\frac{-x}{y^2}\,\vec{j} = \\ &= \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{-x}{x^2+y^2}\,\vec{j}\end{aligned}$$

Observe que

$$\vec{\nabla}\varphi(x,y) = -\vec{\nabla}\psi(x,y) = \vec{F}(x,y) = \frac{-y\,\vec{i}}{x^2+y^2} + \frac{x\,\vec{j}}{x^2+y^2}.$$

Sendo assim $\vec{F}$ é um campo gradiente em $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Eixo x}\}$ e também em $\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Eixo y }\}$. Por outro lado, como vimos acima, o campo $\vec{F}$ não é um campo gradiente no seu domínio máximo de definição que é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Potencial de campos irrotacionais

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é um campo de classe C^1 em uma região aberta D de $\mathbb{R}^2$ e o seu rotacional é nulo, podemos tentar achar uma função φ que satisfaça as equações:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q.$$

Para isto usamos integração, por exemplo, podemos integrar esta primeira equação em relação à x e obter:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y) = \varphi_1(x,y) + C(y). \tag{5.1}$$

Derivando esta equação em relação à y e usando a segunda equação obtemos:

$$Q(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) + C'(y).$$

Escrevendo de outra maneira temos:

$$C'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y)\cdot$$

Aqui devemos observar que a função à esquerda da igualdade depende apenas de y e portanto a função à direita também deve depender apenas de y, ou seja, expressões envolvendo x devem se cancelar. Este cancelamento só ocorre se o rotacional do campo for nulo. Neste caso temos

$$Q(x,y) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) = B(y)$$

e integrando $C'(y) = B(y)$ em relação a y obtemos $C(y) = \int B(y)\,dy$.

Sendo assim, substituindo $C(y)$ na Equação 5.1 concluímos que

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int B(y)\,dy.$$

Observamos que, como P e Q são de classe C^1, as duas integrais (primitivas) do procedimento acima existem mas achá-las explicitamente pode depender de técnicas mais avançadas de integração pois eventualmente as funções envolvidas não são funções elementares como e^{x^2} ou $\sqrt[3]{1+xy}$.

Vamos achar o potencial de um campo de vetores para ilustrar o procedimento acima.

Exemplo 5.1 (Lista 2-(23-b))**.** Verifique se o campo $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$ é um campo gradiente em $D = \mathbb{R}^2$ e no caso afirmativo exiba um potencial $\varphi(x,y)$ para $\vec{F}$.

Iniciamos calculando o rotacional de $\vec{F}$ para saber se um possível potencial φ pode existir. Como

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^y + 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y + 1$$

concluímos que o rotacional de $\vec{F}$ é nulo em todo D. Então pode ser que exista um potencial para $\vec{F}$ em D. De fato, vamos ver mais tarde que neste caso (como o domínio D é simplesmente conexo) realmente existe um potencial φ em D. Para calculá-lo adotamos o procedimento que introduzimos acima para resolver as equações

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xe^y + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y \tag{5.2}$$

e achar φ. Integrando a primeira equação em relação a x obtemos:

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + xy + C(y).$$

Derivamos esta equação em relação a y e usamos a segunda igualdade na Equação 5.2 e obtemos

$$x^2e^y + x - 2y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2e^y + x + C'(y)$$

Assim temos que $C'(y) = -2y$, portanto podemos escolher $C(y) = -y^2$ e resulta que $\varphi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2$ é um potencial para $\vec{F}$ em D.

6. Campos gradientes no espaço

Podemos dizer que o conceito de campos gradientes no espaço é completamente análogo ao de campos gradientes no plano.

Definição 6.1. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\,\vec{k}$ um campo de vetores contínuo em um aberto D de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $\vec{F}$ é um *campo gradiente* em D quando existe uma função φ definida em D de classe C^1 tal que

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\vec{k},$$

ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = R.$$

se verificam em todo $(x, y, z) \in D$. Esta função φ quando existe é chamada de *função potencial* de $\vec{F}$ em D.

Observe que se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é de classe C^1 em um aberto D de $\mathbb{R}^3$ definimos o seu rotacional por

$$\vec{\mathrm{Rot}}\, \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

Se φ é um potencial de $\vec{F}$ em D, então φ é de classe C^2. Portanto as seguintes igualdades devem ser verificadas:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Analogamente temos

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0.$$

e

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0.$$

Logo concluimos que o rotacional $\vec{\mathrm{Rot}}\, \vec{F}$ é nulo.

Concluímos que vale o teorema a seguir, análogo ao Teorema 4.1 e também temos um critério que nos permite decidir se um dado campo de vetores no espaço pode ser um campo gradiente.

Teorema 6.2. *Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\,\vec{k}$ um campo de vetores de classe C^1 em uma região aberta D de $\mathbb{R}^3$. Se $\vec{F}$ é um campo gradiente, então o seu rotacional é nulo em D.*

Também temos o corolário abaixo.

Corolário 6.3. *Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ um campo de vetores de classe C^1 em uma região aberta D de $\mathbb{R}^2$. Se o rotacional de $\vec{F}$ não é nulo, então $\vec{F}$ não é um campo gradiente em D.*

Exemplo 6.4. O campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + x\vec{j}$, definido em $D = \mathbb{R}^2$ tem rotacional $\vec{\text{Rot}}\,\vec{F} = \vec{j}$ e portanto $\vec{F}$ não é um campo gradiente em D.

Da mesma forma que a recíproca do Teorema 4.1 não é verdadeira em geral, a recíproca do Teorema 6.2 também não é verdadeira em geral.

Exemplo 6.5. Seja $\vec{F} = \dfrac{-y\,\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}}{x^2+y^2}$, definido em $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eixo z}\}$, possui rotacional nulo mas não é um campo gradiente em D.

De fato, se γ é a curva fechada simples e lisa dada por $\gamma(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, 2)$, onde $\rho > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, então

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy + 3\,dz}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2\left(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta\right)\,d\theta}{\rho^2} = 2\pi.$$

Como esta integral não é nula o campo $\vec{F}$ não é um campo gradiente.

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de classe C^1 em uma região aberta D de $\mathbb{R}^3$ e o seu rotacional é nulo, podemos tentar achar uma função φ que satisfaça as equações:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R.$$

Para isto usamos integração como no caso de campos no plano, ressaltamos apenas que agora temos três variáveis e três equações.

Vamos passar diretamente para alguns exemplos para ilustrar a técnica discutida acima.

Exemplo 6.6 (Lista - (14-b))**.** Se $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 e $\vec{F} = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, então $\vec{F}$ é conservativo.

Os campos do tipo acima, com todas as variáveis separadas, são muitos especiais. É fácil ver que possuem potencial que também possuem variáveis separadas. Portanto são campos gradientes e também conservativos. De qualquer modo vamos aplicar abaixo a técnica de achar um potêncial para um campo em geral e no caso deste exemplo obtemos $\varphi(x,y,z) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(z)$, onde $\varphi_1(x) = \int f_1(x)\,dx$, $\varphi_2(y) = \int f_2(y)\,dy$ e $\varphi_3(z) = \int f_3(z)\,dz$.

É fácil verificar que o rotacional de $\vec{F}$ é nulo e portanto podemos tentar achar um potencial $\varphi(x,y,z)$ o qual deve satisfazer:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = f_1(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = f_2(y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = f_3(z).$$

Integrando a primeira equação e obtemos

$$\varphi(x,y,z) = \int f_1(x)\, dx + C_1(y,z),$$

que derivando em relação a y fornece

$$f_2(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z).$$

Então integramos em relação a y e obtemos

$$C_1(y,z) = \int f_2(y)\, dy + C_2(z)$$

e portanto $\varphi(x,y,z) = \displaystyle\int f_1(x)\, dx + \int f_2(y)\, dy + C_2(z)$. Derivando em relação a z obtemos $f_3(z) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = C_2'(z)$ e por integração em z concluímos que $C_2(z) = \displaystyle\int f_3(z)\, dz$. Desta forma chegamos a $\varphi(x,y,z) = \displaystyle\int f_1(x)\, dx + \int f_2(y)\, dy + \int f_3(z)\, dz$.

Concluímos que $\vec{F}$ é um campo gradiente e portanto é um campo conservativo. Outro modo de verificar este fato e usar um teorema que diz que todo campo de classe C^1, definido em um domínio simplesmente conexo e com rotacional nulo, é um campo conservativo.

Exemplo 6.7 (Lista 2 - (23-c)**.** Verifique se o campo $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2+8xy^2)\vec{i} + (3x^3y-3xy)\vec{j} - (4y^2z^2+2x^3z)\vec{k}$ é um campo gradiente em $D = \mathbb{R}^3$ e no caso afirmativo exiba um potencial $\varphi(x,y,z)$ para $\vec{F}$.

Inicialmente vamos calcular o rotacional de $\vec{F}$.

$$\vec{\text{Rot}}\, \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2+8xy^2 & 3x^3y-3xy & -(4z^2y^2+2x^3z) \end{pmatrix} =$$

Portanto o rotacional

$$\vec{\text{Rot}}\, \vec{F}(x,y,z) = -8yz^2\, \vec{i} + 6x^2z\, \vec{j} + (9x^2y - 3y - 16xy)\, \vec{k}$$

não é nulo e concluímos que $\vec{F}$ não é um campo gradiente em D.

Exemplo 6.8 (Lista 2- (23-d))**.** Verifique se o campo $\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - (y+z)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ é um campo gradiente em $D = \mathbb{R}^3$ e no caso afirmativo exiba um potencial $\varphi(x,y)$ para $\vec{F}$.

Inicialmente vamos calcular o rotacional de $\vec{F}$.

$$\vec{\text{Rot}}\,\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \\ x+z & -(y+z) & x-y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Como o rotacional de $\vec{F}$ é nulo podemos tentar achar um potencial para $\vec{F}$ em D. Para isto precisamos achar uma função $\varphi(x,y,z)$ que satisfaça as equações:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x+z, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -y-z \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x-y.$$

Começamos integrando a primeira equação em relação a x e obtemos

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xz + C_1(y,z).$$

Derivamos esta igualdade em relação a y e obtemos:

$$-y-z = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y}.$$

Agora integramos em relação a y e obtemos:

$$C_1(y,z) = -\frac{y^2}{2} - yz + C_2(z).$$

Agora temos que

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xz + C_1(y,z) = \frac{x^2}{2} + xz - \frac{y^2}{2} - yz + C_2(z)$$

Derivando em relação a z obtemos:

$$x-y = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x-y+C_2'(z).$$

Com isto concluímos que $C_2'(z) = 0$ e portanto podemos escolher $C_2(z) = 0$. Sendo assim chegamos que

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xz - yz.$$

é um potencial de $\vec{F}$ em D.

7. Campos conservativos

Os campos de vetores conservativos aparecem na natureza com grande frequência, como exemplo podemos citar a força peso ou o campo elétrico associado a uma carga puntiforme. Assim como no caso dos campos gradientes esse conceito existe no contexto decampos no $\mathbb{R}^n$ mas vamos enfatizar o caso $n = 2$ e $n = 3$.

Definição 7.1. Seja $\vec{F}$ um campo de vetores contínuo em um aberto D de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\vec{F}$ é um *campo conservativo* em D se uma das seguintes propriedades equivalentes ocorre:

(i) $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = 0$, para toda curva γ, lisa e fechada em D.

(ii) $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}.d\vec{r} = \int_\beta \vec{F}.d\vec{r}$, para todas curvas lisas e fechadas α e β em D que possuem os mesmos pontos iniciais e finais.

Se $\vec{F}$ é um campo conservativo, a integral $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ não depende de γ, depende apenas do ponto inicial p_i e do ponto final p_f de γ. Por isto usamos a notação $\int_{p_i}^{p_f} \vec{F}.d\vec{r}$ neste caso.

De acordo com o Corolário 3.3, todo campo gradiente é um campo conservativo. A recíprova deste fato também é verdadeira.

Teorema 7.2. *Se $\vec{F}$ é um campo conservativo em um aberto D de $\mathbb{R}^n$, então $\vec{F}$ é um campo gradiente em D.*

Demonstração. Consideramos um campo conservativo $\vec{F}$ em um aberto D de $\mathbb{R}^n$ e vamos mostrar que $\vec{F}$ possui uma função potencial φ definida em D. Para simplificar o argumento vamos supor que $n = 2$ e $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$.

Para definir φ escolhemos e fixamos um ponto (x_0, y_0) em D. Se (x, y) é um ponto arbitrário em D, definimos

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F}.d\vec{r},$$

onde $p_i = (x_0, y_0)$ é o ponto inicial e $p_f = (x, y)$ é o ponto final. Resaltamos aqui que $\varphi(x, y)$ está bem definida porque por hipótese a integral acima depende apenas do ponto inicial (x_0, y_0) que está fixado e do ponto final final (x, y).

Vamos mostrar que valem as igualdades

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q. \tag{7.1}$$

Para isto lembramos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to o} \frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h},$$

quando este limite existe. Então verificar a primeira igualdade em (7.1) é equivalente a mostra que

$$\lim_{h\to o}\left|\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} - P(x,y)\right| = 0, \tag{7.2}$$

Mas temos o seguinte

$$\left|\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} - P(x,y)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+h,y)} \vec{F}.d\vec{r} - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F}.d\vec{r} - h\,P(x,y)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \vec{F}.d\vec{r} - h\,P(x,y)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{(x,y)}^{(x+h,y)} |P(s,y)-P(x,y)|\;dt \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{|h|}\max\{|P(s,y)-P(x,y)| : \quad \text{onde} \quad x \leq s \leq x+h\}$$

Como $\max\{|P(s,y)-P(x,y)| : \quad \text{onde} \quad x \leq s \leq x+h\}$ tende a zero quando $h \to 0$ concluímos a validade de (7.2) como queremos. A segunda igualdade em (7.1) pode ser verifica de modo análogo e a omitiremos.

$\square$

8. Teorema de Green

Uma versão particular do Teorema de Green relaciona a integral de campos de vetores de classe C^1 no plano ao longo de curvas fechadas lisas e simples com a integral dupla da parte escalar do seu rotacional na região do plano limitada pela curva. Este teorema é a ferramenta mais importante para se calcular integrais de linha de campos de vetores.

Uma *curva de Jordam* é uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ contínua, fechada e simples. Foi provado por Jordam que uma tal curva divide o plano $\mathbb{R}^2$ em duas partes, uma parte limitada e outra ilimitada.

Definição 8.1. Um conjunto D de $\mathbb{R}^2$ é chamado de *simplesmente conexo*, se toda curva de Jordam em D limita uma região inteiramente contida em D. Isto é equivalente ao fato de que toda curva de Jordam possa ser deformada continuamente a um ponto de modo que a deformação não saia de D.

Exemplo 8.2. O aberto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ não é simplesmente conexo.

Teorema 8.3 (teorema de Green)**.** *Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ curvas de Jordam que se satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) *$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ são fechadas, simples e duas-a-duas disjuntas.*
(ii) *$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ limita uma região Γ de $\mathbb{R}^2$.*
(iii) *$\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ estão orientadas positivamente, ou seja, Γ fica à esquerda de cada $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.*

Se $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ é um campo de vetores de classe C^1 definido em um aberto D de $\mathbb{R}^2$ que contem Γ, então vale a seguinte igualdade:

$$\int_{\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Demonstração. Vamos dar uma ideia da prova deste teorema no caso particular de uma única curva de Jordam que limita uma região Γ do tipo

$$\Gamma : \begin{cases} \alpha(x) & \leq & y & \leq & \beta(x) \\ a & \leq & x & \leq & b \end{cases} ,$$

onde α e β são funções contínuas em $[a, b]$.

A fronteira de Γ é constituída de quatro curvas, a saber:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x) = (x, \alpha(x)), \quad \text{onde} \quad a \leq x \leq b, \\
&\sigma_2(x) = (b, y), \quad \text{onde} \quad \alpha(b) \leq y \leq \beta(b), \\
&\sigma_3(x) = (a + b - x, \beta(a + b - x)), \quad \text{onde} \quad a \leq x \leq b, \\
&\sigma_4(x) = (a, \alpha(a) + \beta(a) - y), \quad \text{onde} \quad \alpha(a) \leq y \leq \beta(b)
\end{aligned}$$

A curva σ_1 é o gráfico da função α percorrido de $(a, \alpha(a))$ até $(b, \alpha(b))$, σ_2 é o segmento de reta vertical de $(b, \alpha(b))$ até $(b, \beta(b))$, σ_3 é o gráfico de b percorrido de $(b, \beta(b))$ até $(a, \beta(a))$ e σ_4 é o segmento de reta de $(a, \beta(a))$ até $(a, \alpha(a))$. Isto implica que a fronteira de Γ está orientada positivamente.

Então basta provar que

$$\int_{\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3\cup\gamma_4} P(x,y)\,dx = -\iint_\Gamma \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy$$
$$\int_{\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3\cup\gamma_4} Q(x,y)\,dy = \iint_\Gamma \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\,dxdy$$

Vamos verificar apenas esta primeira igualdade uma vez que a segunda é completamente análoga. Para isto observamos que:

$$\int_{\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3\cup\gamma_4} P(x,y)\,dx = \int_{\sigma_1\cup\sigma_3} P(x,y)\,dx =$$
$$= \int_a^b P(x,\alpha(x))dx + \int_a^b P(a+b-x,\beta(a+b-x))\,dx =$$
$$= \int_a^b P(x,\alpha(x))dx - \int_a^b P(x,\beta(x))\,dx = -\int_a^b \left(P(x,\beta(x)) - P(x,\alpha(x))\right)\,dx =$$
$$= -\int_a^b\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx = -\iint_\Gamma \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy$$

□

Teorema 8.4. *Seja $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo de classe C^1 no aberto D de $\mathbb{R}^2$. Se D é simplesmente conexo e o rotacional de $\vec{F}$ é nulo, então $\vec{F}$ é um campo conservativo em D.*

Demonstração. Seja γ uma curva de Jordam em D e Γ a região limitada correspondente. Como D é simplesmente conexo a região Γ está contida em D e pelo Teorema 8.3 podemos escrever

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Gamma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\right) dxdy = 0.$$

Então segue que a integral de $\vec{F}$ sobre toda curva fechada em D é nula e portanto $\vec{F}$ é conservativo em D.

Para finalizar vamos combinar os Teoremas (3.2), (4.1), (7.2), (8.4), (8.3) e (8.4).

Teorema 8.5. *Se $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$ um campo de classe C^1 no aberto D de $\mathbb{R}^2$ então valem as seguintes implicações:*

(i)

$$\vec{F} \quad \textit{é campo gradiente em} \quad D \Leftrightarrow \vec{F} \quad \textit{é campo conservativo em} \quad D$$
$$\Rightarrow \textit{O rotacional de} \quad \vec{F} \quad \textit{é nulo em } D$$

(ii) *Se D é simplesmente conexo então vale a implicação*

$$\textit{O rotacional de } \vec{F} \textit{ é nulo } \Rightarrow \vec{F} \textit{ é campo conservativo em } D$$

□

Exemplo 8.6 (Modificação de Lista 2 -(10-c))**.** Calcule $\int_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x+\cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 3x - 2$ percorrida no sentido anti-horário.

Etapa 1 (Domínio do campo). $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j} = (y+e^{\sqrt{x}})\,\vec{i} + (2x+\cos y^2)\,\vec{j}$ e seu domínio é o semi-plano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ o qual é simplesmente conexo. Também temos que $\vec{F}$ é de classe C^1 em D.

Etapa 2 (Rotacional do campo).

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2 \;\Rightarrow\; \vec{\text{Rot}}\,\vec{F}(x,y) = \vec{k}$$

Etapa 3 (Região limitada).

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 & \leq & y & \leq & 3x-2 \\ 1 & \leq & x & \leq & 2 \end{cases}$$

A região Γ está contida no aberto D que é o domínio de $\vec{F}$ e sua fronteira é a curva γ, onde a orientação anti-horária é positiva.

Etapa 4 (Teorema de Green).

$$\int_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x+\cos y^2)\,dy = \iint_\Gamma dxdy = \int_1^2 \int_{x^2}^{3x-2} dydx =$$
$$= \int_1^2 \left(3x - 2 - x^2\right) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_1^2 = \frac{11}{2} - 2 - \frac{7}{3} = \frac{7}{6}.$$

Usamos o Teorema de Fubinni para calcular a integral $\iint_\Gamma dxdy$.

Exemplo 8.7. Calcule a integral $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, orientada no sentido horário.

(Domínio do campo). O domínio do campo $\vec{F} = \dfrac{-y\,\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$, é o aberto $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o qual não é simplesmente conexo. Também temos que $\vec{F}$ é de classe C^1 em D.

Etapa 1 (domínio do campo). $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j} = (y + e^{\sqrt{x}})\,\vec{i} + (2x + \cos y^2)\,\vec{j}$ e seu domínio é o semi-plano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ o qual é simplesmente conexo. Também temos que $\vec{F}$ é C^1 em D.

Etapa 2 (Rotacional do campo). Um cálculo simples mostra que $\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$, trata-se de um campo irrotacional em D.

Etapa 3 (Região limitada). A região limitada por γ não está contida em D. Isto nos obriga acrescentar mais uma curva. Seja $\sigma(\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Escolhemos o raio $\rho > 0$ suficientemente pequeno para que os traços de γ e σ não se interseptem.

Agora consideramos a região Γ interior à curva γ e exterior à curva σ, a qual está contida no aberto D. Observamos apenas que a σ está orientada negativamente em relação a esta região Γ.

Etapa 4 (Teorema de Green).

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} - \int_\sigma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$$

Mas já vimos no Exemplo 4.4 que esta integral sobre σ é igual a 2π, independentemente do raio $\rho > 0$. Desta forma concluímos que

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$