Análise de Dados e Simulação

Márcia Branco e Andressa Cerqueira

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
http:www.ime.usp.br/m̃branco

Processo de Poisson e Aplicação a Filas

Processo de Poisson Homogêneo

Considere $N(t)$ o número de ocorrências de um determinado evento no intervalo $(0, t)$.
Esse eventos formam um Processo de Poisson com taxa λ, $\lambda > 0$ se

- $N(0) = 0$. As ocorrências de eventos em intervalos disjuntos são independentes.
- A distribuição no número de eventos num determinado intervalo depende apenas do comprimento deste intervalo e não de sua localização.
- $$\lim_{h \to 0} \frac{P(N(h) = 1)}{h} = \lambda$$
- $$\lim_{h \to 0} \frac{P(N(h) \geq 2)}{h} = 0$$

Seja X_j o intervalo de tempo entre as ocorrências dos eventos $j-1$ e j e

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Podemos mostrar que:

- $N(t)$ tem distribuição $Poisson(\lambda t)$.
- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes e identicamente distribuidas com distribuição $Exp(\lambda)$.
- S_n tem distribuição $Gama(n, \lambda)$.
- $E[S_n] = \frac{n}{\lambda}$ e $Var[S_n] = \frac{n}{\lambda^2}$.

Algoritmo de Simulação do PP Homogêneo

(i) Faça $S = 0$ e $I = 0$.

(ii) Simule um número aleatório u e faça $x = -\frac{1}{\lambda} ln(u)$.

(iii) Faça $S = S + x$. Se $S > t$ pare.

(iv) Faça $I = I + 1$, $y(I) = S$ e volte a (ii).

Obs: $y(1), y(2), \ldots, y(I)$ são os valores simulados para os tempos de chegadas do processo. O valor de I representa o número de chegadas.

Exercício: Ônibus chegam a um evento esportivo de acordo com um PPH com taxa de 5 por hora. Cada ônibus pode conter $20, 21, \ldots, 40$ torcedores com igual probabilidade, independentemente do ônibus.

(a) Determine o número esperado de torcedores que chegam ao evento em 1 hora e sua variância.

(b) Descreva e implemente um algorítmo para simular o número de torcedores que chegam em 1 hora.

Solução:
$N = N(1)$ é o número de ônibus que chegam ao evento em 1 hora.
Y_j é o número de torcedores no ônibus j.
Suposições: $N \sim Poisson(5)$ e $Y_j \sim Uniforme\{20, 21, \ldots, 40\}$.
$T = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ é o número total de torcedores que chegam no evento.
Note que:
$E[T \mid N] = \sum_{j=1}^{N} E[Y_j \mid N] = N \times \left(\frac{20+40}{2}\right) = 30N$
Usando a propriedade $E[T] = E[E[T \mid N]]$ e o fato de $E[N] = 5$ temos

$$E[T] = 30 \times 5 = 150$$

Processo de Poisson Homogêneo

Solução: Para obter a variância usamos a propriedade $Var[T] = E[Var[T \mid N]] + Var[E[T \mid N]]$

Usando a independência entre os Y_j temos que:

$$Var[T \mid N] = Var[\sum_{j=1}^{N} Y_j \mid N] = NVar[Y_1]$$

Mas $Var[Y_1] = \frac{21^2-1}{12} = \frac{110}{3} = 36.667$
Logo,

$$Var[T] = \frac{110}{3}E[N] + Var[30N] = \frac{110}{3} \times 5 + 30^2 \times 5 = 4683.33$$

$$Dp[T] = 68.43$$

Processo de Poisson Não Homogêneo

O processo não é homogêneo se a distribuição do números de eventos depende também da localização do intervalo.

- $N(0) = 0$. As ocorrências de eventos em intervalos disjuntos são independentes.
- $$\lim_{h \to 0} \frac{P(\text{exatamente 1 evento em } (t, t+h))}{h} = \lambda(t)$$
- $$\lim_{h \to 0} \frac{P(\text{dois ou mais eventos em } (t, t+h))}{h} = 0$$

Obs: $\lambda(t)$ é denominada função intensidade e a função média é dada por

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \quad , \; t > 0.$$

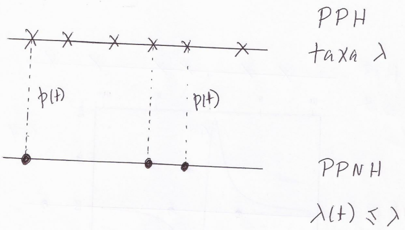
Processo de Poisson Não Homogêneo

Resultado 1: $N(t+s) - N(s)$ é uma v.a. com distribuição *Poisson* e média $m(t+s) - m(s)$.

Resultado 2: Suponha que eventos ocorram segundo um PP homogêneo de taxa λ, mas nem todos sejam contados. Um evento que ocorre no tempo t é contado com um probabilidade $p(t)$, independente do processo. Então os eventos contados formam um PP não homogêneo com função intensidade $\lambda(t) = \lambda p(t)$.

Obs: O resultado 2 poderá ser utilizado para simulação de um PPNH com função intensidade $\lambda(t)$. Primeiro buscamos um valor λ tal que $\lambda(t) \leq \lambda$. Depois obtemos as probabilidades de aceitação dos eventos fazendo $p(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda}$. Finalmente, simulamos de um PPH com taxa λ e aceitamos uma ocorrência no tempo t com probabilidade $p(t)$.

Processo de Poisson Não Homegêneo



$$p(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda}$$

Probabilidade de Aceitação

Exemplo: Simular de um PPNH até o tempo $t_0 = 10$ com função intensidade linear

$$\lambda(t) = 10 + t \ , \ 0 < t \leq 10.$$

Note que $\lambda(t) \leq 20$.
A probabilidade de aceitação é $p(t) = \frac{10+t}{20}$.
Essa probabilidade começa com o valor $1/2$ e aumenta com o crescimento de t.

Algoritimo:

(i) Simula x^* de um PPH com taxa 20 e um número aleatório u.
(ii) Se $u < \frac{10+x^*}{20}$ então faça $x = x^*$. Caso contrário, volte à (i).

Aplicação: Sistemas de Filas

- Clientes chegam de acordo com um PP (homogêneo ou não homogêneo).
- Sistema com um único servidor. Se o servidor está livre o cliente é atendido, caso contrário o cliente espera na fila.
- O tempo que o servidor demora para atender o cliente é uma v.a. Y com distribuição G.
- A partir de um tempo T não chegam mais clientes no sistema e os que já estavam são atendidos.

Interesse: Simular este sistema para determinar:

- o tempo médio gasto pelo cliente no sistema.
- o tempo médio, a partir de T, que o último cliente demora para sair.

Fila com um único servidor (algoritmo)

Variáveis

- Variável de tempo: t
- Variáveis contadoras: N_A: número de chegadas
  N_D: número de saídas
- Variável de estado do sistema: n: número de clientes no sistema
- t_A: tempo da próxima chegada de cliente
  t_D : tempo para o cliente ser atendido pelo servidor
  $t_D = \infty$ se não tem clientes no sistema para serem atendidos

Variáveis de interesse

- $A(i)$: tempo de chegada do cliente i
- $D(i)$: tempo de saída do cliente i
- T_p : tempo da última saída depois do tempo T

Fila com um único servidor (algoritmo)

Inicialização:

- $t = n = N_A = N_D = 0$
- Gere T_0 e faça $t_A = T_0$ e $t_D = \infty$

Caso 1: $t_A \leq t_D$ e $t_A \leq T$

- Faça $t = t_A$, $N_A = N_A + 1$ e $n = n + 1$
- Gere T_t e faça $t_A = T_t$
- Se $n = 1$ gere Y e faça $t_D = t + Y$
- Faça $A(N_A) = t$

Fila com um único servidor (algoritmo)

Caso 2: $t_D < t_A$, $t_D \leq T$

- Faça $t = t_D$, $N_D = N_D + 1$ e $n = n - 1$
- Se $n = 0$ faça $t_D = \infty$. Caso contrário, gere Y e faça $t_D = t + Y$
- Faça $D(N_D) = t$

Caso 3: $min(t_A, t_D) > T$, $n > 0$

- Faça $t = t_D$, $N_D = N_D + 1$ e $n = n - 1$
- Gere T_t e faça $t_A = T_t$
- Se $n > 0$ gere Y e faça $t_D = t + Y$
- Faça $D(N_D) = t$

Caso 4: $min(t_A, t_D) > T$, $n = 0$

- Faça $T_p = max(t - T, 0)$

Exemplo

Suponha que clientes chegam a um banco segundo um processo de Poisson com taxa 10 por hora. O banco possui apenas um servidor e a fdp do tempo de serviço é $g(y) = 20e^{-40y}(40y)^2$, $y > 0$. O banco permanece aberto por 9 horas, sendo que depois dessas 9 horas apenas os clientes que já estavam na fila são atendidos. Determine o tempo médio que o cliente gasta no banco e o tempo médio que o funcionário trabalha a mais durante 100 dias.

$Y \sim Gama(3, 40)$: tempo de atendimento do servidor

Simular os tempos de chegada do processo de Poisson com taxa 10. Definimos T_s como o tempo da primeira chegada depois do instante s.

- Simule $U \sim Unif(0, 1)$
- Faça $T_s = s - \frac{1}{10} logU$

Exemplo:

- Programa feito no R.
- Saídas:

  $A(i)$: tempo de chegada do cliente i

  $D(i)$: tempo de saída do cliente i

  T_p : tempo da última saída depois do tempo T
- Resultados:

  Média do tempo no sistema: 0.2050012

  Média do tempo extra: 0.1672725

Exercício

Utilizando a mesma situação do Exemplo 1, determine o tempo médio que o cliente gasta no banco e o tempo médio que o funcionário trabalha a mais durante 100 dias, considerando que os clientes chegam ao banco segundo um processo de Poisson com taxa λ, para $\lambda = 5, 15$ e 20. Interprete os valores obtidos e os compare com os valores de λ.