

# 7600054 — Sistemas Complejos

**Gonzalo Travieso**

2020-05-11

# Outline

---

- 1 Expoente de Lyapunov
- 2 Período 3
- 3 Fractais
- 4 Atratores estranhos

# Sensibilidade a condições iniciais

- Como medir a sensibilidade a condições iniciais?
- Num sistema com sensibilidade a condições iniciais existe geralmente um crescimento exponencial da distância entre as trajetórias.
- Considere  $x_0$  e  $x_0 + \epsilon$ , com  $\epsilon$  pequeno.

- Então

$$|f^t(x_0 + \epsilon) - f^t(x_0)| \propto \epsilon e^{t\lambda(x_0)}.$$

- Portanto

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{f^t(x_0 + \epsilon) - f^t(x_0)}{\epsilon} \right|.$$

- $\lambda(x_0)$  é o **expoente de Lyapunov**.

# Expoente de Lyapunov

- $e^{\lambda(x_0)}$  é o **fator de estiramento** da distância entre duas trajetórias começando em pontos vizinhos.
- Podemos também escrever:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^t}{dx}(x_0) \right|.$$

- Usando a regra da cadeia

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i) \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(x_i)|,$$

onde  $x_i = f^i(x_0)$ .

# Expoente de Lyapunov

---

- Para um mapa caótico, o expoente de Lyapunov é independente de  $x_0$ , com exceção de um conjunto de medida zero.
- Se o mapa é ergódico, podemos substituir a média na trajetória pela média no espaço:

$$\lambda = \int \ln|f'(x)|\rho(x)dx.$$

# Exemplos

- No caso de  $T_2(y)$  temos densidade  $\phi(y) = 1$  e derivada  $|T_2'(y)| = 2$  e portanto o seu expoente de Lyapunov é

$$\int_0^1 \ln 2 \, dx = \ln 2.$$

- O mapa logístico  $L_4(x)$  é conjugado a  $T_2(y)$  e portanto tem o mesmo expoente de Lyapunov. Isto pode ser confirmado usando  $L_4'(x) = 4(1 - 2x)$  e  $\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ , o que resulta em

$$\lambda = \int_0^1 \frac{\ln|4(1 - 2x)|}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \, dx = \int_0^1 \ln(4|\cos \pi u|) \, du = \ln 2.$$

# Expoente de mapas conjugados

- Por que mapas conjugados têm o mesmo expoente de Lyapunov?
- Isto é um resultado da regra da cadeia. Considere os mapas  $f(x)$  e  $g(y)$  conjugados pelo homeomorfismo  $y = h(x)$  e  $x = h^{-1}(y)$ :

$$x_{i+1} = f(x_i) = h^{-1}(g(h(x_i))).$$

- Então

$$f'(x_i) = \left. \frac{dh^{-1}}{dy} \right|_{y_{i+1}} \left. \frac{dg}{dy} \right|_{y_i} \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x_i}.$$

# Exponentes de mapas conjugados (cont)

- Portanto, o produto

$$\prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i)$$

será da forma

$$\cdots \frac{dh^{-1}}{dy} \Big|_{y_{i+1}} \frac{dg}{dy} \Big|_{y_i} \frac{dh}{dx} \Big|_{x_i} \frac{dh^{-1}}{dy} \Big|_{y_i} \frac{dg}{dy} \Big|_{y_{i-1}} \frac{dh}{dx} \Big|_{x_{i-1}} \cdots,$$

com os elementos derivadas de  $h$  e  $h^{-1}$  em pontos correspondentes  $x_i$  e  $y_i$  respectivamente se cancelando para 1.

- O resultado será

$$\frac{dh^{-1}}{dy} \Big|_{y_t} \cdot \prod_{i=0}^{t-1} g'(y_i) \cdot \frac{dh}{dx} \Big|_{x_0}.$$

# Exponentes de mapas conjugados (cont)

- E temos

$$\ln \prod_{i=0}^{t-1} |f'(x_i)| = \ln \left| \frac{dh^{-1}}{dy} \right|_{y_t} + \sum_{i=0}^{t-1} \ln |g'(y_i)| + \ln \left| \frac{dh}{dx} \right|_{x_0}.$$

- Mas a derivada inicial de  $h$  e final de  $h^{-1}$  são desprezíveis no limite de  $t$  grande.
- Portanto

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(x_i)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |g'(y_i)|.$$

# Casos experimentais

---

- Na análise experimental de sistemas, através de estudos numéricos ou levantamento de dados experimentais, não temos a expressão do mapa para provar que ele seja caótico.
- Os sistemas são considerados caóticos se:
  - Têm órbitas densas num subconjunto invariante.
  - Têm sensibilidade a condições iniciais avaliadas por um expoente de Lyapunov positivo.

# Período 3

- Um teorema de Sharkovsky indica que a existência de um certo período implica a existência de outros, na seguinte sequência:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright$$

$$2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright$$

$$2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright$$

$$2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright$$

$$\dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

- Isto é, primeiro os números ímpares em ordem crescente, depois os produtos do tipo  $2^i n$  onde  $n$  é um ímpar e os  $i$  e  $n$  aparecem em ordem crescente; por fim, as potências de 2 em ordem decrescente e finalmente o 1.
- Daí concluímos que se um mapa tem período 3, ele tem todos os outros períodos possíveis.

## Período 3 implica caos

- Li e York mostraram que, dado um intervalo  $\mathcal{I}$  e um mapa contínuo  $f : \mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}$ , se existe algum  $x_0 \in \mathcal{I}$  tal que

$$f^n(x_0) < x_0 < f(x_0),$$

com  $n$  ímpar, então existe uma órbita periódica de período  $k$  ímpar com  $1 < k \leq n$ .

- Ligando isto com o resultado anterior, vemos que o sistema terá neste caso infinitos pontos periódicos no intervalo.
- Ademais, se

$$f^3(x_0) \leq x_0 < f(x_0) < f_2(x_0)$$

ou

$$f^3(x_0) \geq x_0 > f(x_0) > f_2(x_0)$$

para algum  $x_0$ , então períodos  $k$  para todos os  $k$  existem.

# Conjunto ternário de Cantor

- Considere a sequência de subconjuntos de  $[0, 1]$  definida como:

$$J_0 = [0, 1]$$

$$J_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$J_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

$$\vdots$$

- O conjunto

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

é denominado o **conjunto ternário de Cantor**.

# Algumas características

---

- $\mathcal{C}$  é um conjunto fechado, pois é a interseção de conjuntos fechados.
- Todos os pontos de  $\mathcal{C}$  são pontos de fronteira (não há pontos interiores).
- $\mathcal{C}$  não é contável.
- Como ao produzir  $J_n$  a partir de  $J_{n-1}$  retiramos  $2^{n-1}$  intervalos de tamanho  $3^{-n}$ , a métrica de Lebesgue de  $\mathcal{C}$  vale

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 0.$$

# Medida de Hausdorff

- Para caracterizar melhor esse tipo de conjunto, Hausdorff propôs a seguinte métrica, denominada **métrica externa de Hausdorff em dimensão  $d > 0$**  do conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ :

$$H_d(\mathcal{A}) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_j (m(I_j))^d,$$

onde  $I_j$  são intervalos abertos com métrica de Lebesgue  $m(I_j) < \epsilon$  e tais que a união de todos os  $I_j$  cobre o conjunto  $\mathcal{A}$ .

- Um conjunto  $\mathcal{B}$  **cobre** o conjunto  $\mathcal{A}$  ou é uma **cobertura** de  $\mathcal{A}$  se todos os pontos de  $\mathcal{A}$  são também pontos de  $\mathcal{B}$ .
- O **ínfimo** de um conjunto de valores reais é o maior valor real que é menor ou igual a todos os valores do conjunto. Note que o ínfimo não precisa ser parte do conjunto.
- O ínfimo na expressão acima é tomado sobre todas as possíveis coberturas de  $\mathcal{A}$ .

# Propriedades

- Se  $H_{d_1}(\mathcal{A}) < \infty$ , então para todo  $d_2 > d_1$  temos  $H_{d_2}(\mathcal{A}) = 0$ , pois

$$\frac{(m(I_j))^{d_2}}{(m(I_j))^{d_1}} = (m(I_j))^{d_2-d_1} \leq \epsilon^{d_2-d_1}$$

que vai para zero com  $\epsilon \rightarrow 0$ .

- Por raciocínio similar, se  $0 < H_{d_1}(\mathcal{A}) < \infty$ , então para todo  $d_2 < d_1$  temos  $H_{d_2}(\mathcal{A}) = \infty$ .
- O valor

$$d_H(\mathcal{A}) = \inf \{d \mid H_d(\mathcal{A}) = 0\}$$

é denominado a **dimensão de Hausdorff** do conjunto  $\mathcal{A}$ .

# Dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor

- $\mathcal{C}$  é **auto-similar**, no sentido que

$$\mathcal{C} = 3 \left( \mathcal{C} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \right)$$

e

$$\mathcal{C} = 3 \left( \mathcal{C} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right) - 2.$$

- Aqui  $k\mathcal{A} = \{kx \mid x \in \mathcal{A}\}$ .
- Também é fácil de ver que, se  $\mathcal{A} = k\mathcal{B}$ , então  $H_d(\mathcal{A}) = k^d H_d(\mathcal{B})$ .

# Dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor

- Também

$$H_d(\mathcal{C}) = H_d(\mathcal{C} \cap [0, \frac{1}{3}]) + H_d(\mathcal{C} \cap [\frac{2}{3}, 1]).$$

- E ainda

$$H_d(\mathcal{C} \cap [0, \frac{1}{3}]) = H_d(\mathcal{C} \cap [\frac{2}{3}, 1]) = \frac{1}{3^d} H_d(\mathcal{C}).$$

- Juntando temos

$$H_d(\mathcal{C}) = \frac{2}{3^d} H_d(\mathcal{C}).$$

- Se  $0 < H_d(\mathcal{C}) < \infty$  precisamos

$$\frac{2}{3^d} = 1,$$

e portanto

$$d_H(\mathcal{C}) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

# Fractais

---

- O conjunto de Cantor é denominado um **fractal**.
- É uma característica comum de conjuntos fractais que sua dimensão de Hausdorff é não-inteira.
- Outra característica comum é a presença de auto-similaridade.

# Atratores

---

- Um conjunto fechado  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$  é um **conjunto atrator** de  $f : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$  se existe uma vizinhança  $N$  de  $\mathcal{A}$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}^t(N) = \mathcal{A}.$$

- Se um conjunto atrator contém uma órbita densa, ele é chamado um *atrator* de  $\mathbf{f}$ .

# Mapa do padeiro

- O mapa do padeiro generalizado é definido por:

$$b_{r_1, r_2, a}(x, y) = \begin{cases} (r_1 x, \frac{1}{a} y) & 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq a \\ (r_2 x + \frac{1}{2}, \frac{1}{1-a}(y-a)) & 0 \leq x \leq 1 \wedge a \leq y \leq 1 \end{cases}$$

com  $r_1, r_2, a$  em  $[0, 1/2]$ .

- Vamos usar aqui o caso especial onde  $r_1 = r_2 = r$ :

$$\tilde{b}_{r, a}(x, y) = \begin{cases} (rx, \frac{1}{a} y) & 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq a \\ (rx + \frac{1}{2}, \frac{1}{1-a}(y-a)) & 0 \leq x \leq 1 \wedge a \leq y \leq 1 \end{cases}$$

# Auto-similaridade

- O quadrado unitário  $[0, 1] \times [0, 1]$  é transformado por  $\tilde{b}_{r,a}$  em dois retângulos:

$$[0, r] \times [0, 1] \cup$$

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r] \times [0, 1].$$

- Após uma nova aplicação teremos quatro retângulos:

$$[0, r^2] \times [0, 1] \cup$$

$$[\frac{1}{2}r, r(\frac{1}{2} + r)] \times [0, 1] \cup$$

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r^2] \times [0, 1] \cup$$

$$[\frac{1}{2}(1 + r), \frac{1}{2} + r(\frac{1}{2} + r)] \times [0, 1].$$

# Auto-similaridade

- Vemos então que o mapa é auto-similar, pois a parte:

$$[0, r^2] \times [0, 1] \cup$$

$$[\frac{1}{2}r, r(\frac{1}{2} + r)] \times [0, 1]$$

com a coordenada  $x$  multiplicada por  $\frac{1}{r}$  é similar ao resultado da primeira iteração de  $\tilde{b}_{r,a}$ .

- Da mesma forma, a parte

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r^2] \times [0, 1] \cup$$

$$[\frac{1}{2}(1 + r), \frac{1}{2} + r(\frac{1}{2} + r)] \times [0, 1]$$

com a coordenada  $x$  somada de  $-\frac{1}{2}$  e multiplicada por  $\frac{1}{r}$  é similar ao resultado da primeira iteração de  $\tilde{b}_{r,a}$ .

# Dimensão de Hausdorff

- Isto permite-nos calcular a dimensão de Hausdorff do atrator de  $\tilde{b}_{r,a}(x, y)$ .
- A coordenada  $y$  é sempre totalmente coberta, e portanto contribui com um fator 1 para a dimensão.
- Indicando por  $\mathcal{B}_x$  o conjunto das coordenadas  $x$  dos pontos do atrator de  $\tilde{b}_{r,a}$  a auto-similaridade permite escrever:

$$\begin{aligned} H_d(\mathcal{B}_x) &= H_d(\mathcal{B}_x \cap [0, r]) + H_d(\mathcal{B}_x \cap [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r]) \\ &= 2H_d(\mathcal{B}_x \cap [0, r]). \end{aligned}$$

Também

$$H_d(\mathcal{B}_x) = \frac{1}{r^d} H_d(\mathcal{B}_x \cap [0, r]),$$

resultando em

$$H_d(\mathcal{B}_x) = 2r^d H_d(\mathcal{B}_x).$$

# Dimensão de Hausdorff

- Portanto para  $0 < H_d(\mathcal{B}_x) < \infty$  precisamos

$$2r^d = 1,$$

resultando em

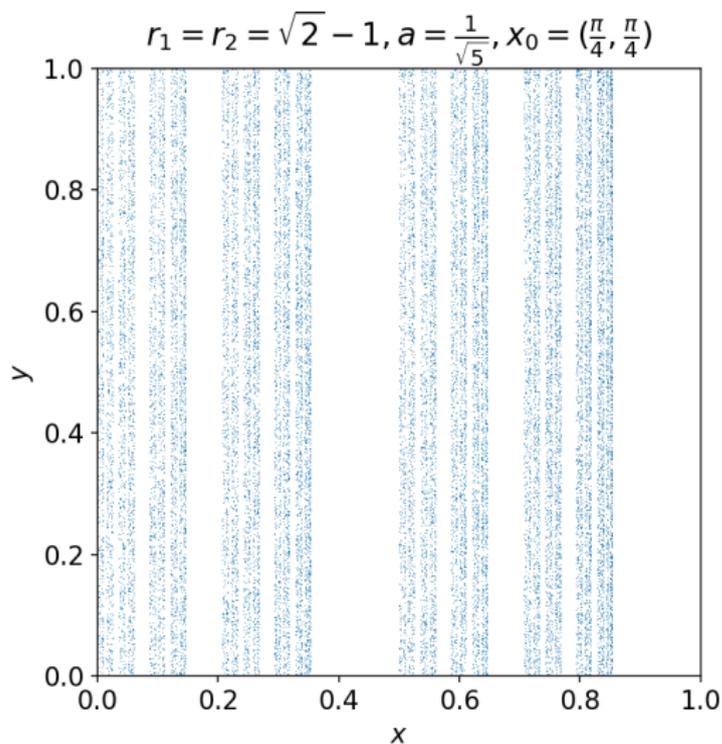
$$d_H(\mathcal{B}_x) = -\frac{\log 2}{\log r}.$$

- A dimensão do atrator de  $\tilde{b}_{r,a}$  é portanto

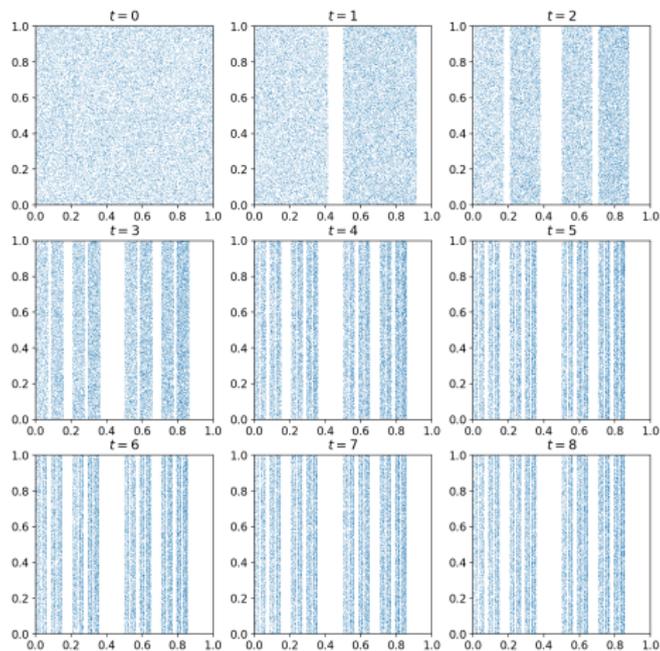
$$1 - \frac{\log 2}{\log r}.$$

- Para  $r = \frac{1}{2}$  a dimensão é 2.
- Para  $r < \frac{1}{2}$  a dimensão decai conforme  $r$  decai.

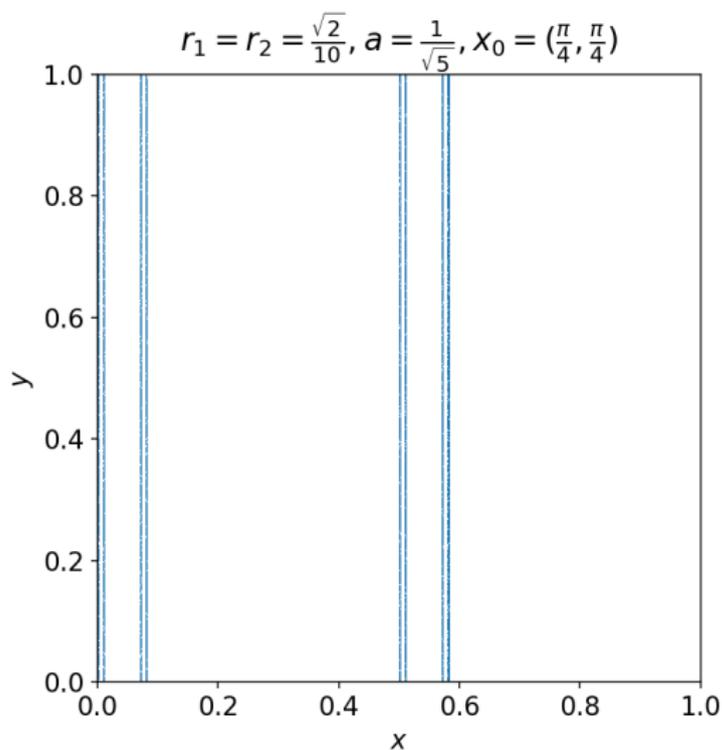
# Trajectoria



# “Fluido” do estado



# Influência de $r$



# Atratores estranhos

---

- Quando um atrator é:
  - caótico e
  - fractalele é denominado um **atrator estranho**.