Equações Diferenciais à Derivadas Parciais

Como vimos no início deste curso, equações diferenciais ordinárias são uma relação entre uma função a uma variável e suas derivadas.

Equações diferenciais a derivadas parciais (EDP) relacionam uma função multivariada com suas derivadas. Seja $u(x,y)$ uma função a duas variáveis. Então $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ é uma equação diferencial a derivadas parciais.

A derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ também pode ser escrita com a seguinte notação: u_x. Com essa notação, a equação anterior será dada por:

(a) $u_x + u_y = 0$

Outros exemplos:

(b) $u_x + u \cdot u_y = 0$

(c) $x^2 \cdot u_{xx} + u_{xy} + 3u_x - u = e^{x+y}$

(d) $u_{xxy} - u \cdot u_x + \sin(x \cdot u^2) = 0$

(e) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$, sendo $u \equiv u(x,y,z)$

(f) $u_{xyzz} + 2u_{zz} - u = \sin(x^2 + y \cdot z)$

A ordem de uma E.D.P. é igual à ordem de sua derivada mais elevada:

(a) 1ª ordem

(b) 1ª ordem

(c) 2ª ordem

(d) 3ª ordem

(e) 2ª ordem

(f) 4ª ordem

E.D.P.s Lineares

São combinações lineares das derivadas parciais da função, onde os coeficientes da combinação linear são funções das variáveis independentes. A forma geral de uma E.D.P. é:

Se $u(x,y)$ é uma função das variáveis independentes x e y, então:

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} a_{nm}(x,y) \cdot \frac{\partial^{n+m} u(x,y)}{\partial x^m \cdot \partial y^n} = g(x,y) \quad (\text{ordem}: N+M)$$

- Se $g(x,y)=0 \Rightarrow$ E.D.P. é dita linear-homogênea
- Se $g(x,y)\neq 0 \Rightarrow$ E.D.P. é dita linear não-homogênea

Nos exemplos que mostramos:

a) Linear homogênea a coeficientes constantes
b) Não-linear homogênea
c) Não-homogênea, mas linear
d) Não-linear homogênea
e) Linear homogênea a coeficientes constantes
f) Linear não-homogênea

E.D.P.'s de 1ª ordem lineares são da forma:

$a(x,y).u_x + b(x,y).u_y + C(x,y).u = f(x,y)$, sendo a, b, c e f são funções fornecidas.

E.D.P.'s de 2ª ordem lineares são da forma:

$a(x,y).u_{xx} + b(x,y).u_{xy} + C(x,y).u_{yy} + d(x,y).u_x + e(x,y).u_y + f(x,y).u = g(x,y)$.

A solução de E.D.P.'s lineares, em geral, é consideravelmente mais fácil que a solução de E.D.P's não-lineares. Muitas E.D.P.'s não-lineares somente podem ser resolvidas de forma aproximada, a partir do uso de métodos numéricos. Neste curso serão abordadas E.D.P.'s lineares com aplicações à área de geociências.

Propriedades das E.D.P.'s

Considerando a função $u(x,y)$, seja uma E.D.P. muito simples dada por:

$$u_x = 0 \qquad (329)$$

É evidente que $u_x = 0$ (função nula) significa que u não depende da variável x. Qualquer função do tipo $\varphi(y)$ é solução da equação (329). Dessa forma, podemos escrever que a solução de (329) é:

$$u(x,y) = \varphi(y) \qquad (330)$$

Sendo que $\varphi(y)$ é uma função arbitrária.

Exemplo 1: Considerando a E.D.P. $u_y = \varphi(y)$, a mesma pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int u_y.dy = \int \varphi(y)dy + C(x) \Rightarrow \boxed{u(x,y) = \int \varphi(y)dy + C(x)}$$

→ Solução

→ função arbitrária.

Verificando a solução:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int \varphi(y)\,dy + C(x)\right] = \varphi(y) + 0$$

Exemplo 2: Dada a E.D.P. $u_y = \cos(y)$, determine a solução geral:

Solução: Para obter a solução geral, basta integrarmos u_y em relação a y, tal que:

$$u(x,y) = \int u_y \cdot dy = \int \cos(y) \cdot dy = \boxed{\sin(y) + \varphi(x)}$$

$\hookrightarrow$ solução geral

sendo $\varphi(x)$ uma função arbitrária. Assim,

$$\sin(y),\ x^2+\sin(y),\ \tan(x)+\sin(y),\ \frac{1}{x}+\sin(y)$$

são todas soluções particulares dessa E.D.P.

Exemplo 3: Seja a E.D.P. $x \cdot u_x + y \cdot u_y = 0$ uma E.D.P. linear homogênea. Verifique que $u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ é solução geral dessa E.D.P.

Solução: Basta derivarmos $u(x,y)$ em relação a x e y e substituirmos essas derivadas na E.D.P.:

$$u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u_x(x,y) = -\frac{y}{x^2} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \text{ e } u_y(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cdot \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

As funções $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$, $\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ são soluções particulares dessa E.D.P.

Exemplo 4: Verifique que $u(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ é solução geral da E.D.P. $y \cdot u_x - x \cdot u_y = 0$, sendo φ uma função a uma variável derivável. $u_x(x,y) = 2x \cdot \varphi'(x^2+y^2)$, $u_y = 2y \cdot \varphi'(x^2+y^2) \Rightarrow$ $y \cdot 2x \cdot \varphi'(x^2+y^2) - x \cdot 2y \cdot \varphi'(x^2+y^2) = 2x \cdot y\,\varphi'(x^2+y^2) - 2xy \cdot \varphi'(x^2+y^2) = 0$

E.D.P. de 2ª ordem

E.D.P.'s de segunda ordem do tipo $u_{xy} = 0$ podem ser reduzidas a uma E.D.P. de 1ª ordem. No caso citado, $\frac{\partial u}{\partial y} = v(x,y)$, então $u_y = v_x$. Assim, $v_x = 0 \Rightarrow v(x,y) = \varphi(y)$. Como $u_y = v(x,y)$, então $u_y = \varphi(y)$, cuja solução geral é $u(x,y) = \int \varphi(y) \cdot dy + \psi(x)$, sendo φ e ψ funções arbitrárias.

Condições Iniciais e de Contorno

Uma diferença importante entre E.D.O.'s e E.D.P.'s é a informação suplementar necessária para a unicidade da solução. Por exemplo, na solução geral de uma E.D.O. linear aparecem uma ou mais constantes arbitrárias: podemos determinar essas constantes impondo condições iniciais, isto é, fixando os valores da solução e de suas derivadas até certa ordem em um determinado ponto. Podemos, também, obter unicidade, no caso de intervalos finitos, impondo condições nos extremos dos intervalos, as chamadas condições de contorno.

A situação para as E.D.P.'s é fundamentalmente diferente: mesmo no caso linear, a solução geral, quando é possível achá-la, envolve funções arbitrárias das variáveis independentes, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução.

No caso de E.D.P.'s, o espaço das variáveis independentes é multidimensional: procuramos soluções em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. É natural substituir os extremos do intervalo, para o caso $n=1$, ou seja, $\mathbb{R}$, pela borda $\partial\Omega$ da região Ω. Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas na borda da região (condições de contorno) temos um problema de valores de contorno ou, simplesmente, problema de contorno. Condições de contorno aparecem de maneira natural na descrição de fenômenos físicos estacionários (isto é, independentes do tempo). Encontramos, muitas vezes, condições do tipo:

$$\alpha \cdot u(x) + \beta \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \qquad (331)$$

Sendo α e β constantes dadas, f uma função dada em $\partial\Omega$ e $\partial u/\partial n$ a derivada de u na direção normal à $\partial\Omega$. No caso em que $\beta = 0$, a condição imposta pela equação (331) é conhecida como condição de Dirichlet. No caso em que $\alpha = 0$, temos uma condição de Neumann.

Como generalizar o conceito de condições iniciais (no caso de E.D.O.'s) para E.D.P's? Como no caso de E.D.P.'s temos mais de uma variável dependente (por exemplo, x e t), é natural fixar uma das variáveis (por exemplo, $t=0$) e impor o valor da solução e suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$, f e g funções dadas). Observe que quando $n=2$, com variáveis x, t, por exemplo, isso significa impor o valor da solução e de suas derivadas normais ao longo da curva $t=0$. Analogamente, no caso $n=3$, com variáveis x, y, t, fixar $t=0$ significa olhar a solução (e suas derivadas normais, se for o caso) ao longo da superfície $t=0$. Podemos, então, generaliza o conceito de condições iniciais impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva (se $n=2$) ou superfície (se $n=3$) inicial. O problema correspondente é um problema de valor inicial ou de Cauchy.

Em problemas físicos dependentes do tempo, como é o caso de fenômenos de difusão e de fenômenos oscilatórios, é muitas vezes conveniente separar a variável temporal t das variáveis espaciais x, y, z. O que ocorre muitas vezes é que os valores da solução e de suas derivadas em relação ao tempo até a ordem $K-1$ (supondo que a E.D.P. é de ordem K em t) são descritos no instante $t=0$ como função de x, y, z (condição inicial), ao mesmo tempo em que são impostas condições de contorno, para todo $t \geq 0$, em relação às variáveis espaciais. Tais problemas são chamados de problemas mistos.

Exemplo 1: O problema

$$u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \qquad (332.a)$$

$$u(x, p(x)) = f(x), \; x \in \mathbb{R} \qquad (332.b)$$

Sendo $p(x)$ e $f(x) \in \mathbb{R}$ funções dadas, é um problema de Cauchy. Como a E.D.P. é de primeira ordem, basta impor o valor da solução na curva inicial $y = p(x)$ no plano. Esse problema tem uma única solução.

Exemplo 2: O problema

$$u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \qquad (333.a)$$

$$u(0,y) = f(y), \; y \in \mathbb{R} \qquad (333.b)$$

é também um problema de Cauchy envolvendo uma E.D.P. linear de primeira ordem. A curva inicial é o eixo dos y. Ao contrário do exemplo anterior, este problema não tem solução se f não é constante ou tem uma infinidade de soluções se f é constante.

Exemplo 3: Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ um aberto limitado. Então o problema

$$u_t = \alpha^2 \cdot \nabla^2 u \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \qquad (334.a)$$

$$u(X,t) = 0, \; X \in \partial\Omega, \; t \geq 0, \qquad (334.b)$$

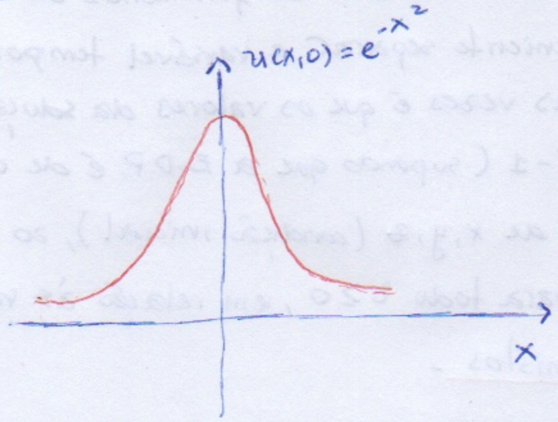
$$u(X, 0) = f(X), \; X \in \bar{\Omega} \qquad (334.c)$$

sendo $\bar{\Omega}$ um sólido e $X = (x,y,z)$ os pontos de $\mathbb{R}^3$, é um um problema misto: a condição $u(X,t) = 0$ para $X \in \partial\Omega$ e $t \geq 0$ é uma condição de contorno, enquanto a condição $u(X,0) = f(X)$ para $X \in \bar{\Omega}$ é uma condição inicial. Para que haja solução, f tem de satisfazer uma condição de compatibilidade

$$f(X) = 0, \quad \forall X \in \partial\Omega \qquad (335)$$

Em problemas mistos, a condição de contorno e a condição inicial não são inteiramente independentes e é preciso então que seja satisfeita uma condição de compatibilidade para que haja solução.

Exemplo 4: Determinar a solução particular da E.D.P. $u_t + 3u_x = 0$, sujeita à condição inicial $u(x,0) = e^{-x^2}$



A solução geral é $u(x,t) = \varphi(x - a.t)$. Impondo-se a condição à solução geral, temos:

$$u(x,0) = e^{-x^2} = \varphi(x) \quad \therefore \quad \varphi(x) = e^{-x^2} \quad e \quad u(x,t) = \varphi(x - at) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-(x-at)^2}}$$

↳ Solução particular que atende a condição inicial do problema

Exemplo 5: Sabendo-se que a solução geral da E.D.P. $u_{xx} - 2u_{xt} + u_{tt} = 0$ é $u(x,t) = x.\varphi(x+t) + t.\psi(x+t)$, sendo φ e ψ funções arbitrárias, determine a solução particular sujeita à condição inicial $u(x,0) = e^{-x}$ e a condição de contorno $u(0,t) = \cos(w.t)$

Solução: Impondo-se a condição de contorno, temos:

$$u(0,t) = t.\psi(t) = \cos(w.t) \Rightarrow \psi(t) = \frac{\cos(w.t)}{t}$$

Impondo-se a condição inicial, temos:

$$u(x,0) = x.\varphi(x) = e^{-x} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad \therefore$$

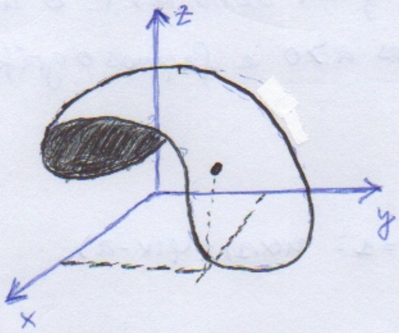
$$\psi(x+t) = \frac{\cos[w(x+t)]}{t+x} \quad e \quad \varphi(x) = \frac{e^{-(x+t)}}{x+t}$$

Logo, a solução particular sujeita às condições inicial e de contorno é:

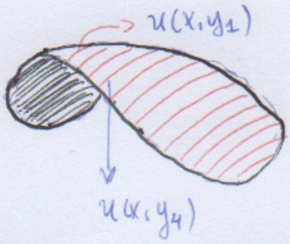
$$\boxed{u(x,t) = \frac{x.e^{-(x+t)}}{(x+t)} + \frac{t.\cos[w(x+t)]}{(x+t)}}$$

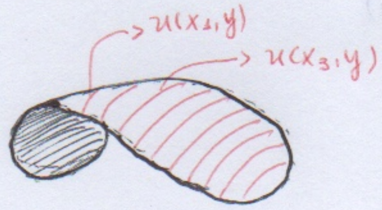
Visualização Gráfica de Soluções de E.D.P.'s

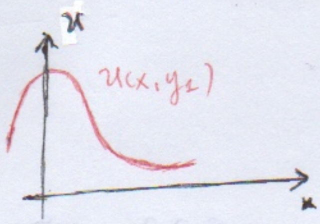
A solução de uma E.D.O. é uma função multidimensional ou multivariada. A visualização gráfica é relativamente simples para o caso de funções a duas variáveis, sendo mais difícil para o caso de três ou mais variáveis, sendo mais difícil para o caso de três ou mais variáveis. Supondo que $u(x,y)$ seja solução de uma E.D.P., a mesma pode ser visualizada como uma superfície:

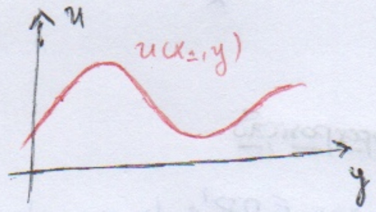


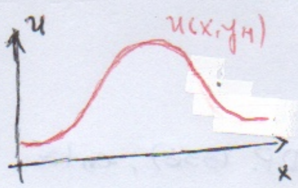
Outra forma de visualizar a solução é examinar seu comportamento relativo a cada variável independente em separado. Isso é feito construindo-se gráficos de $u(x,y_1)$, $u(x,y_2)$, $u(x,y_3)$, ... e gráficos de $u(x_1,y)$, $u(x_2,y)$, ...

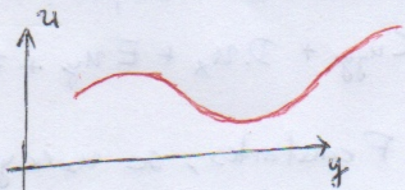




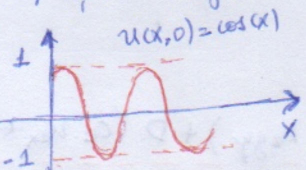


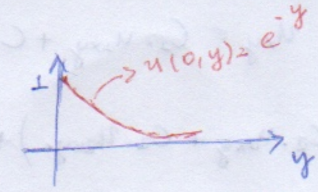


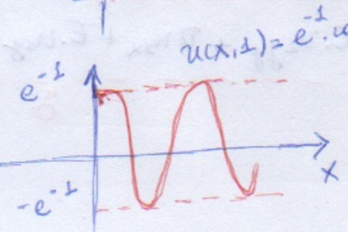


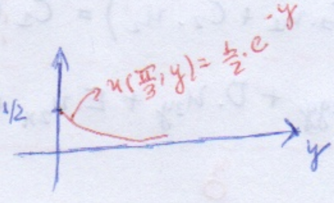


Exemplo: A função $u(x,y) = e^{-y}\cdot\cos x$





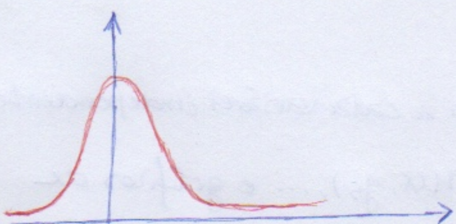




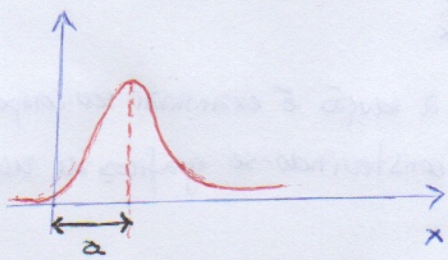
Freqüentemente, tem-se o caso em que as variáveis são uma coordenada espacial e outra espacial: $u(x,t)$. Nesse caso, a curva $u(x,t_1)$, com t_1 fixo, representa o comportamento da solução no instante t (é como uma fotografia da solução em $t=t_1$). A curva $u(x_1,t)$ representa a variação temporal da solução no ponto com coordenada x_1.

Exemplo: Visualização das soluções da E.D.P. $u_t + a u_x = 0$, com a constante. Essa é uma equação de onda de 1ª ordem. É fácil verificar que a solução geral dessa E.D.P. é $u(x,t) = \varphi(x - a.t)$, sendo φ uma função univariada derivável. Consideremos $a > 0$ e façamos o gráfico de $u(x,t)$ para $t=0$, $t=1$, $t=2$ e $t=3$:

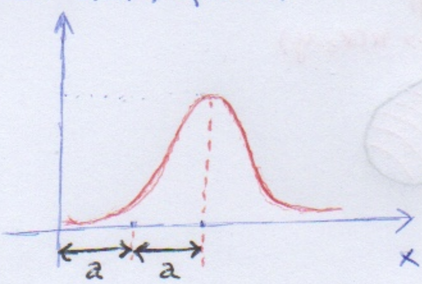
$t=0$: $u(x,0) = \varphi(x)$



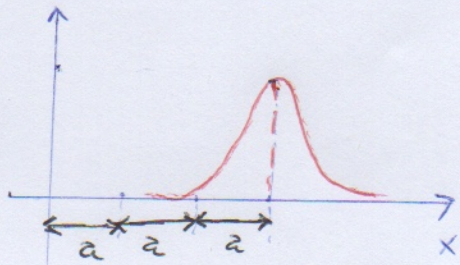
$t=1$: $u(x,1) = \varphi(x-a)$



$t=2$: $u(x,2) = \varphi(x-2a)$



$t=3$: $u(x,3) = \varphi(x-3a)$



Princípio da Superposição

É uma propriedade das E.D.P.'s lineares homogêneas de qualquer ordem. Dada a E.D.P. de 2ª ordem a coeficientes constantes, por exemplo:

$$A u_{xx} + B.u_{xy} + C u_{yy} + D.u_x + E u_y + F.u = 0, \quad (336)$$

com A, B, C, D, E e F constantes, se $u_1(x,y)$ e $u_2(x,y)$ são soluções da E.D.P. (336), então $u(x,y) = C_1.u_1(x,y) + C_2.u_2(x,y)$, sendo C_1 e C_2 constantes arbitrárias, também é solução de (336). De fato, como $u_x = C_1 u_{1x} + C_2 u_{2x}$, $u_{xx} = C_1.u_{1xx} + C_2.u_{2xx}$, $u_y = C_1.u_{1y} + C_2.u_{2y}$, $u_{yy} = C_1.u_{1yy} + C_2.u_{2yy}$, $u_{xy} = C_1.u_{1xy} + C_2.u_{2xy}$, então:

$$A(C_1 u_{1xx} + C_2 u_{2xx}) + B(C_1.u_{1xy} + C_2.u_{2xy}) + C(C_1.u_{1yy} + C_2.u_{2yy}) + D.(C_1.u_{1x} + C_2.u_{2x}) + E(C_1.u_{1y} + C_2.u_{2y}) + F(C_1.u_1 + C_2.u_2) = C_1\underbrace{(A u_{1xx} + B.u_{1xy} + C.u_{1yy} + D.u_{1x} + E.u_{1y} + F.u_1)}_{=0} + C_2\underbrace{(A.u_{2xx} + B.u_{2xy} + C.u_{2yy} + D.u_{2y} + E.u_{2x} + F.u_2)}_{=0} = 0$$

Pelo mesmo raciocínio, mostra-se que se $u_1(x,y), u_2(x,y), \ldots, u_n(x,y)$ são soluções de (336), então $u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k . u_k(x,y)$, sendo $c_1, c_2, \ldots, c_k$ constantes, é solução de (336). Embora tenhamos assumido que as funções c_k são constantes, o princípio também se aplica a funções variáveis.

Uma E.D.P. linear pode ter infinitas soluções particulares enumeráveis. Por exemplo, a E.D.P. $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ tem infinitas soluções particulares $u_k(x,t) = \sin(k.w.t).\sin\left(\frac{k.w.}{a}x\right)$, sendo w uma constante e $k = 1, 2, \ldots$

Pelo princípio da superposição, a série $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k . u_k(x,t)$ é solução, sendo c_k constantes.

Uma E.D.P. linear pode ter infinitas soluções não enumeráveis na forma $u(x,t,\lambda)$, sendo λ um parâmetro real. Por exemplo, a E.D.P. $u_t = a^2 . u_{xx}$ tem soluções $u(x,t,\lambda) = e^{-\lambda^2 . t} . \cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Pelo princípio da superposição, dada uma função $f(\lambda)$, a função $v(x,t) = \int f(\lambda) . u(x,t,\lambda) d\lambda$ é solução da E.D.P.

E.D.P.'s lineares de interesse para as Geociências

Há três E.D.P.'s de larga aplicação em Ciências da Terra:

(i) Equação de onda;

(ii) Equação de difusão;

(iii) Equação de Poisson (Equação de Laplace);

Outras equações diferenciais parciais muito importante são as seguintes:

(iv) Equação de Helmholtz;

(v) Equação de Schrödinger (Descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo; Análogo quântico da 2ª lei de Newton);

(vi) Equação de Klein-Gordon.

As E.D.P.'s de maior aplicabilidade na área de geociências dadas por (i), (ii) e (iii) são lineares a coeficientes constantes:

- As equações (i) e (ii) envolvem coordenadas espaciais e temporais;
- A equação (iii) envolve somente variáveis espaciais;
- A equação (i) envolve transporte de energia;
- A equação (ii) envolve transporte de massa ou energia;
- A equação (iii) envolve a modelagem de campos (gravitacional, elétrico, magnético), etc.

As E.D.P.'s em questão da forma:

(i) Equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{sendo } u \equiv u(x,t) \quad (1D) \qquad (337)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,t) \quad (2D) \qquad (338)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,z,t) \quad (3D) \qquad (339)$$

A equação de onda também pode ser escrita como: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u$, sendo:

$$\nabla^2 u = \begin{cases} u_{xx} & (1D) \\ u_{xx} + u_{yy} & (2D) \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & (3D) \end{cases}$$

∇^2 é o operador Laplaciano.

(ii) Equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{sendo } u \equiv u(x,t) \quad (1D) \qquad (340)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,t) \quad (2D) \qquad (341)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \text{ sendo } u \equiv u(x,y,z,t) \quad (3D) \qquad (342)$$

A equação de difusão também pode ser escrita como: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u$, sendo:

$$\nabla^2 u = \begin{cases} u_{xx} & (1D) \\ u_{xx} + u_{yy} & (2D) \\ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} & (3D) \end{cases}$$

(iii) Equação de Poisson e de Laplace

• Poisson: $\nabla^2 u = f$

$$u_{xx} = f(x) \quad (1D) \qquad (343)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y) \quad (2D) \qquad (344)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z) \quad (3D) \qquad (345)$$

• Laplace: $\nabla^2 u = 0$

$$u_{xx} = 0 \quad (1D) \qquad (346)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2D) \qquad (347)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (3D) \qquad (348)$$

E.D.P.'s lineares de segunda ordem: Classificação

Um dos pontos mais importantes para o estudo das E.D.P.'s lineares de 2ª ordem é a classificação dessas equações. Vamos considerar apenas duas variáveis independentes numa primeira análise, de modo que a E.D.P. mais geral é da forma:

$$A u_{xx} + B.u_{xy} + C.u_{yy} + D.u_x + E.u_y + F.u = G \qquad (349)$$

Sendo $u = u(x,y)$ a solução da E.D.P e $A = A(x,y)$, $B = B(x,y)$, etc. funções constantes. Sabendo que a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (350)$$

representa uma hipérbole, parábola ou elipse de acordo com:

$$\Delta = B^2 - 4A.C = \begin{cases} >0, & \text{hipérbole} \quad (351.a) \\ =0, & \text{parábola} \quad (351.b) \\ <0, & \text{elipse} \quad (351.c) \end{cases}$$

Podemos tomar emprestado essa nomenclatura e classificar a equação (349) em hiperbólica, parabólica e elíptica em um ponto (x,y), conforme:

$$\Delta = B^2 - 4.A.C. = \begin{cases} >0, & \text{E.D.P. hiperbólica} \quad (352.a) \\ =0, & \text{E.D.P. parabólica} \quad (352.b) \\ <0, & \text{E.D.P. elíptica} \quad (332.c) \end{cases}$$

Observação importante: A classificação de E.D.P.'s dessa forma é independente do sistema de coordenadas.

As equações de nosso interesse neste curso são classificadas como:

- Equação de onda: E.D.P. hiperbólica
- Equação de difusão: E.D.P. parabólica
- Equação de Poisson e Laplace: E.D.P. elíptica

Neste módulo da disciplina estudaremos a equação de onda e a equação de Poisson (Laplace).

Equação de Onda

Onda é qualquer sinal que se transmita, de um ponto a outro, com uma velocidade definida, sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro. Uma onda transporta somente energia e momento!

A equação de onda é muito importante em sismologia, por exemplo. Quando um terremoto ocorre, ele libera parte da energia acumulada devido às tensões tectônicas em forma de ondas sísmicas. Ondas sísmicas são, portanto, manifestações dos pulsos energéticos liberados pelos terremotos que fazem as partículas das rochas vibrarem em várias direções.

Infelizmente, devido à limitação de tempo, não farei a demonstração da derivação da equação de onda. Vocês podem encontrar demonstrações nas referências bibliográficas sugeridas no início deste curso.

Solução da Equação de onda (1D)

A equação de onda $u_{tt} = a^2 . u_{xx}$ tem solução geral do tipo:

$$u(x,t) = \varphi(x-a.t) + \psi(x+at) \qquad (353)$$

sendo φ e ψ funções à variável duplamente derivável. De fato, quando substituímos a equação (359) na equação de onda, obtemos:

$$u_x = \varphi'(x-at) + \psi'(x+at)$$

$$u_{xx} = \varphi''(x-at) + \psi''(x+at)$$

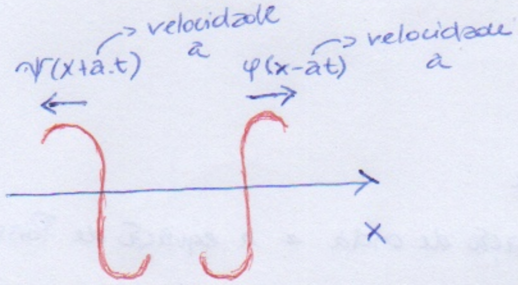
$$u_t = (-a).\varphi'(x-a.t) + a.\psi'(x+at)$$

$$u_{tt} = a^2.\varphi''(x-a.t) + a^2.\psi''(x+at)$$

$$u_{tt} = a^2 \underbrace{\left[\varphi''(x-a.t) + \psi''(x+a.t)\right]}_{u_{xx}} \therefore$$

$$\boxed{u_{tt} = a^2 . u_{xx}}$$

Tem-se, dessa forma, que a solução geral da equação de onda é uma onda propagando-se com velocidade de $\underline{a}$ na direção de x crescente somada a uma onda $\psi(x+at)$ propagando-se com velocidade $\underline{a}$ na direção de x decrescente.



Equação de onda 1D - Solução em domínio infinito: Fórmula de D'Alembert

A equação de onda dada por:

$$u_{tt} = a^2 . u_{xx} \qquad (354)$$

foi um dos problemas mais importantes do século XVIII. O primeiro a estudá-la foi D'Alembert, seguido de Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange. Foram obtidas soluções em diversas formas e a discussão sobre os méritos e as relações entre essas soluções levantou questões fundamentais, como, por exemplo, o que é uma função, que só foram resolvidas no século seguinte.

Vamos, aqui, determinar a solução da equação de onda dada pela equação (354) quando o domínio é infinito, ou seja $-\infty < x < +\infty$ e $t \geq 0$, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{(posição inicial)} \qquad (355)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad \text{(velocidade inicial)} \qquad (356)$$

sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções fornecidas. Como dissemos, a equação de onda tem solução na forma da equação (353), sendo φ e ψ funções univariáveis arbitrárias, duplamente variáveis e $\underline{a}$ a velocidade de propagação da onda. Se $a>0$, então $\varphi(x-a.t)$ e a onda está se propagando no sentido crescente de x. Se $a<0$, $\psi(x+a.t)$ e temos a onda se propagando no sentido de x decrescente.

Assim, devemos determinar as funções φ e ψ de modo que a equação (353) satisfaça as condições iniciais. Impondo-se a condição (355), temos:

$$u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \qquad (357)$$

Derivando-se a equação (353) em relação ao tempo, chegamos à:

$$u_t(x,t) = (-a).\varphi'(x-at) + (a)\psi'(x+at) \qquad (358)$$

Impondo-se a condição da equação (356), temos:

$$u_t(x,0) = (-a).\varphi'(x) + a\psi'(x) = g(x) \qquad (359)$$

Se nós integrarmos a equação (359) em relação a x, obtemos:

$$a\int_0^x -\varphi'(\lambda)d\lambda + a.\int_0^x \psi'(\lambda)d\lambda = \int_0^x g(\lambda)d\lambda \qquad (360)$$

$$-a\left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] + a\left[\psi(x) - \psi(0)\right] = \int_0^x g(\lambda)d\lambda \qquad (361)$$

$$a\left[-\varphi(x) + \psi(x)\right] = \int_0^x g(\lambda)d\lambda + a\left[-\varphi(0) + \psi(0)\right] \qquad (362)$$

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x g(\lambda)d\lambda + \underbrace{\left[\psi(0) - \varphi(0)\right]}_{\text{constante} = C} \qquad (363)$$

Portanto, das equações (357) e (363) formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) & (364.a) \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x g(\lambda)d\lambda + C & (364.b) \end{cases}$$

Somando-se as equações (364a) e (364.b), chegamos à:

$$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x)}{2} + \frac{C}{2}} \quad (365)$$

Substituindo a equação (365) na equação (364.a), obtemos:

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1}{2a}\int_0^x g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x)}{2} - \frac{C}{2}} \quad (366)$$

Agora, devemos substituir φ e ψ na solução geral e teremos uma solução particular que atende as condições iniciais:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x-at)}{2} - \frac{C}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} g(\lambda)d\lambda + \frac{f(x+a.t)}{2} + \frac{C}{2} \quad \ldots$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-a.t) + \frac{1}{2}(x+a.t) + \frac{1}{2.a}\int_0^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda - \frac{1}{2a}\int_0^{x-a.t} g(\lambda)d\lambda} \quad (367)$$

↳ Fórmula de D'Alembert

A fórmula de D'Alembert nos permite escrever diretamente a solução da equação de onda que satisfaz as condições $\{u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x)\}$. No caso em que as condições iniciais são $\{u(x,0),\ u_t(x,0) = 0$ (velocidade inicial nula) $\}$, a solução denomina-se onda de deslocamento:

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}f(x-a.t)}_{\substack{\text{onda direta} \\ \overrightarrow{a}}} + \underbrace{\frac{1}{2}f(x+a.t)}_{\substack{\text{onda reversa} \\ \overleftarrow{a}}} \quad (368)$$

No caso em que $\{u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = g(x)\}$, a solução denomina-se onda de impulso:

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2a}\int_0^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda}_{\substack{\text{onda reversa} \\ \overleftarrow{a}}} + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0} g(\lambda)d\lambda}_{\substack{\text{onda direta} \\ \overrightarrow{a}}} \quad (369)$$

A equação (367) pode ser escrita de forma mais compacta, observando-se que:

$$\int_0^{x+a.t} g(\lambda).d\lambda - \int_0^{x-a.t} g(\lambda).d\lambda = \int_0^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda + \int_{x-at}^{0} g(\lambda)d\lambda = \int_{x-at}^{x+a.t} g(\lambda)d\lambda.$$ Portanto,

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-at) + \frac{1}{2}(x+a.t) + \frac{1}{2a}\int_{x-a.t}^{x+at} g(\lambda)d\lambda} \quad (370)$$