SEMINARIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS-MAT 450

Solução prolbema 4 - 2^a lista

Antônio Luiz Pereira

Mostre que, se a é um número real positivo e se n é um número natural, então vale a desigualdade: $a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right)$

Se $b = \sqrt{a}$ temos $a^n + \frac{1}{a^n} - 2 = (b^n - \frac{1}{b^n})^2$ e $n^2(a + \frac{1}{a} - 2) = n^2(b - \frac{1}{b})^2$.

Portanto $a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2\left(a + \frac{1}{a} - 2\right) \iff (b^n - \frac{1}{b^n})^2 \geq n^2(b - \frac{1}{b})^2$.

Como o valor da Ãºltima expressão não muda se trocamos b por $\frac{1}{b}$, podemos supor $b \geq 1$ e então

$(b^n - \frac{1}{b^n})^2 \geq n^2(b - \frac{1}{b})^2 \iff b^n - \frac{1}{b^n} \geq n(b - \frac{1}{b})$.

Vamos provar a última desigualdade por indução finita.

Se $n = 1$, os dois lados da igualdade sÃ£o nulos, portanto ela vale para $n = 1$.

Suponhas que ela vale para $n = k \geq 1$, ou seja:

$$b^k - \frac{1}{b^k} \geq k(b - \frac{1}{b}).$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
b^{k+1} - \frac{1}{b^{k+1}} &= b^{k+1} - \frac{1}{b^{k-1}} + \frac{1}{b^{k1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \\
&= b\left(b^k - \frac{1}{b^k}\right) + \frac{1}{b^{k1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \\
&= b^k - \frac{1}{b^k} + (b-1)\left(b^k - \frac{1}{b^k}\right) + \frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \\
&\geq k\left(1 - \frac{1}{b}\right) + b^{k+1} - \frac{1}{b^{k-1}} - b^k + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{b^{k-1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \\
&\geq k\left(1 - \frac{1}{b}\right) + b^{k+1} - b^k + \frac{1}{b^k} - \frac{1}{b^{k+1}} \\
&\geq k\left(1 - \frac{1}{b}\right) + b^{k+1}\left(1 - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b^k}\left(1 - \frac{1}{b}\right) \\
&\geq (k+1)\left(1 - \frac{1}{b}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$b^k - \frac{1}{b^k} \geq k\left(b - \frac{1}{b}\right) \Longrightarrow b^{k+1} - \frac{1}{b^{k+1}} \geq (k+1)\left(1 - \frac{1}{b}\right),$$

e segue que $b^n - \dfrac{1}{b^n} \geq n\left(b - \dfrac{1}{b}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.