

FÍSICA III — AULAS DE 4 E 5 DE MAIO

CAPACITORES: ENERGIA E DIELÉTRICOS.

Energia armazenada no capacitor

Aprendemos, na aula de 28 de abril, que um capacitor armazena carga elétrica e mantém uma diferença de potencial entre suas placas. Sabemos, também, que uma carga muda de energia quando passa de um ponto A , com potencial V_A , para outro ponto B , com potencial V_B . Podemos esperar, portanto, que o capacitor armazene energia. Queremos saber, portanto, quanta energia está armazenada num capacitor com capacitância C carregado com carga Q .

Trabalho

Para calcular a energia, vamos imaginar um capacitor que é carregado passo a passo. Começaremos com carga zero e vamos transportar carga positiva de uma das placas até a outra, até acumular uma carga positiva Q na placa de chegada. Nesse ponto, teremos deixado uma carga $-Q$ na placa de origem.

A Fig. 1 ajuda a visualizar. Levaremos uma carga diferencial dq de cada vez. Para levar a carga dq do ponto C na figura até o ponto D , teremos de realizar trabalho. No início do processo, com o capacitor descarregado, o trabalho é zero. À medida que carga positiva se acumula na placa superior e carga negativa na inferior, cria-se um campo elétrico entre elas. O campo tem direção vertical e sentido descendente. Ele se opõe, portanto, ao transporte de mais carga.

Para levar a carga dq do ponto C ao ponto D , é necessário vencer a força elétrica, isto é, exercer força igual e contrária à força elétrica. A força mínima necessária para vencer o campo elétrico é $-dq\vec{E}$. O trabalho realizado por quem transporta a carga é, portanto,

$$dW = \int_C^D (-dq\vec{E}) \cdot d\vec{r}, \quad (1)$$

Podemos escrever a Eq. (1) na forma

$$dW = dq \left(- \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{r} \right), \quad (2)$$

que é conveniente porque o termo entre parênteses no lado direito é a diferença de potencial $V_D - V_C$.¹

Para ver que essa diferença é positiva, precisamos apenas notar que as linhas de força começam na placa superior e acabam na placa inferior e lembrar que o potencial diminui quando avançamos no sentido de uma linha de força. Isso entendido, podemos escrever a seguinte expressão para o trabalho:

$$dW = dqV(q), \quad (3)$$

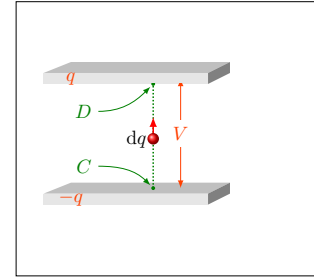


Figura 1: Deslocamento de carga entre as placas de um capacitor.

Se em lugar de levar cargas positivas no sentido indicado na Fig. 1, resolvêssemos levar cargas $-dq$, negativas, no sentido oposto, o resultado seria o mesmo: acúmulo de cargas positivas na placa superior e de cargas negativas na inferior. O campo elétrico seria, novamente, descendente, e o trabalho necessário para levar $-dq$ de cima seria também positivo, porque o campo empurraria as cargas negativas para cima, no sentido oposto ao do deslocamento.

¹ O potencial do ponto D é $V_D = - \int_{\vec{O}}^D \vec{E} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{O}$ é o ponto de referência, e o potencial do ponto C é $V_C = - \int_{\vec{O}}^C \vec{E} \cdot d\vec{r}$.

onde $V(q) = V_D - V_C$, isto é, $V(q)$ é a diferença de potencial entre a placa positiva e a placa negativa quando a carga acumulada na primeira é q .

Energia

O trabalho dW é a energia diferencial dU que o capacitor ganha² quando se transfere a carga dq de C para D . A energia acumulada no capacitor carregado com carga Q é, portanto,

$$U(Q) = \int_0^Q V(q) dq. \quad (4)$$

Para completar o cálculo, precisamos agora relacionar o potencial $V(q)$ com a carga q que dá origem a ele. Isso é simples, porque sabemos que o potencial cresce linearmente com a carga:

$$V = \frac{q}{C}. \quad (5)$$

Essa proporcionalidade reduz o lado direito da Eq. (4) a uma integral conhecida,

$$U(Q) = \int_0^Q \frac{q}{C} dq. \quad (6)$$

Efetuada a integral, chegamos ao resultado

$$U(Q) = \frac{Q^2}{2C}, \quad (7)$$

ou, se substituirmos Q por CV no lado direito,

$$U(V) = C \frac{V^2}{2}. \quad (8)$$

Energia elétrica e energia mecânica

A Eq. (8) reforça a analogia entre propriedades elétricas de capacitores e propriedades mecânicas de molas. A Fig. 2 mostra o que sabemos. A carga Q do capacitor corresponde à força F exercida pela mola, enquanto a diferença de potencial V corresponde à deformação x da mola. A carga é proporcional à diferença de potencial, com constante de proporcionalidade C . A força é proporcional à deformação, com constante k . Pode argumentar-se que a analogia é imperfeita, já que a proporcionalidade na coluna da direita tem sinal negativo, ao passo que a na coluna da esquerda não tem. A falta de sinal, porém, decorre de uma convenção: se tivéssemos definido V como a diferença entre o potencial da placa negativa e o da placa positiva, o sinal na expressão $Q = CV$ seria invertido.

² Para visualizar melhor esse ganho, podemos compará-lo à variação energia de uma pedra, de massa m quando alguém a levanta do chão até o tampo de uma mesa com altura h . Para elevar a pedra, alguém tem de fazer força no mínimo igual ao peso da pedra. O peso tem módulo mg e é dirigido para baixo. Assim, a força necessária para vencer o peso deve ter módulo mg e ser dirigida para cima. O trabalho dessa força é mgh , não por acaso igual à energia potencial que a pedra terá, no tampo da mesa.

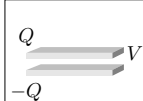
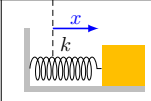
	
$Q = CV$	$F = -kx$
$U = C \frac{V^2}{2}$	$U = k \frac{x^2}{2}$

Figura 2: Paralelo entre um capacitor e uma mola.

As expressões para as energias elétrica e mecânica concordam com essa analogia. A energia do capacitor cresce quadraticamente com o potencial, assim como a da mola cresce quadraticamente com a deformação, e os coeficientes de proporcionalidade são as constantes $Q/2$ e $C/2$, respectivamente. Nos dois casos, a dependência quadrática mostra que é progressivamente mais difícil armazenar energia.

Quando se trata de uma mola, por exemplo, no começo é fácil distender (ou comprimir) a mola de dx , porque ela está praticamente relaxada e não resiste muito a deformações. À medida que a deformação cresce, a força restauradora se intensifica, e o trabalho necessário para distender a mola pelo mesmo diferencial dx cresce paulatinamente. Analogamente, no capacitor, o trabalho para levar carga da placa negativa para a positiva cresce progressivamente à medida que a diferença de potencial aumenta.

Equilíbrio entre capacitores a diferentes voltagens

O que acontece quando dois capacitores são interligados. A Fig. 3 mostra um par de capacitores. Inicialmente, com a chave S aberta, as diferenças de potencial são distintas. O da esquerda guarda uma carga Q . A diferença de potencial entre suas placas é Q/C_e . O da direita está descarregado e, nele, a diferença de potencial é zero. Os fios são todos condutores, e o de baixo faz com que as placas inferiores dos dois capacitores estejam no potencial V_M , do ponto M , que é igual ao potencial do ponto D . Já o ponto E está no potencial $V_E = Q/C_e$.

Nesse ponto, fechamos a chave S . Rapidamente, carga passa do capacitor da esquerda para o da direita até que os pontos D e E estejam no mesmo potencial final V_F . Queremos saber quanta carga passou e qual é o potencial final.

Como a carga se conserva, a carga final Q_e no capacitor da esquerda somada à carga final Q_d no da direita deve ser igual à carga inicial:

$$Q_e + Q_d = Q. \quad (9)$$

Por outro lado, sabemos que $Q_e = C_e V$ e $Q_d = C_d V$, onde $V = V_F - V_M$ é a diferença entre o potencial no fio superior e o potencial no fio inferior. Podemos portanto escrever a Eq. (9) na forma

$$V = \frac{Q}{C_e + C_d} \quad (10)$$

e dela obter a carga em cada capacitor:

$$Q_e = \frac{C_e}{C_e + C_d} Q \quad (11)$$

e

$$Q_d = \frac{C_d}{C_e + C_d} Q. \quad (12)$$

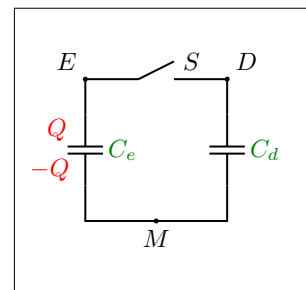


Figura 3: Conexão de capacitores. Inicialmente, o capacitor da esquerda tem carga Q e o da direita está descarregado.

Conservação da energia

As Eqs. (11) e (12) mostram como a carga Q foi repartida entre os capacitores. Cada um recebeu uma fração proporcional a sua capacitância. É o que poderíamos esperar. Se os capacitores forem iguais, por exemplo, cada um ficará com metade da carga. Mas e a energia? Poderíamos imaginar que a energia inicialmente armazenada no capacitor da esquerda seja também distribuída entre os dois dispositivos, mas não é isso o que ocorre. Vejamos.

A energia inicialmente armazenada, no capacitor da esquerda, é dada pela Eq. (7):

$$U_I = \frac{Q^2}{2C_e}. \quad (13)$$

No final, ainda de acordo com a Eq. (7), as energias nos dois capacitores são

$$U_e = \frac{Q_e^2}{2C_e}, \quad (14)$$

no da esquerda, e

$$U_d = \frac{Q_d^2}{2C_d}, \quad (15)$$

no da direita.

A partir da Eq. (11), obtemos da Eq. (14) a energia

$$U_e = \frac{C_e}{2(C_e + C_d)^2} Q^2. \quad (16)$$

Analogamente, a partir da Eq. (12), obtemos da Eq. (15) a energia final no capacitor da direita:

$$U_d = \frac{C_d}{2(C_e + C_d)^2} Q^2. \quad (17)$$

A energia total final é a soma de U_e e U_d . Somadas as Eqs. (16) e (17), encontramos imediatamente que

$$U_F = \frac{Q^2}{2(C_e + C_d)}. \quad (18)$$

Basta agora comparar a Eq. (13) com a Eq. (18) para vermos que a energia final é menor do que a inicial. Energia foi perdida. Quanto maior for a capacitância C_d , do capacitor inicialmente descarregado, maior será a fração da energia que será perdida. Se os capacitores forem iguais, por exemplo, a energia final U_F será metade de U_I . Em outras palavras, quanto maior for a fração de Q transferida de um capacitor para o outro, maior será a fração da energia perdida.

Essa constatação pode parecer em conflito com o princípio da conservação da energia, mas não há motivo para alarme. Como sempre ocorre, parece haver perda porque somente estamos considerando um tipo de energia — a eletrostática. A circulação da carga por fios que têm resistência aquece os fios.

E se os fios forem supercondutores? Muitos materiais, a temperatura suficientemente baixa, passam a ter condutividade que é infinita para todos os efeitos práticos e são conhecidos como *supercondutores*.

Se os fios forem supercondutores, não haverá *efeito Joule*, isto é, conversão de energia elétrica em calor. Nessas condições, se o efeito Joule fosse a única via para transformação de energia, a corrente elétrica oscilaria indefinidamente. O capacitor da esquerda ora se descarregaria parcialmente, ora voltaria a ter carga Q , periodicamente.

A energia elétrica, entretanto, não está enclausurada nos fios. Veremos em Física IV que uma corrente elétrica oscilante produz radiação eletromagnética — ondas de rádio, microondas, luz etc.. Tanto num supercondutor como num condutor comum, a radiação rouba energia da corrente no circuito e tende a amortecer as oscilações na corrente. Num supercondutor, na falta de efeito Joule, o amortecimento terminaria por consumir toda a energia da corrente elétrica. Cessada a corrente, cada capacitor teria a carga que calculamos, expressa na Eq. (11) ou na (12).

Dielétricos

Até aqui, discutimos principalmente capacitores com espaço vazio entre as placas. Manter separadas as placas nessas condições cria dificuldades práticas. Por isso, no Século XVIII, quando se descobriu que os capacitores conseguiam armazenar carga elétrica, os primeiros dispositivos continham água. Mais tarde, outros materiais tomaram o lugar do líquido. Décadas mais tarde, percebeu-se que manter um material entre as placas é ainda mais vantajoso, porque aumenta a capacitância do capacitor.

As Figs. 4 e 5 mostram uma ilustração. As placas do capacitor desenhado na Fig. 4 têm área A e elas estão separadas pela distância d . Já sabemos que a capacitância resultante é

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}. \quad (19)$$

A Fig. 5 mostra o mesmo capacitor preenchido com um meio *dielétrico*, isto é, um material isolante, ou que conduz mal a eletricidade. O dielétrico pode ser sólido, líquido ou gasoso, mas nas aplicações modernas o material é sólido.

Verifica-se experimentalmente que a capacitância cresce com a in-

No modelo de Drude, que discutimos na aula de 27 de abril, o aquecimento é provocado pelas repetidas colisões entre os elétrons e os obstáculos que roubam a energia cinética fornecida pelo campo elétrico. Já vimos que o modelo tem limitações, mas se verifica experimentalmente que a resistência de um fio provoca transformação da energia elétrica em calor sempre que uma corrente elétrica circula pelo condutor. A potência dissipada, isto é, a energia transformada em calor por unidade de tempo é igual a RI^2 , onde R é a resistência do condutor.

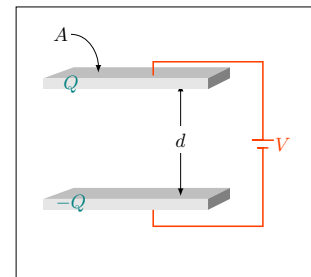


Figura 4: Capacitor com placas planas. Cada placa tem área A e a distância entre elas é d .

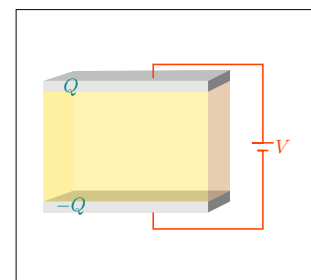


Figura 5: O capacitor da Fig. 4, preenchido com dielétrico.

Nos *capacitores eletrolíticos*, a placa positiva é recoberta com um óxido, que constitui o dielétrico. O espaço entre a placa oxidada e a outro terminal é preenchido com um eletrólito, material que contém íons condutores de eletricidade. O eletrólito pode ser líquido, sólido ou gel, mas por ser condutor ele funciona como placa negativa, não como dielétrico.

serção do dielétrico. A Eq. (19) assume a forma

$$C = \kappa \frac{A\epsilon_0}{d}. \quad (20)$$

A constante κ , um número adimensional chamado de *constante dielétrica*, é característica do material. A Tabela lista as constantes de sete materiais. A do ar é tão próxima da unidade que é apresentada como sendo unitária. Isso não surpreende, já que se trata de um gás, com densidade muito pequena. Os demais materiais são líquidos ou sólidos e têm constante dielétrica apreciavelmente superiores à unidade. Chama a atenção a água, e não só por ter κ elevado: no estado sólido, a constante dielétrica é vinte vezes menor. Veremos mais adiante que a grande constante dielétrica da água se deve ao momento de dipolo de suas moléculas, que podem orientar-se mais livremente no líquido do que no gelo.

Cargas de polarização

A Fig. 7 procura explicar por que o dielétrico incrementa a capacitância. Ela mostra, esquematicamente, a distribuição de cargas quando o capacitor da Fig. 5 é ligado a uma bateria que estabelece diferença de potencial V entre as placas. O potencial positivo faz aparecer uma carga Q na placa superior e o potencial negativo induz uma carga $-Q$ na placa inferior. O dielétrico é *polarizável*, isto é, contém dipolos que podem orientar-se sob a ação do campo elétrico que se forma entre as placas. Discutiremos na aula de 11 de maio o que acontece no interior do material. Por ora, vamos aceitar que a orientação dos dipolos produz uma carga superficial negativa $-Q_P$ na superfície superior do dielétrico e uma carga $+Q_P$ na inferior.

Combinadas, as duas distribuições na parte superior têm densidade superficial $\sigma_{\text{sup}} = (Q - Q_P)/A$ e as duas na parte inferior, $\sigma_{\text{inf}} = -(Q - Q_P)/A$. O campo elétrico resultante no interior do dielétrico é uniforme, dirigido para baixo e tem módulo

$$E = \frac{Q - Q_P}{A\epsilon_0}. \quad (21)$$

A diferença de potencial V entre as placas é a integral $\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ desde a placa de cima até a de baixo. Como o campo é uniforme e aponta no sentido do deslocamento, a integral se reduz ao produto do módulo do campo E pela distância d entre as placas. Algebricamente, temos que

$$V = Ed \quad (22)$$

ou, se substituirmos o campo pelo lado direito da Eq. (21),

$$V = \frac{Q - Q_P}{A\epsilon_0} d. \quad (23)$$

Tabela 1: Constantes dielétricas.

Material	κ
Ar	1
Papel	3.5
Gelo	4
Pyrex	5
Silício	12
Etanol	25
Água	80

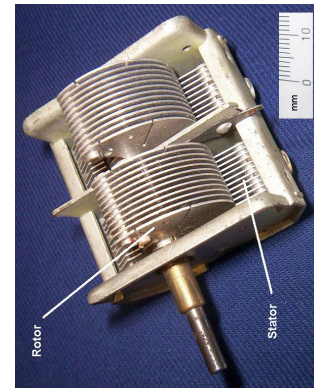


Figura 6: Capacitor variável, preenchido com ar. Os aparelhos de rádio do Século XX continham capacitores variáveis, para sintonizar estações. Há dois conjuntos de placas. As placas de cada conjunto são ligadas em paralelo. Um dos conjuntos (stator) é fixo, enquanto o outro (rotor) gira em torno de um eixo. A rotação é controlada por um *botão de sintonia* ligado ao eixo. Girar o botão aumenta ou diminui a área do rotor superposta com a do stator. Com isso, o usuário podia variar a capacitância e sintonizar diferentes estações de rádio. Nos aparelhos modernos, circuitos eletrônicos tornaram obsoletos esses dispositivos. [Ulfbastel CC BY-SA 3.0, commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=605145](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=605145).

Por outro lado, sabemos que $Q = CV$, onde C é a capacitância do dispositivo na Fig. 7, que é dada pela Eq. (20). Resulta então da Eq. (23) que

$$Q = \left(\kappa \frac{A\epsilon_0}{d} \right) \frac{Q - Q_P}{A\epsilon_0} d. \quad (24)$$

Podemos agora cancelar os fatores que aparecem nos denominadores e numeradores nas frações do lado direito e, em seguida, isolar a carga Q_P , para obter a expressão

$$Q_P = \frac{\kappa - 1}{\kappa} Q. \quad (25)$$

Como podemos ver, a carga superficial Q_P é proporcional à carga Q . E Q_P é sempre inferior a Q .

Vejamos o que ocorre quando introduzimos o dielétrico. Vamos imaginar que, inicialmente, o capacitor da Fig. 1 está ligado à bateria da Fig. 7. O campo elétrico entre as placas é determinado pela diferença de potencial V . Em outras palavras, o campo é dado pela Eq. (22).

Introduzimos, então, o dielétrico. A diferença de potencial é mantida pela bateria e não pode mudar. Decorre, como podemos ver da Eq. (22), que o campo é o mesmo. Por outro lado, como mostra a Eq. (21), o campo elétrico das cargas $\pm Q$ é parcialmente cancelado pelo campo das cargas $\mp Q_P$. As duas afirmações podem parecer inconsistentes, pois uma diz que o campo não muda, a outra diz que o campo é reduzido pelas cargas superficiais. Entretanto, não há conflito entre elas porque, no instante em que o dielétrico é inserido, flui carga do polo positivo da bateria para a placa superior e flui carga do polo negativo para a placa inferior para incrementar a carga no capacitor e impedir que o campo varie.

Podemos, finalmente, entender por que o dielétrico amplifica a capacitância. Quando o dispositivo da Fig. 5 é conectado a uma bateria com diferença de potencial V , mais carga tem de fluir para as placas para compensar o cancelamento parcial imposto pelas cargas superficiais. A carga Q armazenada nas placas é, portanto, maior do que a carga que seria armazenada no capacitor da Fig. 4. A capacitância na Fig. 5 é, portanto, maior.

Diferença de potencial fixa

Suponhamos que o capacitor da Fig. 4 tem capacitância $C_0 = 1 \mu\text{F}$. Se ele estiver ligado a uma bateria que fornece $V = 1 \text{ V}$, a carga acumulada em suas placas será $Q_0 = 1 \mu\text{C}$. Digamos que, agora, introduzimos silício entre as placas, como na Fig. 5. Como a constante dielétrica

Somente no limite $\kappa \rightarrow \infty$ chegaríamos à igualdade $Q_P = Q$. No extremo oposto, com $\kappa \rightarrow 1$, a carga superficial iria anular-se. Na prática, $Q > Q_P > 0$. Os números na Tabela indicam que a carga superficial na água é $Q_P^{\text{Água}} = 0.99Q$, enquanto a carga superficial no ar é tão pequena que pode ser desconsiderada.

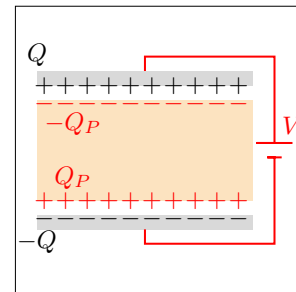


Figura 7: Distribuição de cargas no capacitor preenchido com dielétrico. Os dois espaços entre as superfícies do dielétrico e as placas servem apenas para facilitar a visualização.

do Si é 12, a capacitância sobe para $C = 12 \mu\text{C}$. Fisicamente, na superfície superior do silício forma-se uma camada de carga que tende a cancelar parcialmente o campo da carga Q_0 .

Para evitar que a diferença de potencial entre as placas decaia, a bateria manda um reforço. A carga na placa superior cresce até ser igual a CV , isto é $Q = 12 \mu\text{C}$. A carga na superfície do dielétrico também cresce, e chega ao valor dado pela Eq. (25): $Q_P = 11 \mu\text{C}$. Assim, a carga líquida na superfície entre a placa de cima e a superfície de cima do silício é $Q - Q_P = 1 \mu\text{C}$, exatamente a carga Q_0 que o capacitor da Fig. 4 guarda quando a diferença de potencial é de 1V. Dentro do dielétrico, o campo é o mesmo que existia no capacitor vazio. Entretanto, a carga nas placas, que é o que interessa quando se trata de capacitores, é doze vezes maior. Por isso, a capacitância cresce.

Carga fixa

Uma vez carregado o capacitor da Fig. 5, podemos desligá-lo da bateria sem alterar a carga nele armazenada. Na sequência, vamos retirar o dielétrico, para voltar à configuração na Fig. 4. Como as placas estão isolados, continuaremos a ter $Q = 12 \mu\text{C}$. Na ausência de cargas superficiais, o campo elétrico passa a ser

$$E_1 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \quad (26)$$

e a diferença de potencial,

$$V_1 = \frac{Q}{A\epsilon_0} d. \quad (27)$$

A Eq. (27) é o resultado que esperávamos, pois mostra que a capacitância Q/V_1 é dada pela Eq. (19). É o que deveria ser, pois estamos de volta com o capacitor da Fig. 4.

Mas há um aspecto curioso nisso tudo. A diferença de potencial cresceu: do valor fornecido pela bateria, $V = 1 \text{ V}$, passou a

$$V_1 = \frac{12 \mu\text{C}}{1 \mu\text{F}} = 12 \text{ V}. \quad (28)$$

Encontramos um expediente para gerar energia, porque agora temos os mesmos $12 \mu\text{C}$ que tínhamos no final da Seção a uma diferença de potencial doze vezes maior. Esse ganho, entretanto, não é gratuito: o dielétrico tem menos energia quando está dentro do capacitor do que quando está fora.³ É portanto necessário trabalho para extraí-lo e esse trabalho é igual à energia adicional armazenada no capacitor.

³ Na situação da Fig. 7, as atrações entre as cargas Q e $-Q_P$ na interface (placa/Si) superior da Fig. 7 e entre as cargas $-Q$ e Q_P na interface inferior contribuem energia negativa para o sistema. Retirado o dielétrico, essa energia negativa desaparece.