Função

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

Função sobrejetora

Definição

Uma função $f : A \to B$ *é chamada sobrejetora se* $Im(f) = B$*, ou seja, para todo* $y \in B$ *existe pelo menos um* $x \in A$ *tal que* $y = f(x)$.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ *não é sobrejetora, pois, por exemplo, não existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -1$.

Exemplo

A função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ *é sobrejetora. De fato, dado* $y \in [0, \infty)$ *existe* $x = y^2$ *tal que* $f(x) = f(y^2) = \sqrt{y^2} = |y| = y$ *pois* $y \geq 0$.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ *é sobrejetora. De fato, dado* $y \in [0, +\infty)$ *existe* $x = \sqrt{y}$ *tal que* $f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.

Função injetora

Definição

Uma função $f : A \longrightarrow B$ *é chamada injetora se dados* $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ *com* $x_1 \neq x_2$ *então* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Obs: Dizer que $f : A \longrightarrow B$ é injetora é equivalente a dizer : para todo $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ com $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ *não é injetora, pois, por exemplo,* $f(1) = 1 = f(-1)$ *e* $1 \neq -1$.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ *é injetora. De fato se* $f(x_1) = f(x_2)$ *então* $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$ *o que implica* $3x_1 = 3x_2$ *que implica* $x_1 = x_2$.

Exemplo

A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ *é injetora. De fato, se* $f(x_1) = f(x_2)$ *então* $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ *e elevando ao quadrado em ambos os lados vem que* $x_1 = x_2$.

Função bijetora

Definição

Uma função $f : A \to B$ é chamada bijetora (ou bijeção) quando f for injetora e sobrejetora.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ é bijetora. Pois, f é claramente injetora e sobrejetora.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ *é bijetora.*

De fato:

f é injetora (vimos em um exemplo anterior).

f é sobrejetora pois dado $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y-2}{3}$ tal que
$f(x) = 3(\frac{y-2}{3}) + 2 = y - 2 + 2 = y$

Exemplo

A função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ *é bijetora.*

De fato:

f é injetora pois, se $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1^2 = x_2^2$ implica que $\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$ que implica $|x_1| = |x_2|$ que implica que $x_1 = x_2$.

f é sobrejetora pois, dado $y \in [0, +\infty)$ existe $x = \sqrt{y}$ tal que $f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.

Composição de funções

Definição

Sejam $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : B \longrightarrow C$ *funções. A função* $g \circ f : A \longrightarrow C$ *dada por* $g \circ f(x) = g(f(x))$ *é chamada de função composta de* g *e* f*.*

Obs: Na verdade, para considerarmos a composta $g \circ f$ basta que a imagem de f esteja contida no domínio da g, isto é, $Im(f) \subset D(g)$.

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$. *Temos que* $g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (x^3)^2 + 1 = x^6 + 1$.

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ *e* $g : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$
$g(x) = \sqrt{x+1}$. *Temos*
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 1} = \sqrt{x^2 + 1 + 1} = \sqrt{x^2 + 2}$.

Obs:
Em geral $g \circ f \neq f \circ g$.

De fato, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$g(x) = x^2 - 2x$, temos que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 2f(x) = (x+2)^2 - 2(x+2) = x^2 + 2x$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 2 = x^2 - 2x + 2,$$

ou seja,
$g \circ f(x) = x^2 + 2 \neq x^2 - 2x + 2 = f \circ g(x)$.