Função

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

Função

Definição

Sejam A e B dois conjuntos não vazios.
Uma função de A a B denotado por $f : A \longrightarrow B$ é uma lei que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$, chamado o valor que a função f assume em x (ou imagem de x pela função f). O conjunto A é chamado domínio de f e B contradomínio de f.

Notação:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

Exemplo

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

4) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$

6) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

Domínio

Exemplo

Encontre o domínio da função $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Solução:

Como só está definido raiz quadrada de número maior ou igual a zero temos que exigir que $x + 1 \geq 0$, ou seja, $x \geq -1$. Portanto o domínio de f é $D = [-1, +\infty)$

Exemplo

Encontre o domínio da função $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Solução:

Como não pode dividir por zero, temos que exigir que $x - 1 \neq 0$, ou seja, $x \neq 1$. Portanto o domínio da f é $D = \mathbb{R} - \{1\}$.

Imagem

Dada uma função $f : A \to B$ o conjunto dos valores que f assume nos pontos de A é chamado imagem da função f e denotado por $Im(f)$ ou $f(A)$, isto é,
$Im(f) = f(A) = \{y \in B;\, y = f(x),\ x \in A\} = \{y = f(x); x \in A\}$

Exemplo

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $B = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $f : A \to B$*, com* $f(x) = x + 1$*. Encontre a imagem de* f*.*

Solução:

Temos que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 5$ e daí

$$Im(f) = \{f(x); x \in A\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

Note que $0 \notin Im(f)$ e $6 \notin Im(f)$.

Exemplo

Encontre a imagem da função:

$$f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f(x) = \sqrt{x+1}$$

Solução:

A raiz quadrada positiva de um número é sempre maior ou igual a zero. Por outro lado, dado $y \in [0, +\infty)$ temos que $\sqrt{x+1} = y$ se e somente $x + 1 = y^2$ se e somente $x = y^2 - 1$. Deste modo $f(x) = f(y^2 - 1) = \sqrt{y^2} = |y| = y$, pois $y \geq 0$. Portanto $Im(f) = [0, +\infty)$.

Exemplo

Encontre a imagem da função:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2 + 1$$

Solução:
Temos que $x^2 + 1 \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, dado $y \in [1, +\infty)$ temos que $x^2 + 1 = y$ se e somente se $x^2 = y - 1$ se e somente se $\sqrt{x^2} = \sqrt{y-1}$ se e somente se $|x| = \sqrt{y-1}$ se e somente se $x = \pm\sqrt{y-1}$. Deste modo, $f(x) = f(\pm\sqrt{y-1}) = y$. Portanto $Im(f) = [1, +\infty)$.

Gráfico

Definição

O grafico de uma função $f : A \longrightarrow B$ denotado por $G(f)$ é um subconjunto de $A \times B$ formado pelos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário, ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\}.$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. O gráfico de f é

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \ y = x^2\}.$$

Exemplo

Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. *O gráfico de* f *é*

$$G(f) = \{(x, y) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R};\ y = \sqrt{x}\}$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. *O gráfico de* f *é*

$$G(f) = \{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R};\ y = \frac{1}{x}\}$$

Funções iguais

Definição

Duas funções $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : C \longrightarrow D$ *são iguais quando apresentarem*

1) domínios iguais, isto é, $A = C$,

2) contradomínios iguais, isto é, $B = D$,

3) a mesma lei, isto é, $f(x) = g(x)$ *para todo* x *do domínio.*

Exemplo

As funções $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x) = x^2$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x^2$ *são funções diferentes pois tem domínios diferentes.*

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x + 1$ *e* $g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. *Temos que* f *e* g *são iguais pois* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
Pois

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1.$$