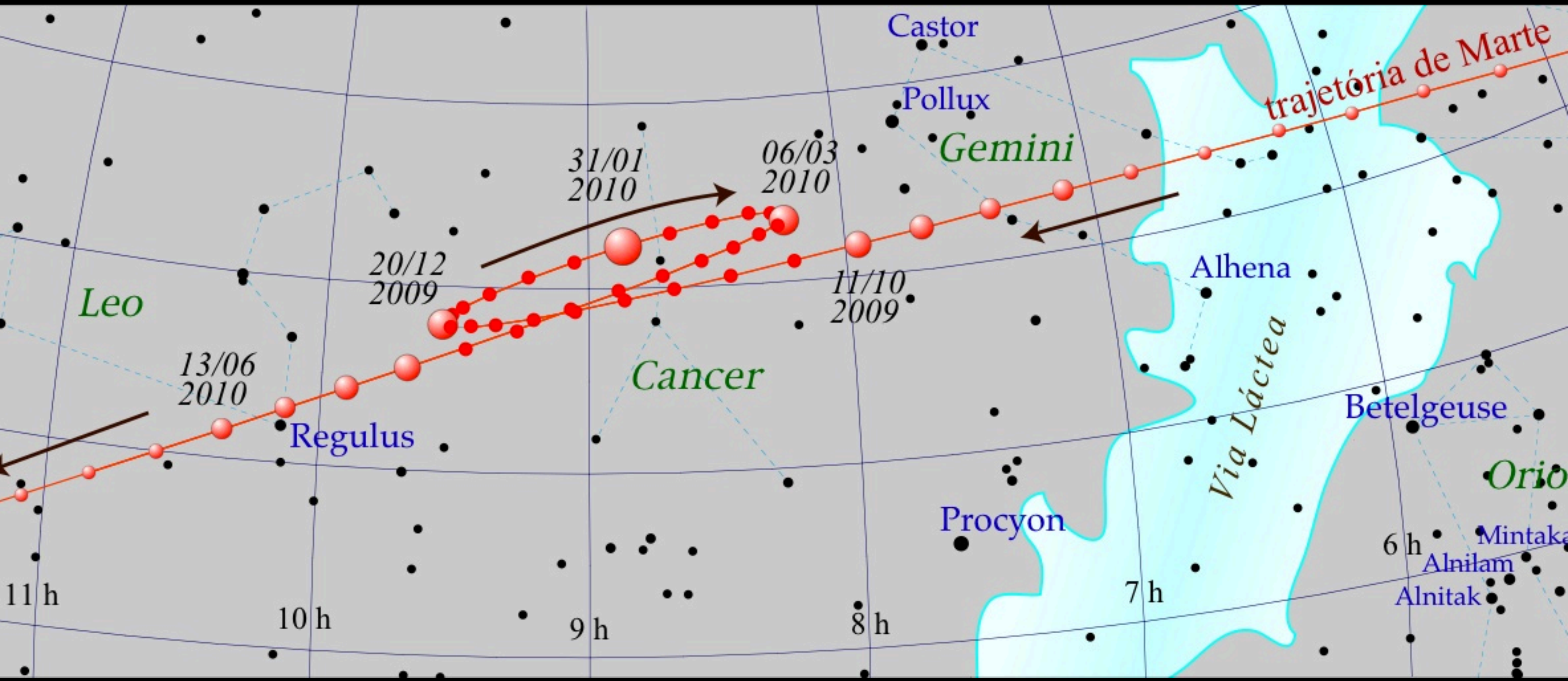
Física I

A Lei da Gravitação Universal

Física I

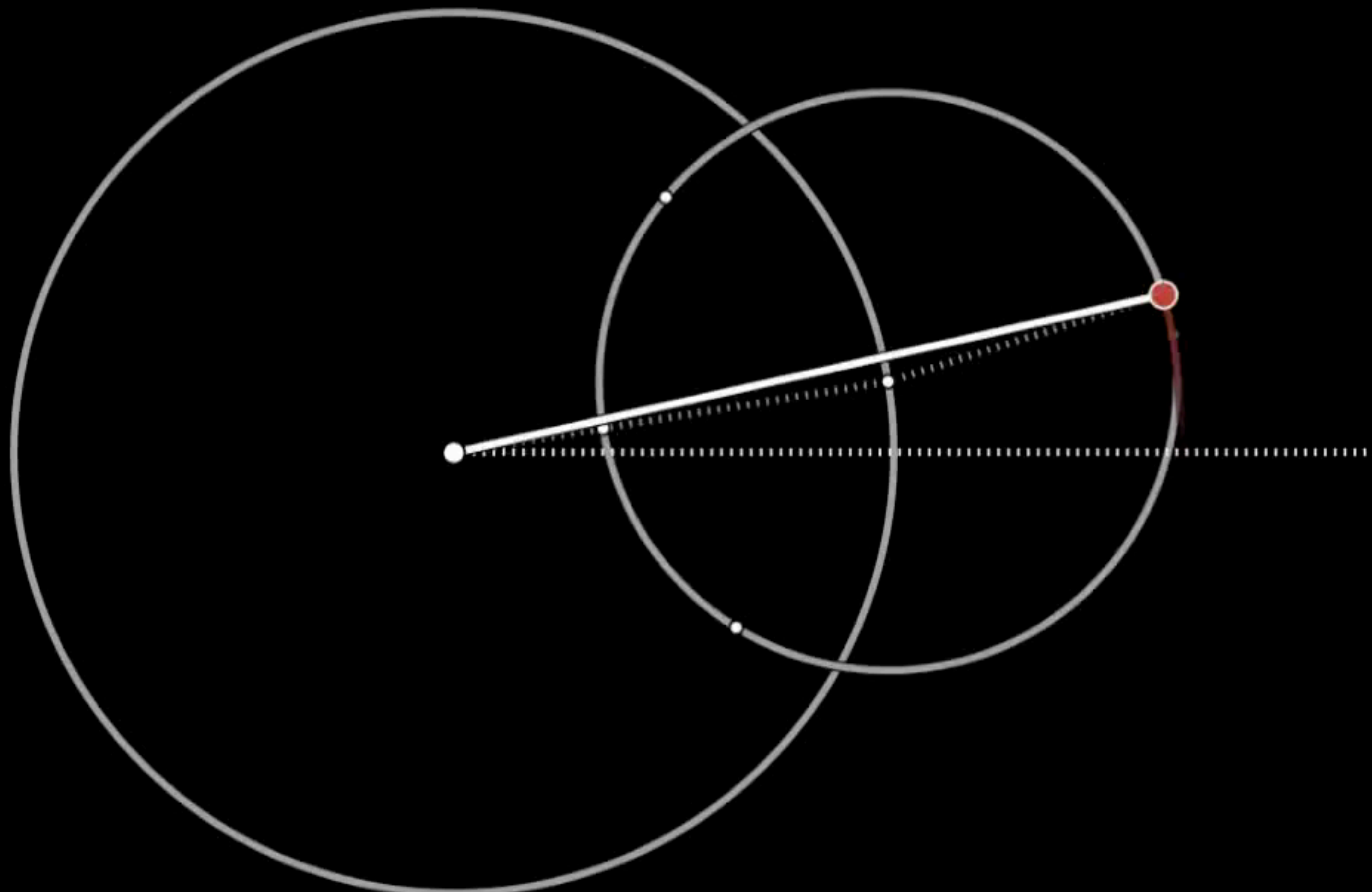
Modelo geocêntrico (Aristóteles, Ptolomeu etc.)

Física I



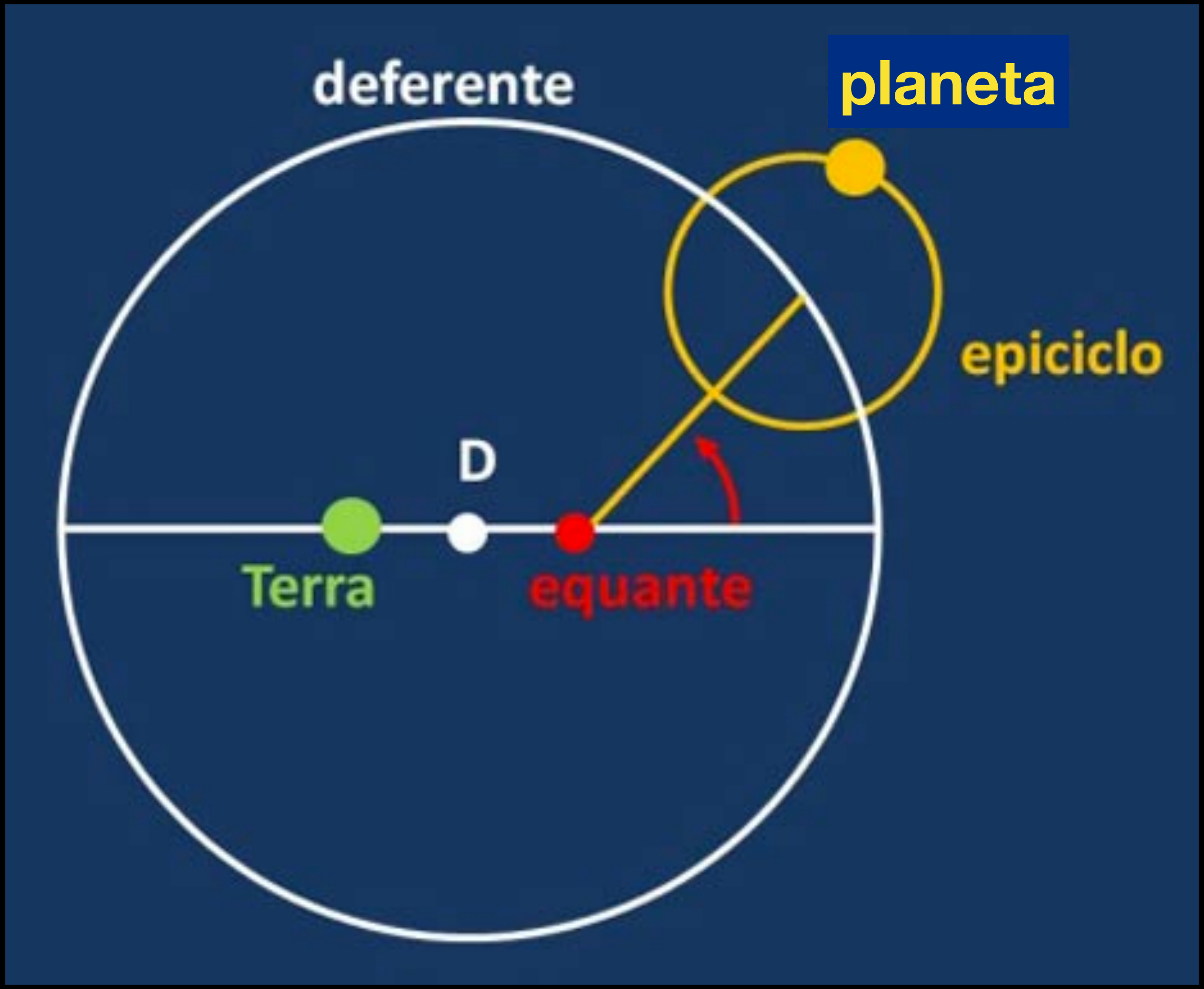
Pequeno problema: planetas ("errantes")

Física I



Primeira tentativa: epiciclos

Física I



Segunda tentativa: equante e deferente

Física I

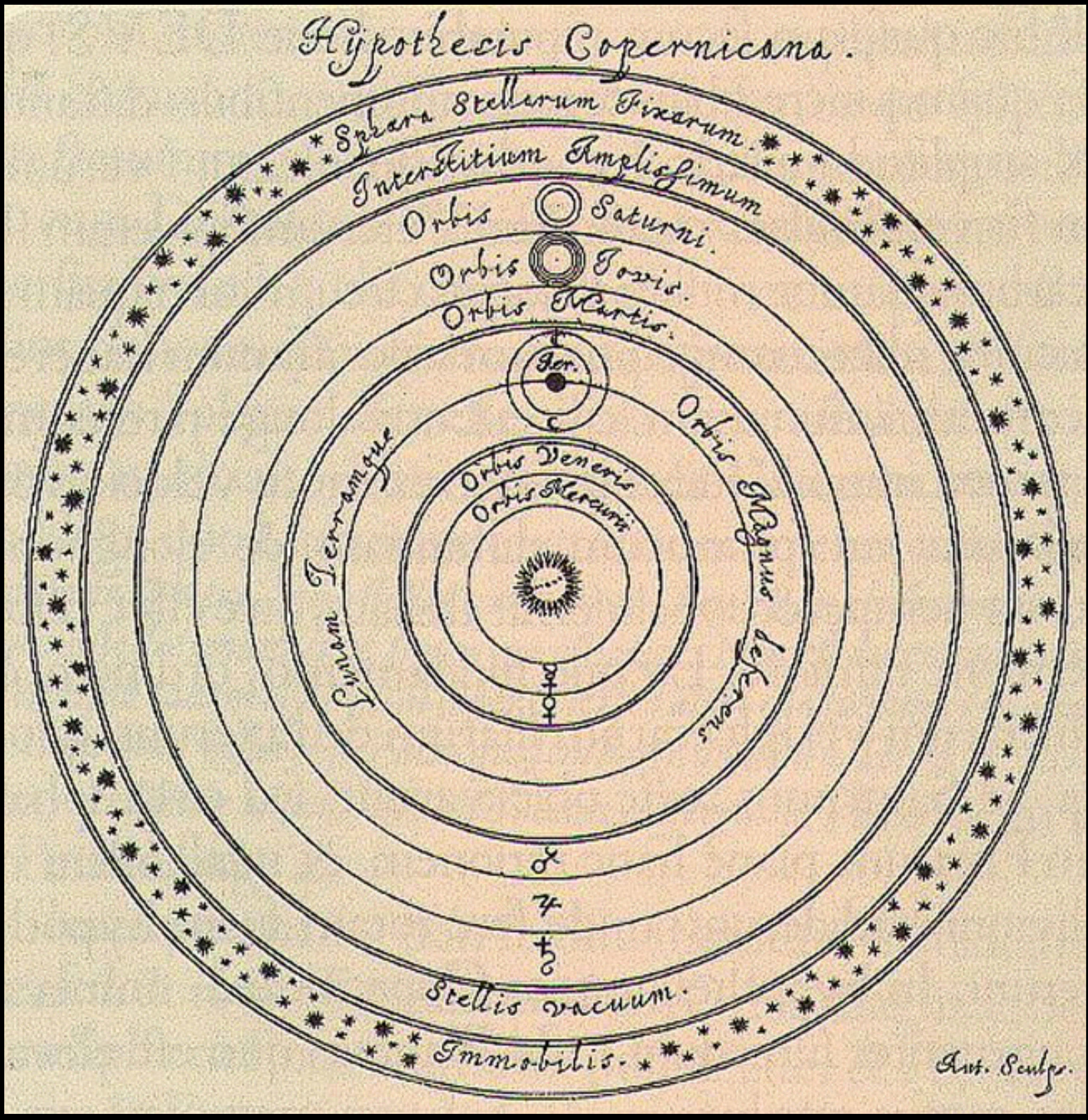
NICOLAI COPERNICI TORINENSIS DE REVOLVTIONIbus orbium cœlestium, Libri VI.

IN QVIBVS STELLARVM ET FIXARVM ET ERRATICARVM MOTVS, EX VETERibus atq; recentibus obseruationibus, restituit hic autor. Præterea tabulas expeditas luculentasq; addidit, ex quibus eosdem motus ad quoduis tempus Mathematum studiosus facillime calculare poterit.

ITEM, DE LIBRIS REVOLVTIONVM NICOLAI Copernici Narratio prima, per M. Georgium Ioachimum Rheticum ad D. Ioan. Schonerum scripta.

Cum Gratia & Priuilegio Cæs. Maiest.

BASILEAE, EX OFFICINA HENRICPETRINA.



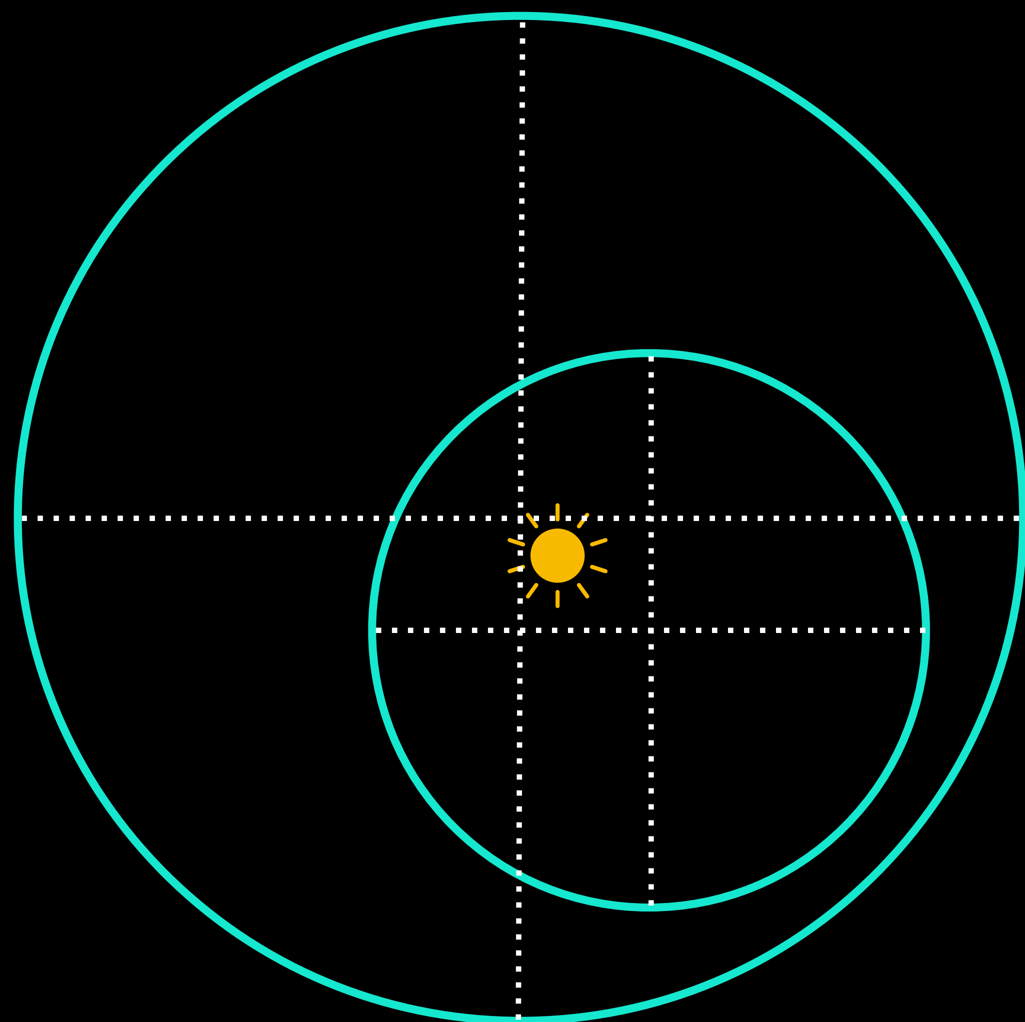
Nicolau Copérnico (1473-1543)

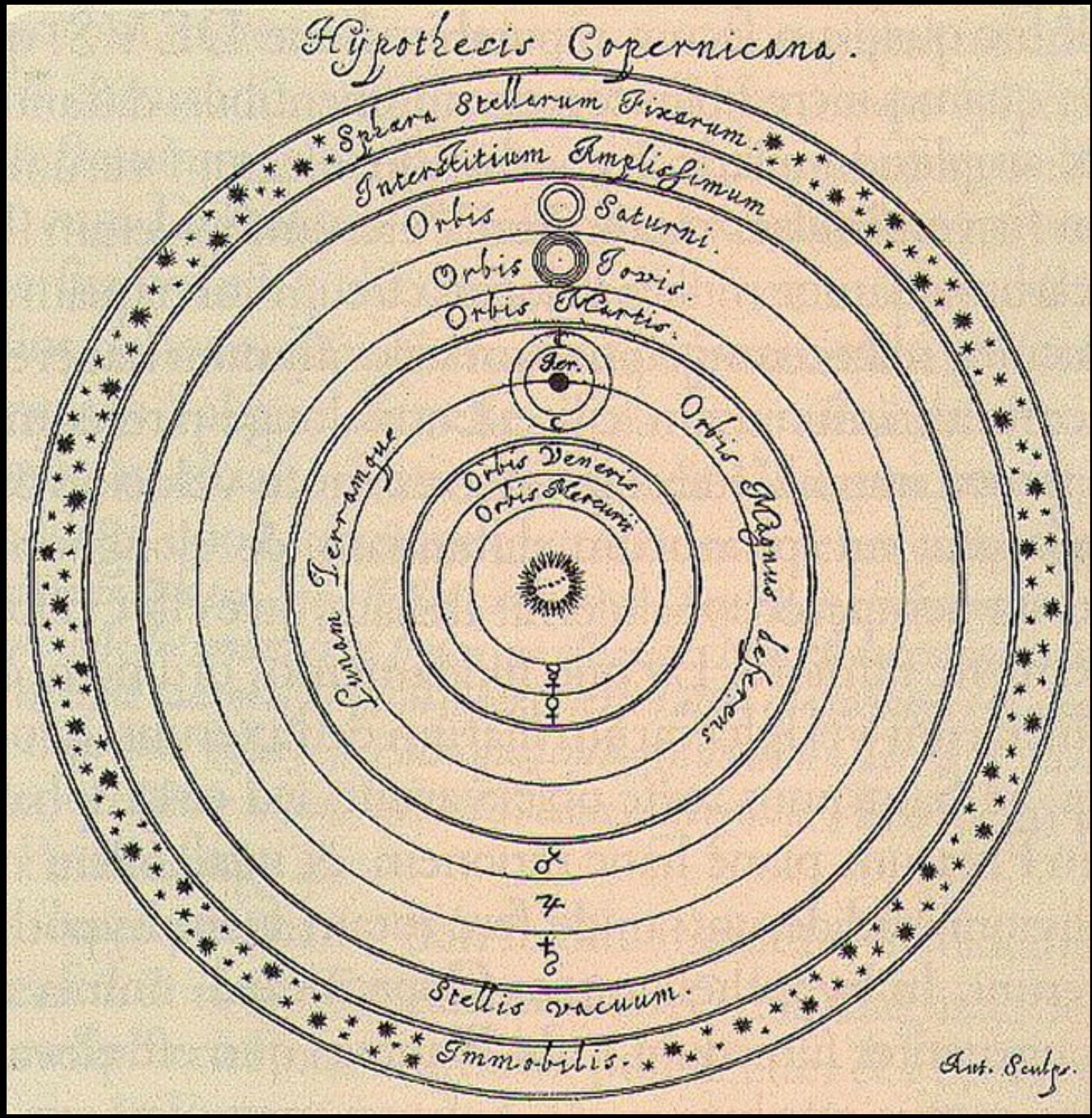
Física I

Período	Copérnico	Atual
Mercúrio	87,97 dias	87,97 dias
Vênus	224,70 dias	224,70 dias
Terra	365,26 dias	265,26 dias
Marte	1,882 anos	1,881 anos
Jupiter	11,87 anos	11,862 anos
Saturno	29,44 anos	29,46 anos

Período sideral dos planetas

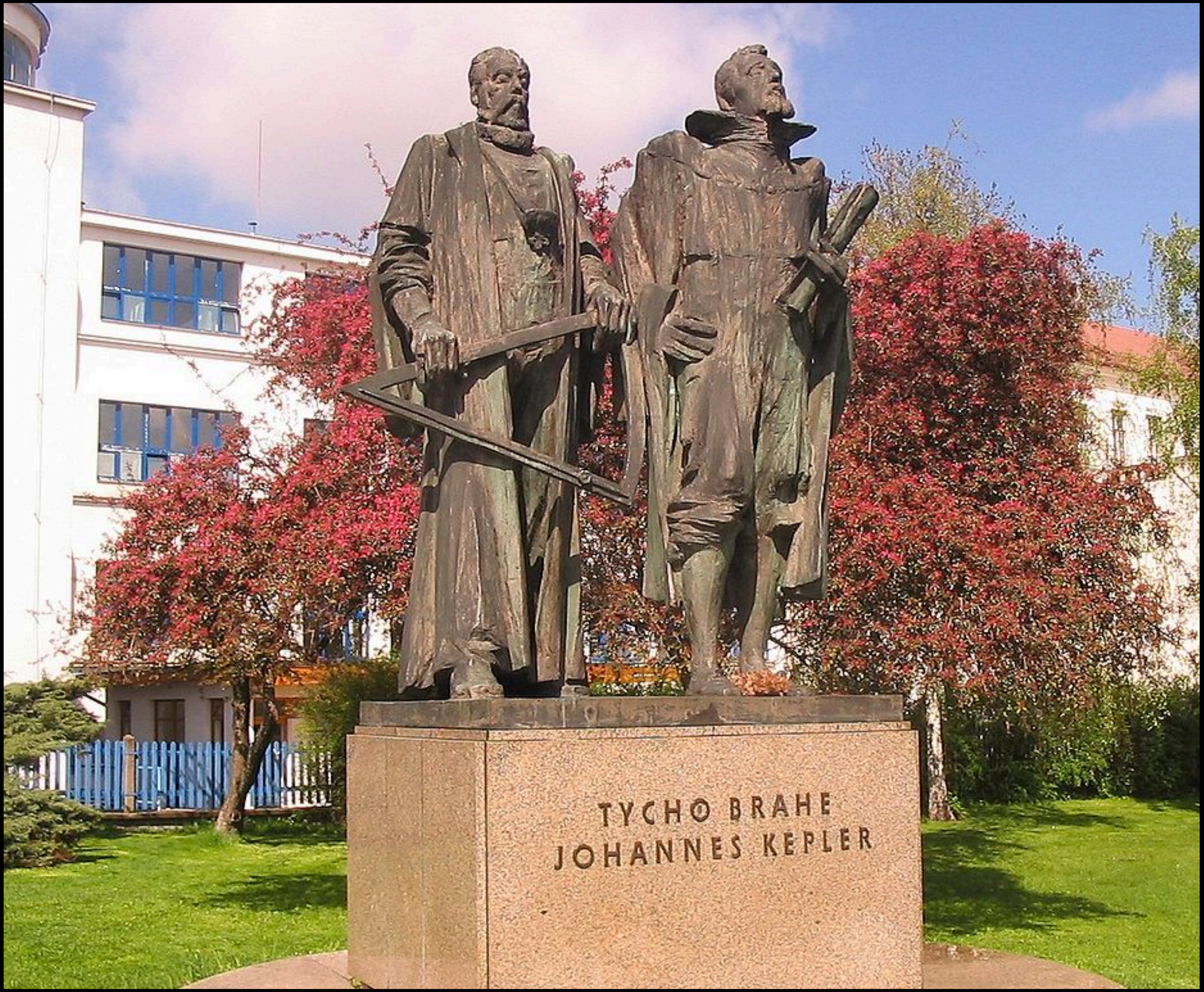
Física I





Modelo Copernicano continha algumas gambiarras…

Física I

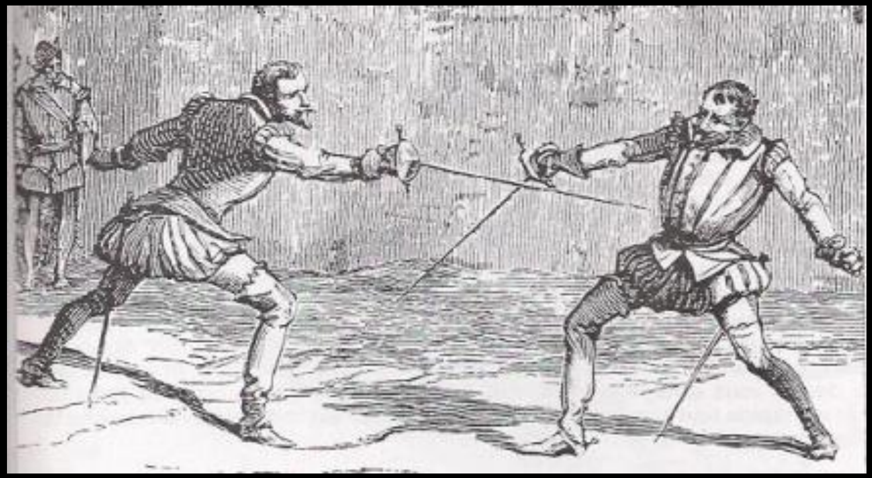


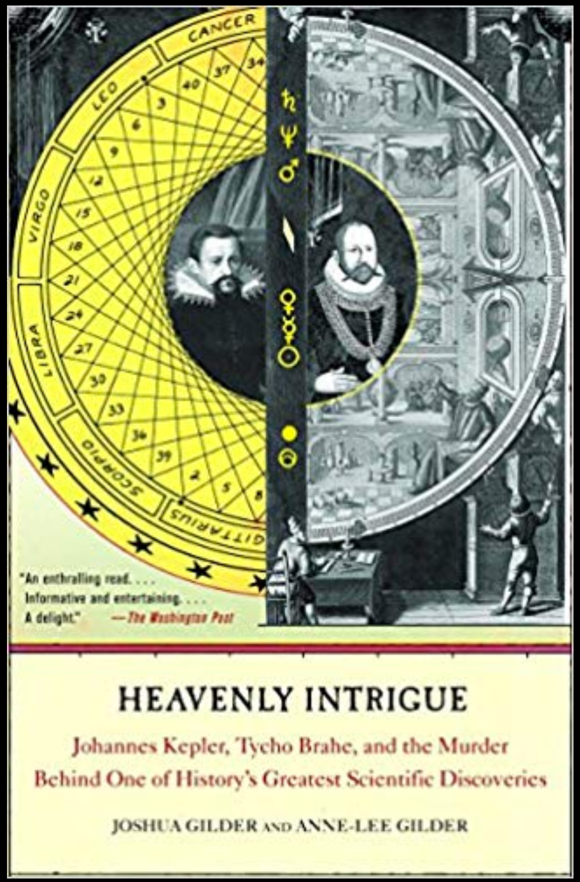
… e **mesmo assim** o modelo não funcionava bem!
Nesse momento **T. Brahe** e **J. Kepler** entram na história

Física I

Tycho Brahe (1546-1601)

Física I



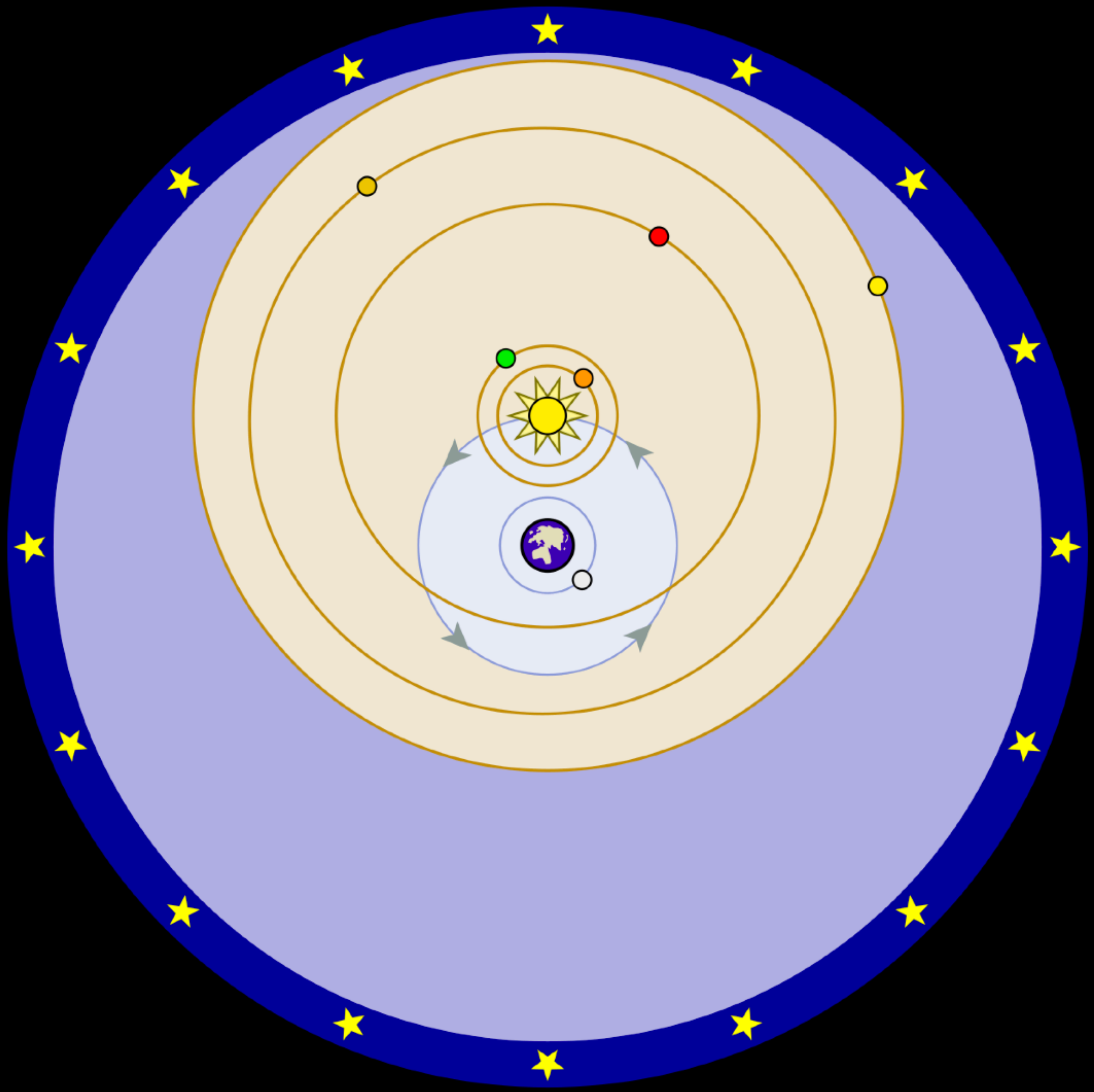


Tycho Brahe: nobre, matemático, boêmio, astrônomo

Física I

Tycho Brahe: astronomia “de olhômetro”

Física I



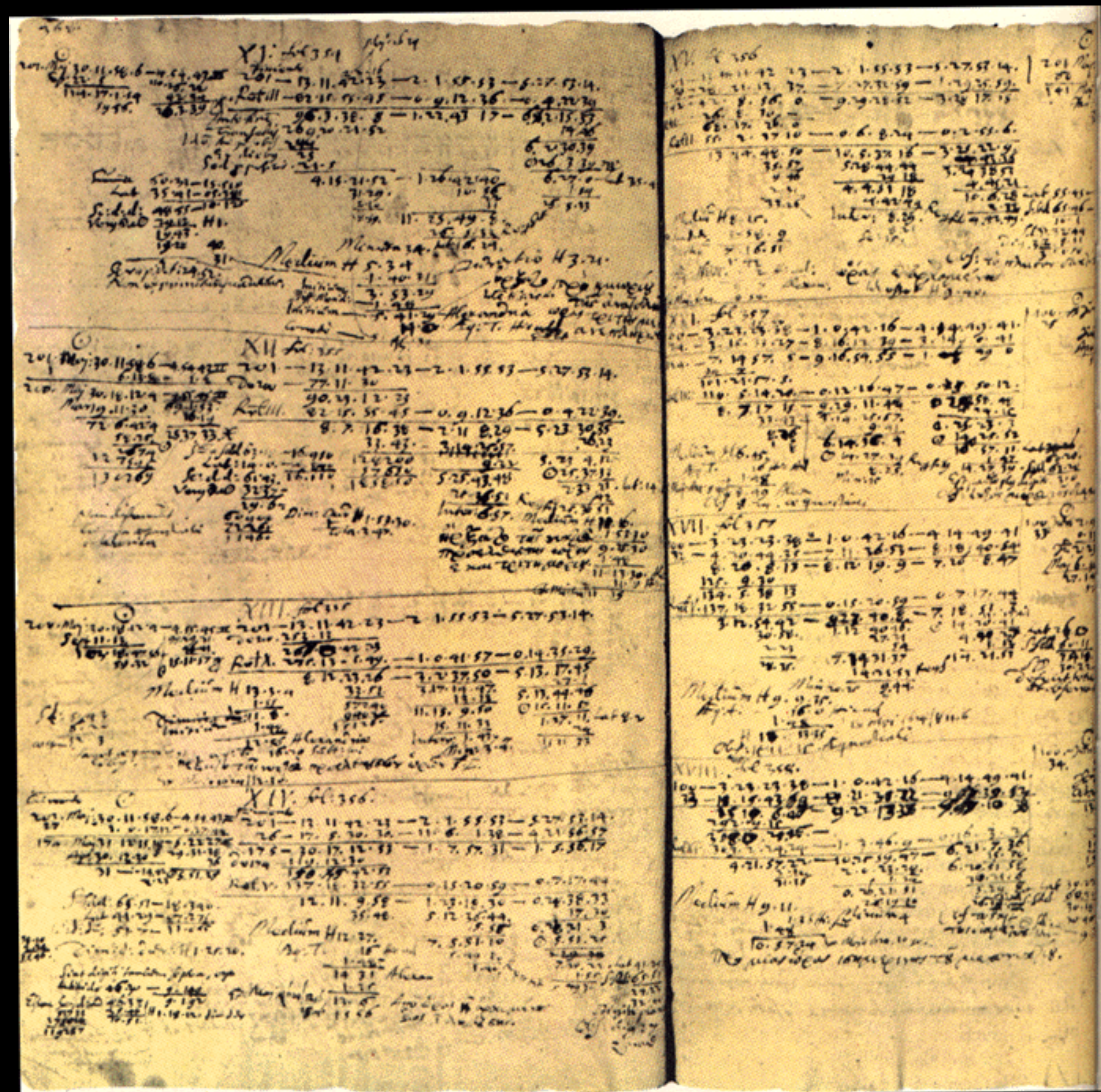
O modelo de Tycho Brahe

Física I

Harmonia Mundis

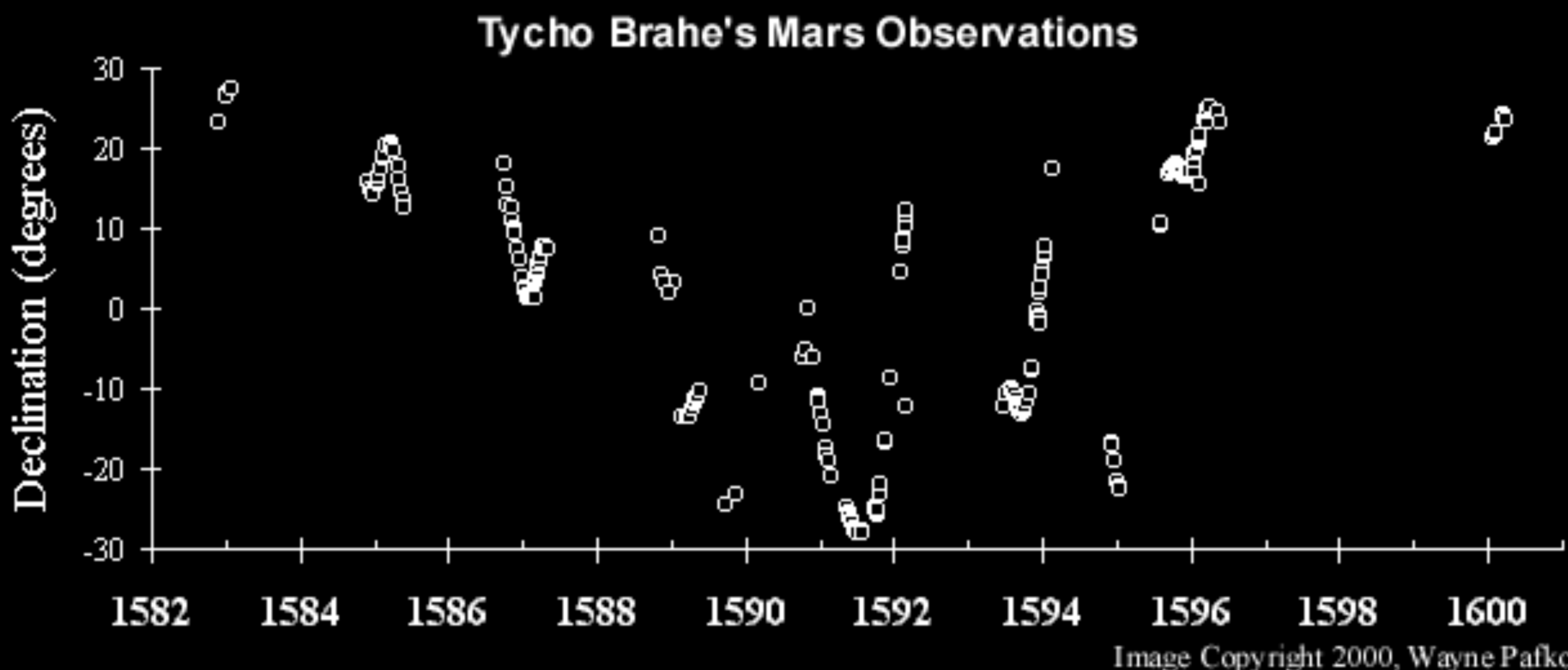
Johannes Kepler (1571-1630)

Física I



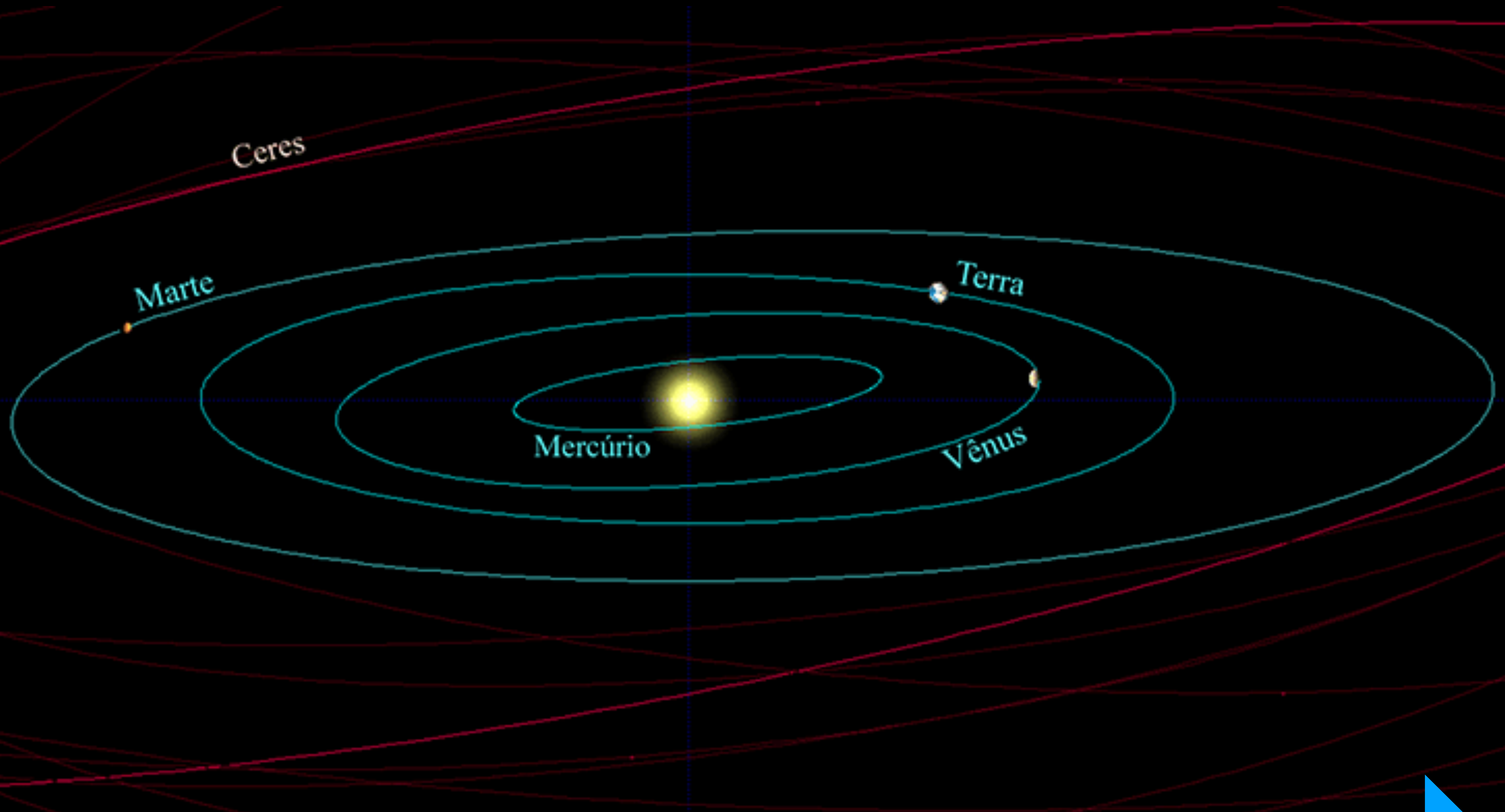
Tycho Brahe morreu 1 ano após Kepler virar seu assistente, e Kepler herdou suas medidas

Física I



Com base nas medidas de Tycho Brahe, Kepler pôde compreender de que modo os planetas se movem

Física I



Modelo heliocêntrico de Kepler

Copernico *x* Kepler

Física I

Órbitas!

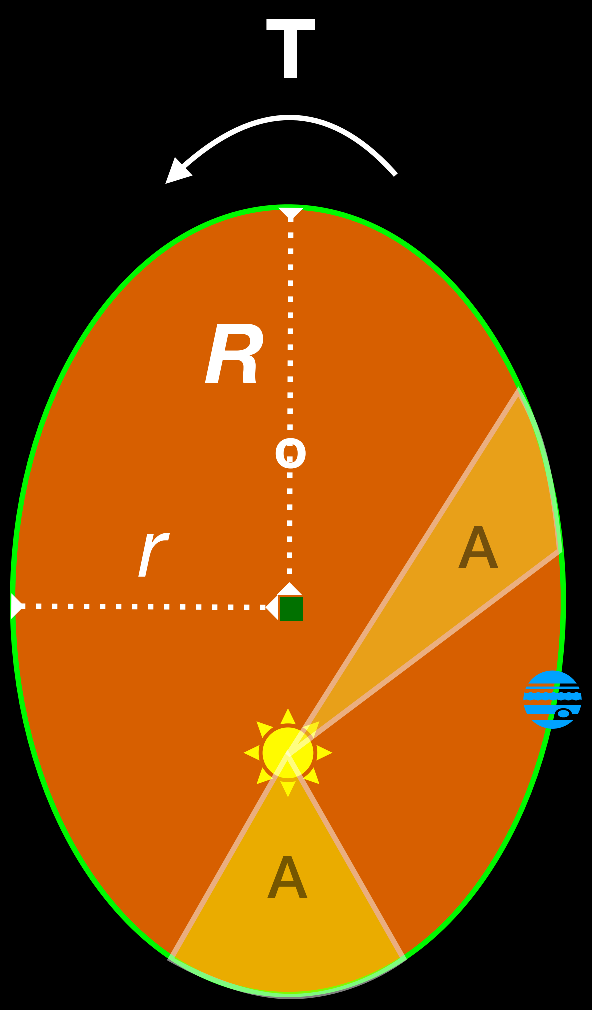
Física I

1ª Lei de Kepler:
Os planetas orbitam o Sol em **elipses**, com o Sol em um **foco** da elipse

2ª Lei de Kepler:
O raio do Sol aos planetas descreve **áreas iguais** em **tempos iguais**

3ª Lei de Kepler:
Os **quadrados** dos **períodos** são proporcionais aos **cubos** das **distâncias**

$$T^2 = \alpha\, R^3$$



Leis de Kepler (1618)

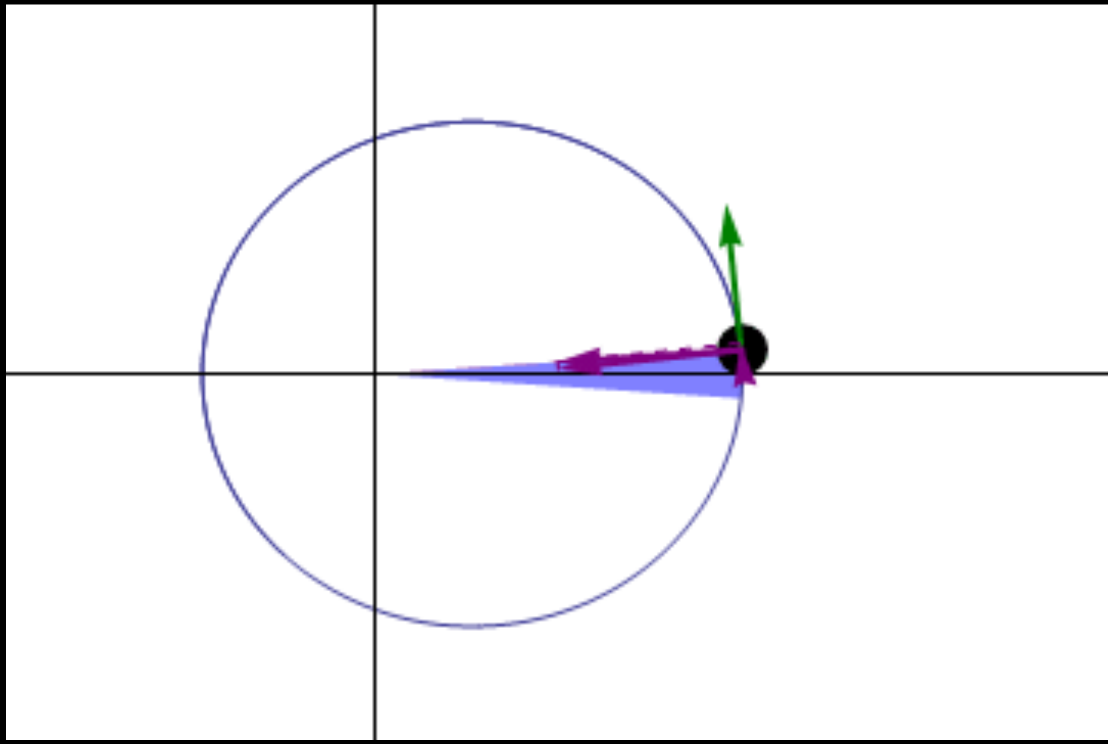
Física I

1ª Lei de Kepler:
Os planetas orbitam o Sol em **elipses**, com o Sol em um **foco** da elipse

2ª Lei de Kepler:
O raio do Sol aos planetas descreve **áreas iguais** em **tempos iguais**

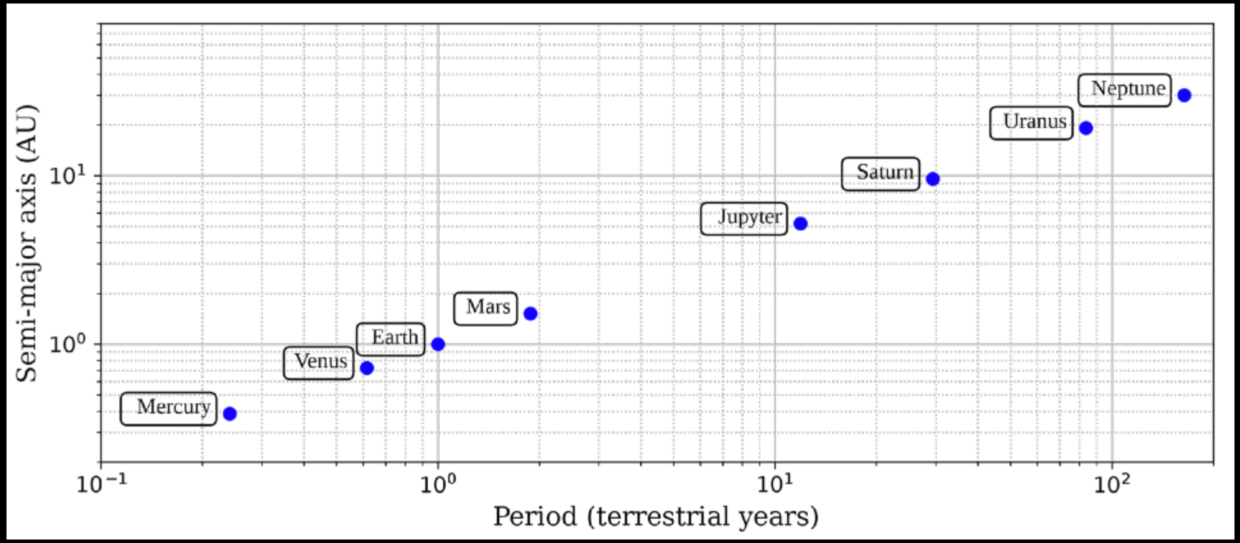
3ª Lei de Kepler:
Os **quadrados** dos **períodos** são proporcionais aos **cubos** das **distâncias**

$$T^2 = \alpha\, R^3$$



Leis de Kepler (1618)

Física I



1ª Lei de Kepler:
Os planetas orbitam o Sol em **elipses**, com o Sol em um **foco** da elipse

2ª Lei de Kepler:
O raio do Sol aos planetas descreve **áreas iguais** em **tempos iguais**

3ª Lei de Kepler:
Os **quadrados** dos **períodos** são proporcionais aos **cubos** das **distâncias**

$$T^2 = \alpha\, R^3$$

Kepler (~Séc. 17)

Planet	Mean distance to sun (AU)	Period (days)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{-6} AU^3/day^2)
Mercury	0.389	87.77	7.64
Venus	0.724	224.70	7.52
Earth	1	365.25	7.50
Mars	1.524	686.95	7.50
Jupiter	5.2	4332.62	7.49
Saturn	9.510	10759.2	7.43

Medidas modernas

Planet	Semi-major axis (AU)	Period (days)	$\frac{R^3}{T^2}$ (10^{-6} AU^3/day^2)
Mercury	0.38710	87.9693	7.496
Venus	0.72333	224.7008	7.496
Earth	1	365.2564	7.496
Mars	1.52366	686.9796	7.495
Jupiter	5.20336	4332.8201	7.504
Saturn	9.53707	10775.599	7.498
Uranus	19.1913	30687.153	7.506
Neptune	30.0690	60190.03	7.504

Leis de Kepler (1618)

Física I

Note que a ***3ª Lei de Kepler*** aplicada ao movimento dos ***planetas*** em torno do ***Sol*** nos dá:

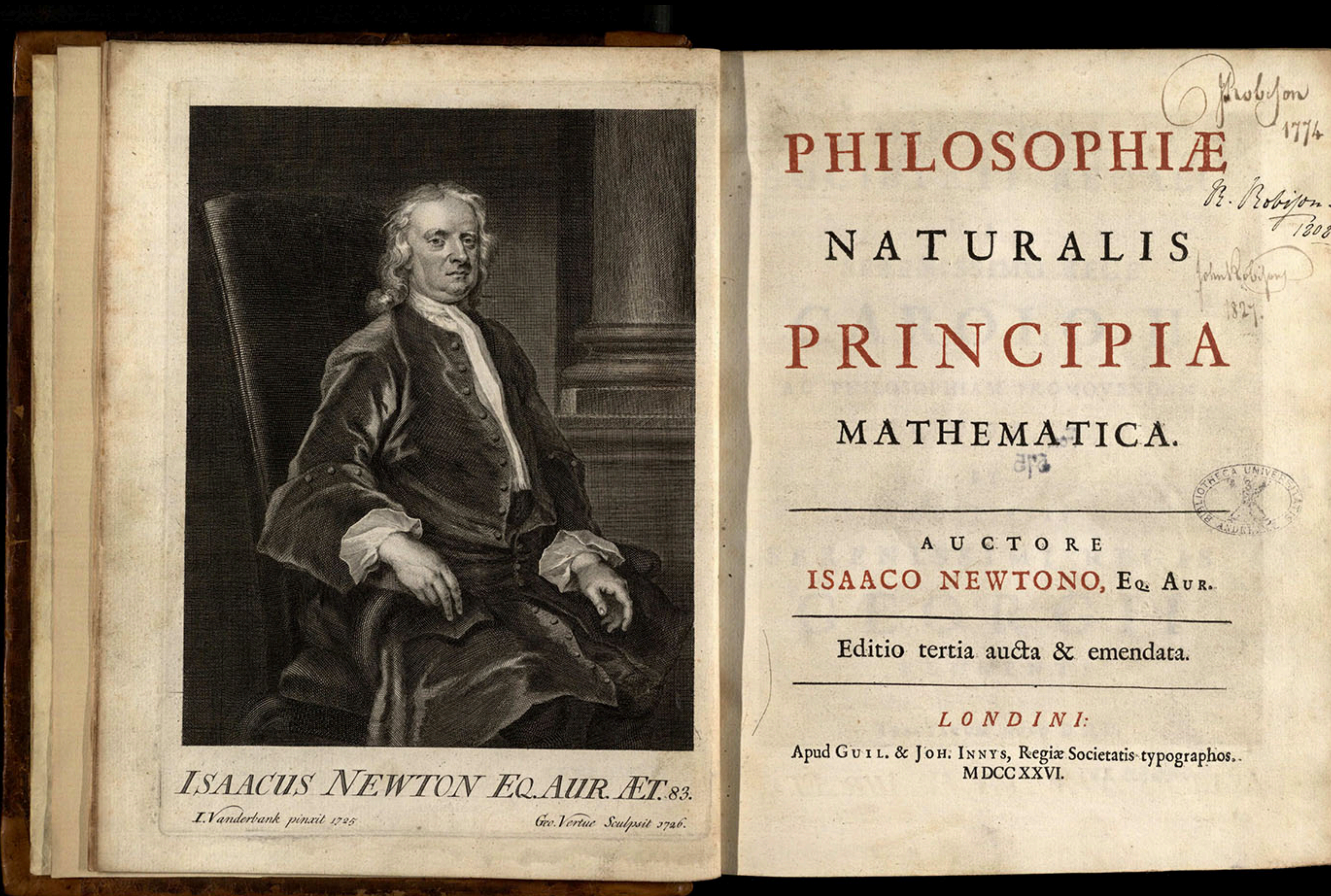
$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{(1\,\mathrm{au})^3}{(365\,\mathrm{dia})^2} = 7{,}5061 \times 10^{-6}\,\mathrm{au}^3\,\mathrm{dia}^{-2}$$

No caso do ***movimento da Lua e dos satélites*** em torno da ***Terra*** temos:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{(0{,}002569\,\mathrm{au})^3}{(28\,\mathrm{dia})^2} = 2{,}163 \times 10^{-11}\,\mathrm{au}^3\,\mathrm{dia}^{-2}$$

Portanto, a constante $R^3/T^2 = 1/\alpha$ é uma ***propriedade do corpo central*** — possivelmente a… massa?…

Física I



Isaac Newton (1643-1727)

Física I

1665

A peste bubônica se espalha pela Inglaterra, fechando Cambridge. Newton se refugia na fazenda da família em Woolsthorpe.

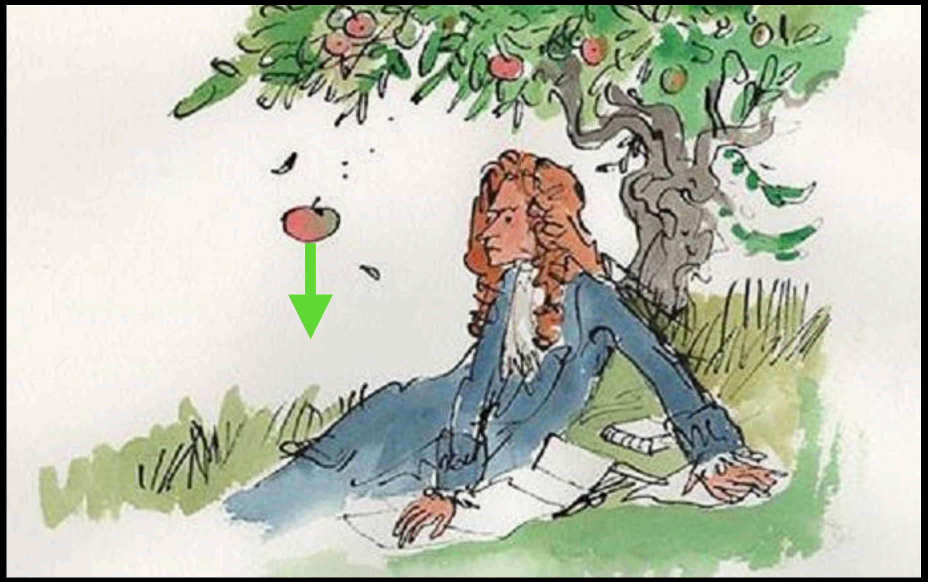
Naquele ano ele vai criar:

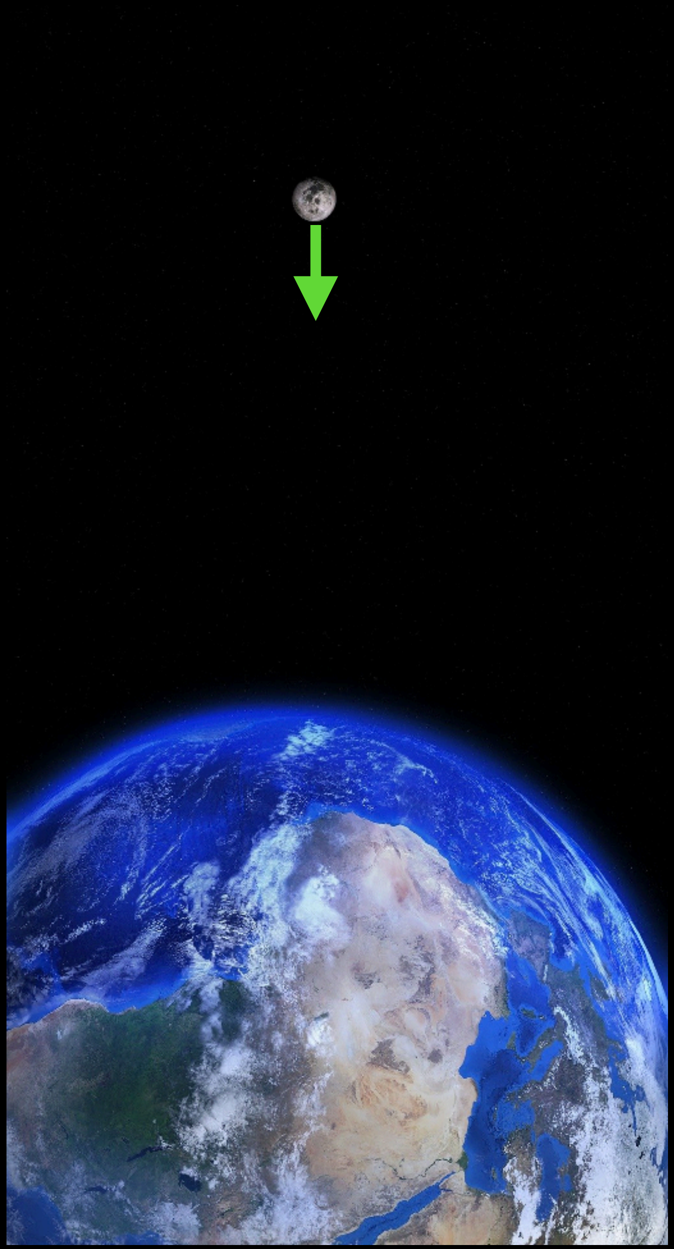
- ★ O cálculo diferencial e integral
- ★ A Óptica (como ela é entendida hoje)
- ★ A Lei da Gravitação

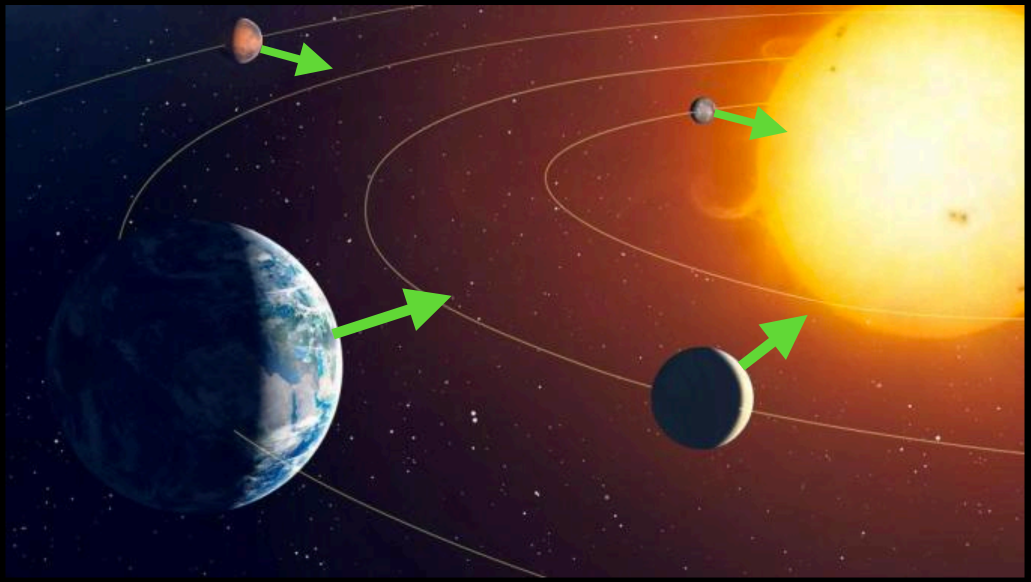
Newton sobre ele mesmo
"I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me."

Isaac Newton (1643-1727)

Física I





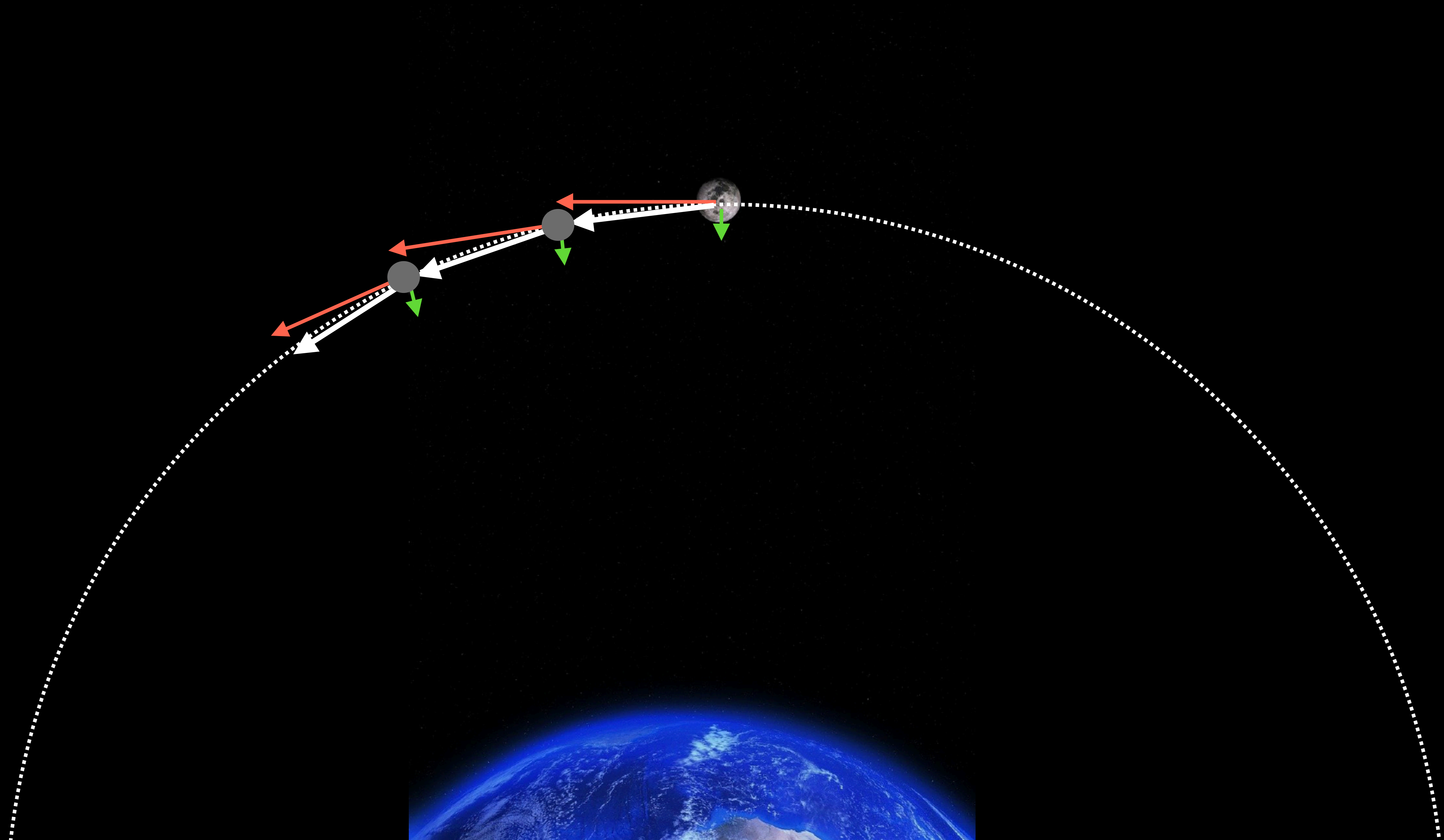


Eureka! Gravidade = força

Física I

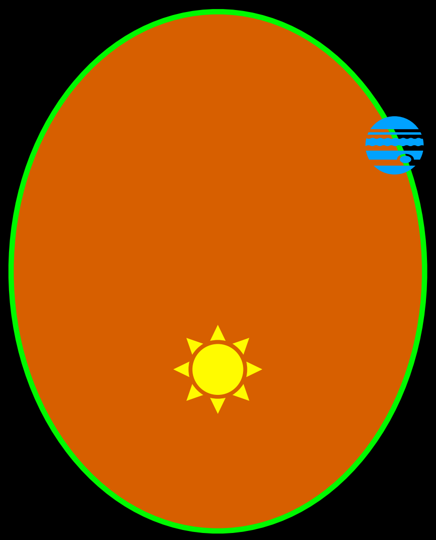
Órbitas:
resultado da força

Mas **qual** força?



Lei da Gravitação Universal

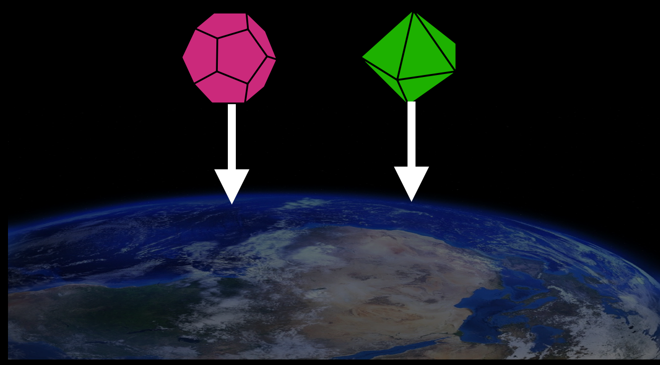
- Nosso ponto de partida é a 3a Lei de Kepler:



$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{1}{\alpha},$$

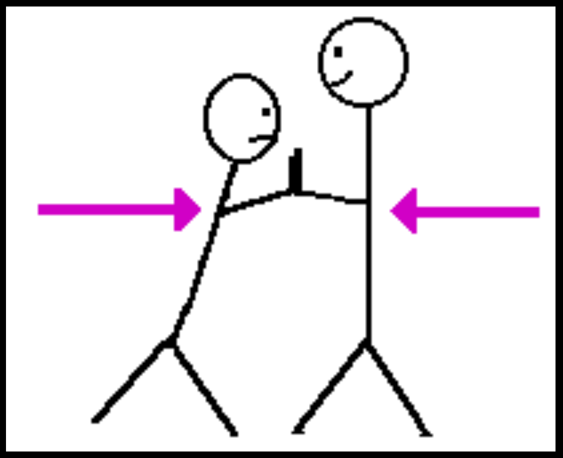
onde α deve ser uma ***propriedade da massa central*** – por exemplo, o corpo celeste.

- Vamos lembrar que, como demonstrado por Galileu, a ***aceleração da gravidade*** é igual para todos os corpos, o que significa que a ***força gravitacional*** é ***proporcional à massa***:



$$\vec{F}_G = m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$$

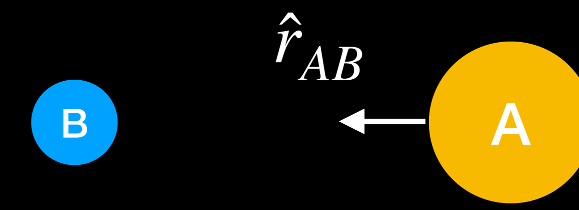
- Mas, pela 3a Lei de Newton, a força que um corpo A exerce sobre outro corpo B é sempre contrabalançada por uma força de módulo igual e sentido oposto, exercida pelo corpo B sobre o corpo A (também conhecida como **Lei da *conservação de momento***):



$$\vec{F}_{A\to B} = -\,\vec{F}_{B\to A}$$

Lei da Gravitação Universal

- Juntando duas "pistas" acima Newton supôs que:

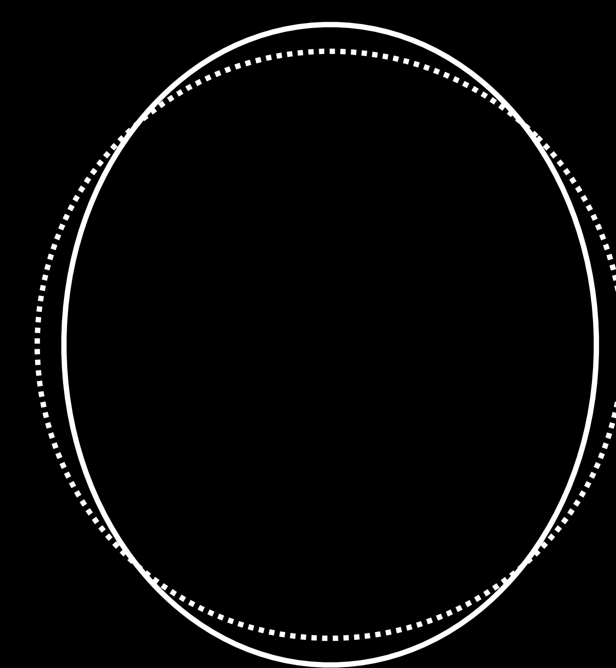


$$\vec{F}_{A \to B} \sim -M_A M_B \hat{r}_{AB}$$

- Vamos agora tentar usar a 3a Lei de Kepler para nos ajudar. Assim, vamos supor que os corpos A e B são o Sol (A) e um planeta (B), ou a Terra (A) e a Lua (B). Sabemos que:

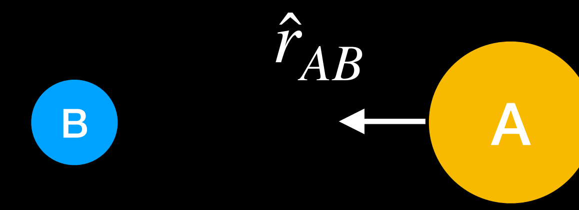
$$\frac{R_B^3}{T_B^2} = \frac{1}{\alpha_A} \sim M_A \quad \Rightarrow M_A = \beta \frac{1}{\alpha_A} = \beta \frac{R_B^3}{T_B^2}$$

- Vamos testar isso: numa órbita elíptica cujo raio médio é R_B, a aceleração angular é, na média:



$$\vec{a}_B = -\omega_B^2 R_B \hat{r}_{AB} \quad , \quad \omega_B = \frac{2\pi}{T_B}$$

Lei da Gravitação Universal



- Acabamos de obter, portanto, que:

$$\vec{a}_B = -\frac{4\pi^2}{T_B^2} R_B \hat{r}_{AB}$$

, e assim a ***força*** de A em B é:

$$\vec{F}_{A\to B} = -M_b \frac{4\pi^2}{T_B^2} R_B \hat{r}_{AB}$$

- Por outro lado, também temos que a força deve ser proporcional à massa M_A , que é

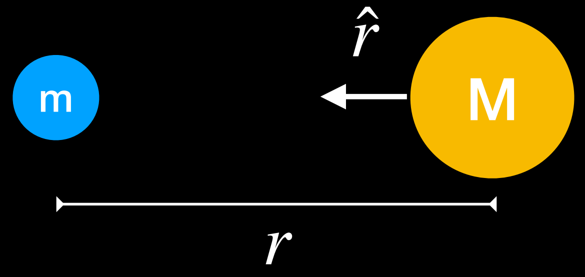
$$M_A = \beta \frac{R_B^3}{T_B^2} \quad \Rightarrow T_B^2 = \frac{\beta R_B^3}{M_A}$$

- Portanto, substituindo acima temos:

$$\vec{F}_{A\to B} = -M_B \frac{4\pi^2}{\left(\frac{\beta R_B^3}{M_A}\right)} R_B \hat{r}_{AB} = -\underbrace{\boxed{\frac{4\pi^2}{\beta}}}_{G} M_A M_B \frac{1}{R_B^2} \hat{r}_{AB}$$

Lei da Gravitação Universal

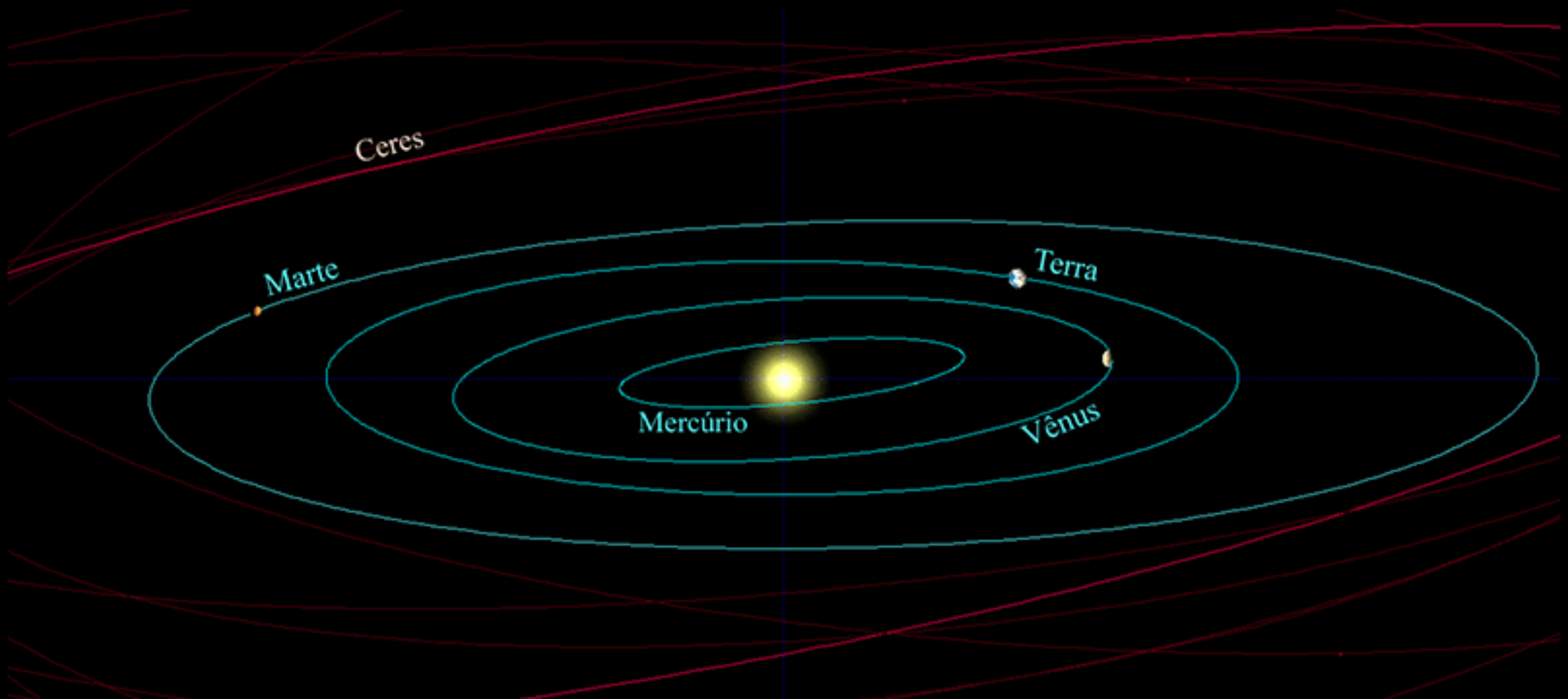
- Ou, numa notação menos prolixa:



$$\vec{F} = -\,G\,M\,m\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

- A constante de Newton é ***medida*** como sendo:

$$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$$



Fim da Aula I

Próxima aula:
Lei da Gravitação Universal
e suas consequências

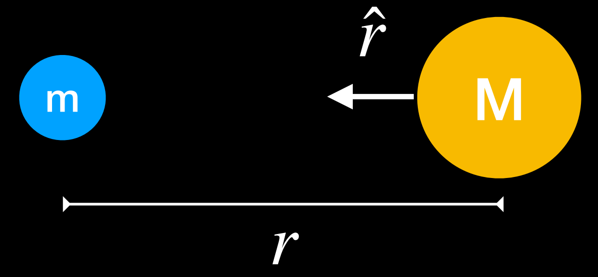
Física I

Módulo IV, Aula 2:
A Lei da Gravitação Universal

- **Trabalho e energia potencial gravitacional**
- **Centro de massa e massa reduzida**
- **Trajetórias: problemas de 2, 3 e N corpos**
- **Força de uma casca esférica**
- **Teorema do Virial**

A Lei da Gravitação Universal

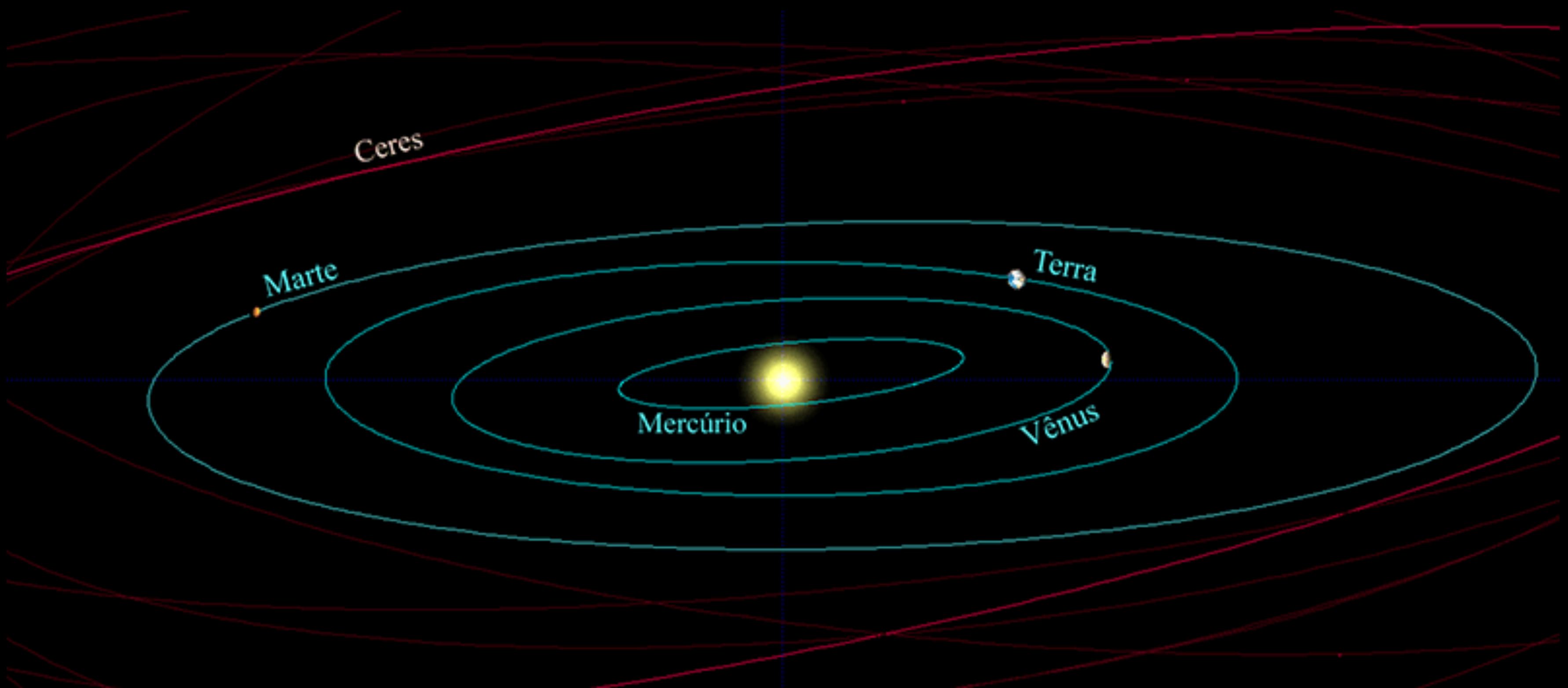
- Ou, numa notação menos prolixa:



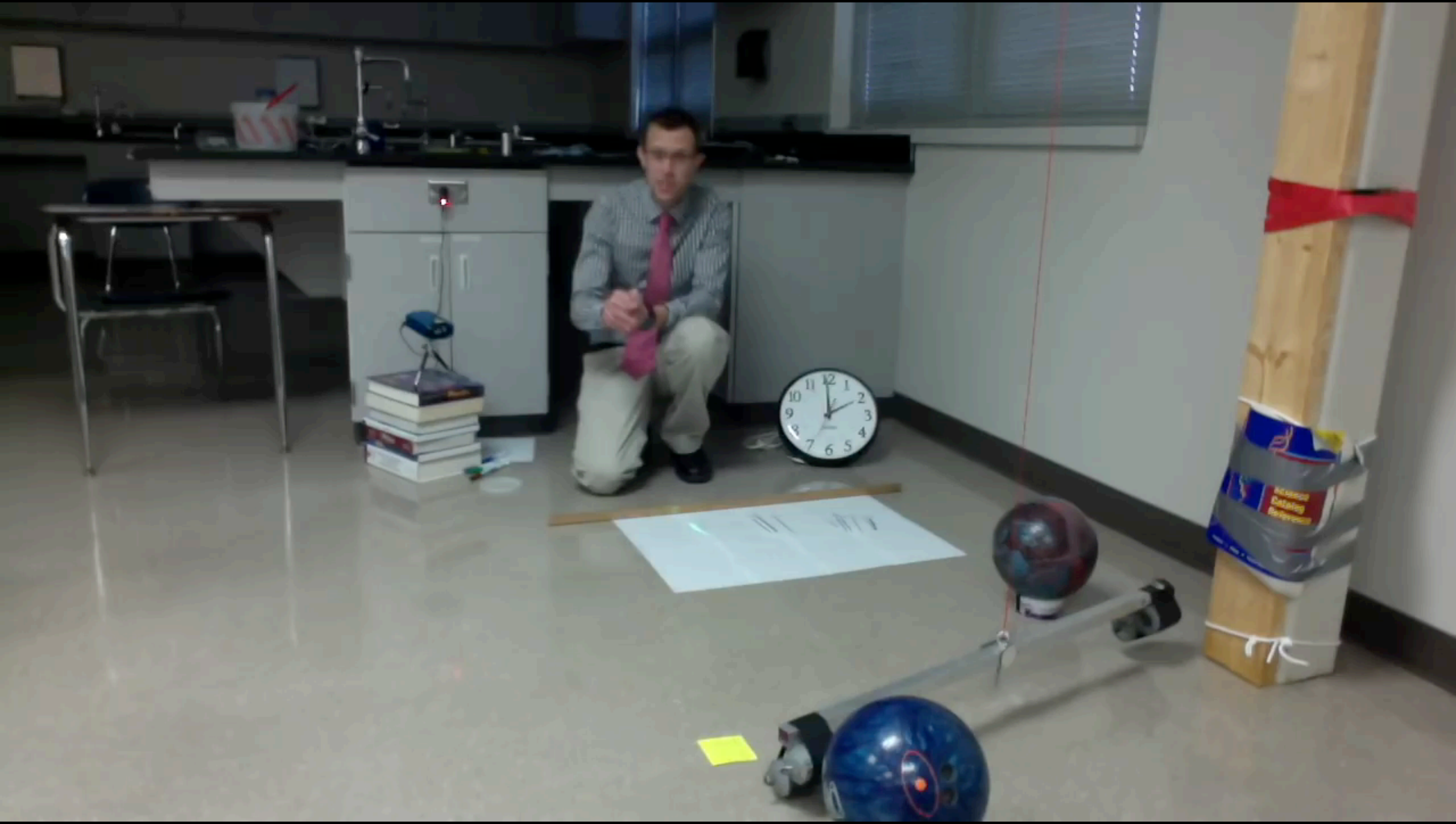
$$\vec{F} = -\,G\,M\,m\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}$$

- A constante de Newton é ***medida*** como sendo:

$$G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-2}$$



Como medir a constante G



Balança de Cavendish

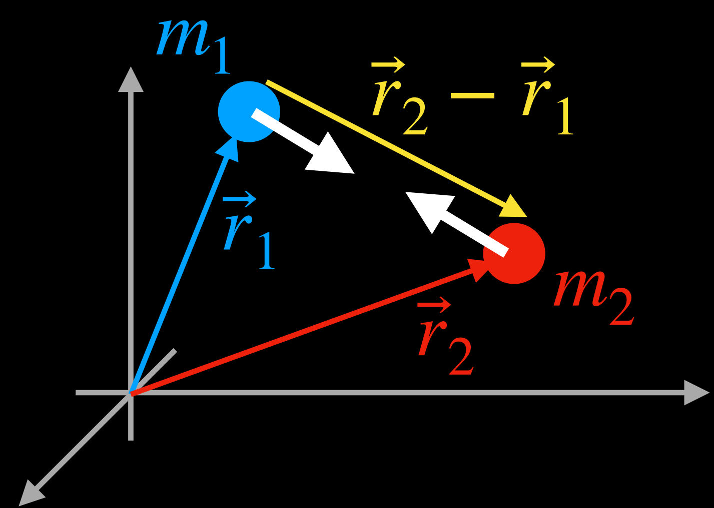
A Lei da Gravitação Universal

- Vamos escrever interação gravitacional de um modo mais geral, com a origem num ponto arbitrário:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G\frac{m_1\, m_2}{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

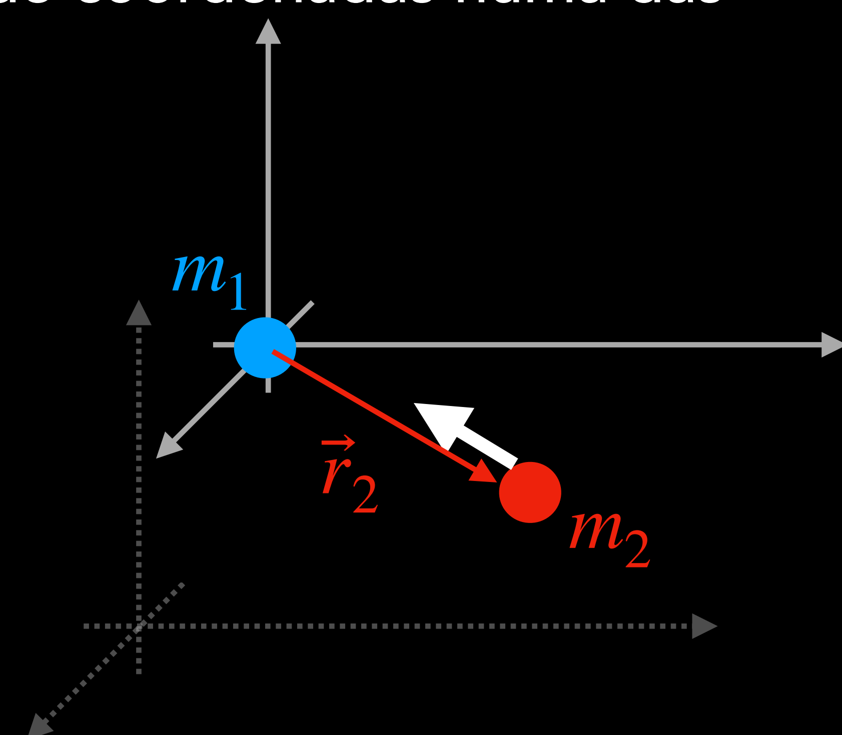
$$\vec{F}_{2\to 1} = -G\frac{m_2\, m_1}{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2}\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$



- Podemos, por simplicidade, posicionar o nosso sistema de coordenadas numa das massas — digamos, m_1 . Então, com $\vec{r}_1 \to \vec{0}$ temos:

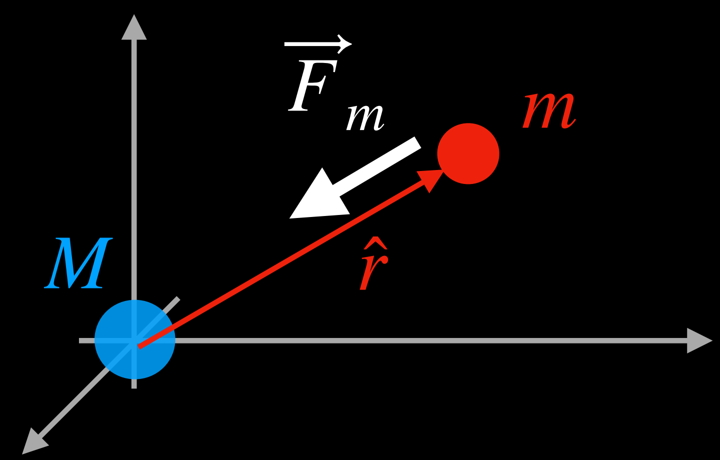
$$\vec{F}_2 = -G\frac{m_1\, m_2}{\left(\vec{r}_2 - \vec{0}\right)^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{0}}{|\vec{r}_2 - \vec{0}\,|} = -G\frac{m_1\, m_2}{r_2^2}\hat{r}_2$$



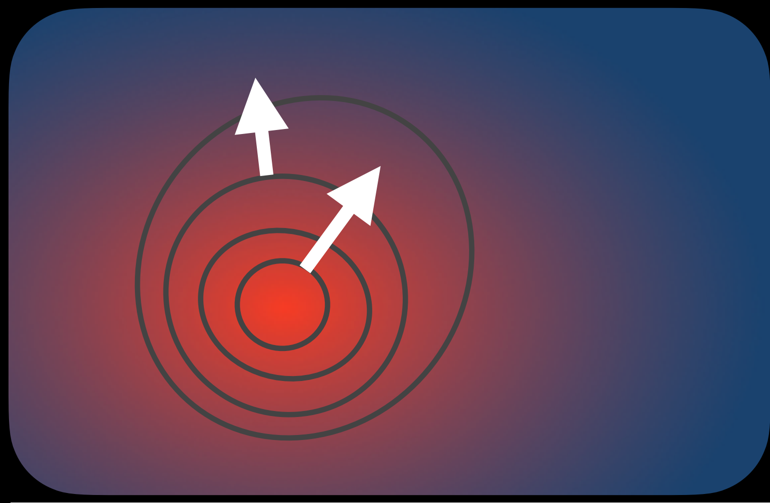
A Lei da Gravitação Universal

- Podemos escrever, de um modo mais compacto, que a força gravitacional de M em m é dada por:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M\,m}{r^2}\hat{r}$$



- Forças dessa natureza têm uma característica fundamental, que as distingue de todas as outras: elas são ***forças conservativas.***

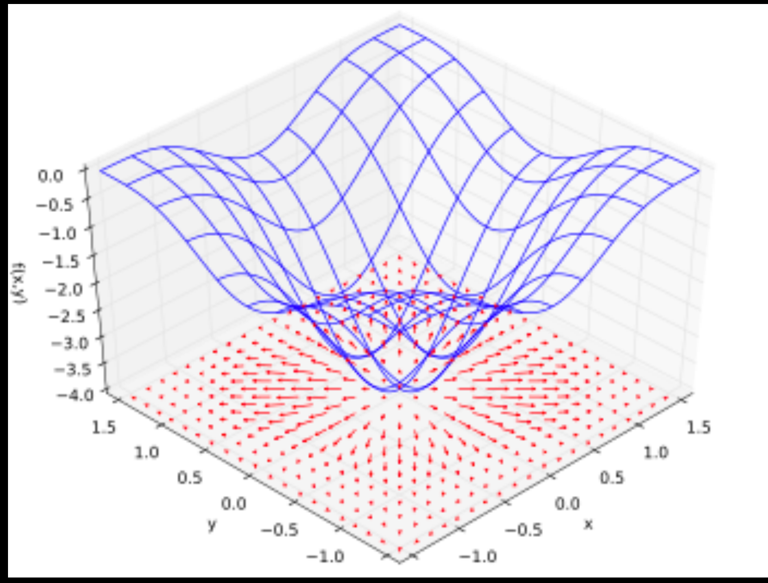


- Uma força conservativa pode ser expressa como o ***gradiente*** de uma função escalar — a ***energia potencial***:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\,U(\vec{r})$$

- Lembrem-se da definição do gradiente: ele é uma "derivada vetorial", e indica como uma função ***varia no espaço*** — tanto a ***direção*** da mudança quanto a ***intensidade:***

$$\vec{\nabla}\,U = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$



Forças conservativas

- No caso particular da força gravitacional, a função $U_G(r)$ é:

$$U_G(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_G = -GMm\frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Para mostrar isso, note que:

$$\vec{\nabla}\, r^2 = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}x^2 + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}y^2 + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}z^2 = 2\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = 2\vec{r}$$

- Mas $\vec{\nabla}\, r^2 = 2\, r\, \vec{\nabla}\, r$, portanto $\vec{\nabla}\, r = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$. Assim, obtemos que:

$$-\vec{\nabla}\, U_G = \vec{\nabla}\left(\frac{GMm}{r}\right) = GMm\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = GMm\left(-\frac{1}{r^2}\right)\vec{\nabla}\, r$$

- Portanto, usando que $\vec{\nabla}\, r = \hat{r}$ acabamos de mostrar que:

$$-\vec{\nabla}\, U_G = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = \vec{F}_G$$

Energia potencial

- O fato de que a força pode ser expressa desse modo (como o ***gradiente de uma função***) tem uma importância fundamental, que vamos explorar a seguir.

- Vamos calcular o ***trabalho*** realizado pela força no corpo de massa m, ao longo de uma trajetória qualquer dessa partícula. Para uma ***força qualquer*** temos:

$$W_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$$

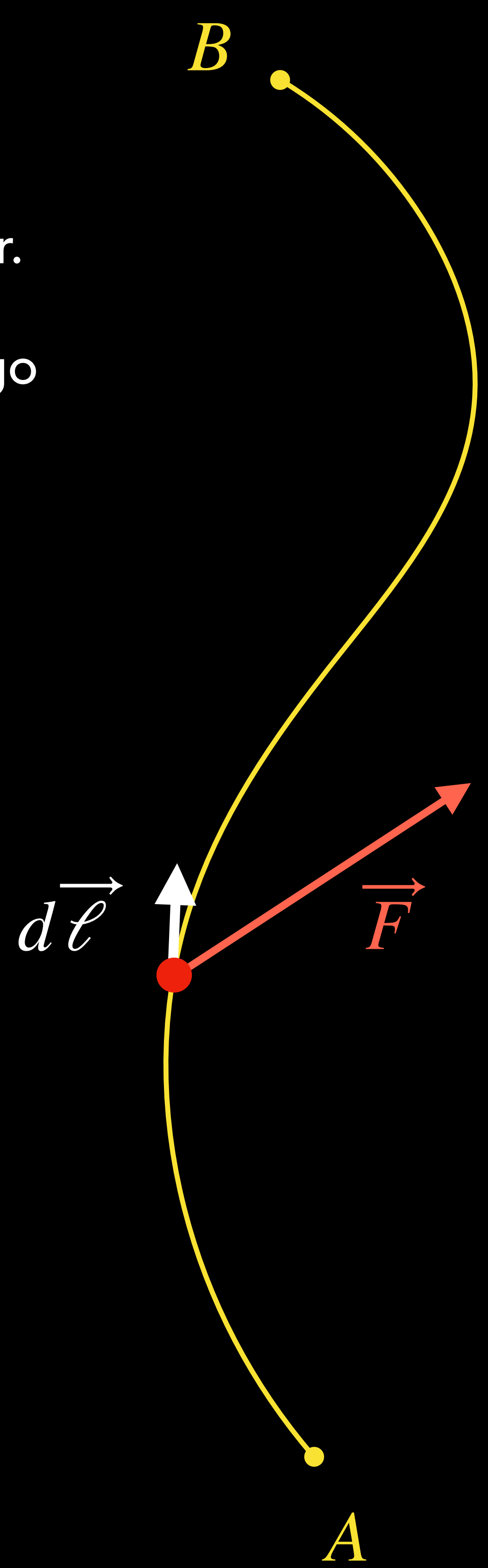
- No caso de uma ***força conservativa*** temos:

$$W_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell} \cdot \left(-\vec{\nabla} U\right)$$

- Mas o gradiente não é nada mais do que uma derivada vetorial, portanto:

$$W_{A\to B} = -\int_A^B d\ell \left(\hat{\ell} \cdot \vec{\nabla} U\right) = -\int_A^B d\ell \frac{dU}{d\ell} = -\left[U(B) - U(A)\right]$$

- Note que isso ***não depende do caminho*** que leva de A a B !!!



Energia potencial

- Mas o trabalho não é nada mais do que a ***variação da energia cinética*** do corpo de uma posição à outra:

$$W_{A\to B} = \Delta K_{A\to B} = \int_A^B d\vec{\ell}\cdot\vec{F}$$

- Por outro lado, vimos que essa mesma variação pode ser escrita como:

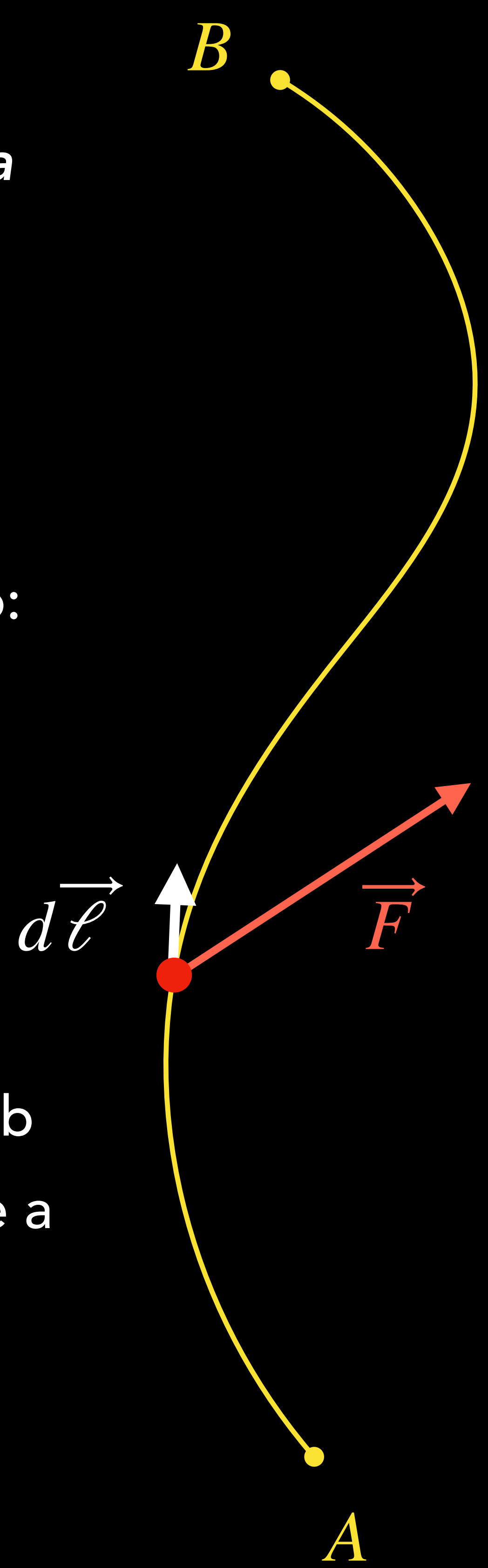
$$W_{A\to B} = -\Delta U_{A\to B} = -\left[U(B) - U(A)\right]$$

- Podemos escrever essa igualdade como:

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{A\to B} = 0$$

- Ou seja: o que encontramos é que toda vez que um corpo se move sob a influência de uma força conservativa, o que ocorre é uma troca entre a energia cinética e a função U, que chamamos de "energia potencial":

$$K + U = E = \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad \Delta K + \Delta U = 0$$



Energia potencial

- Para colocar isso de um modo intuitivo:

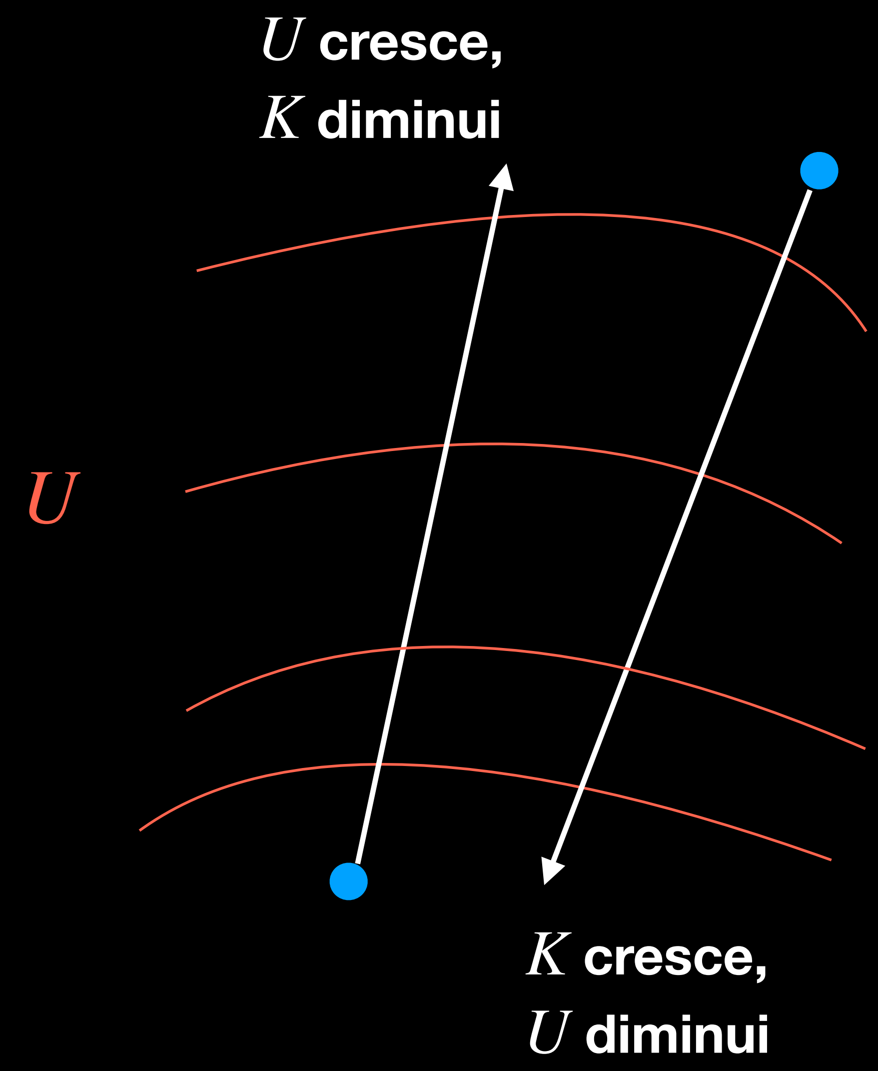
$$\Delta K + \Delta U = 0$$

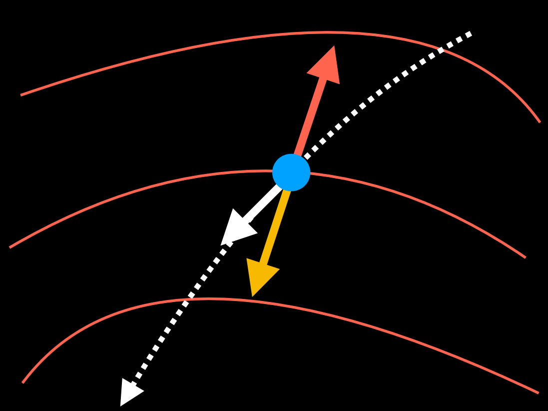
(a) se a energia cinética cresce, a energia potencial diminui

(b) se a energia cinética cai, a energia potencial aumenta

- Também é útil lembrar que a energia cinética aumenta quando o movimento se alinha à força:

$$\Delta K = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (-\vec{\nabla} U) \cdot \Delta\vec{r}$$

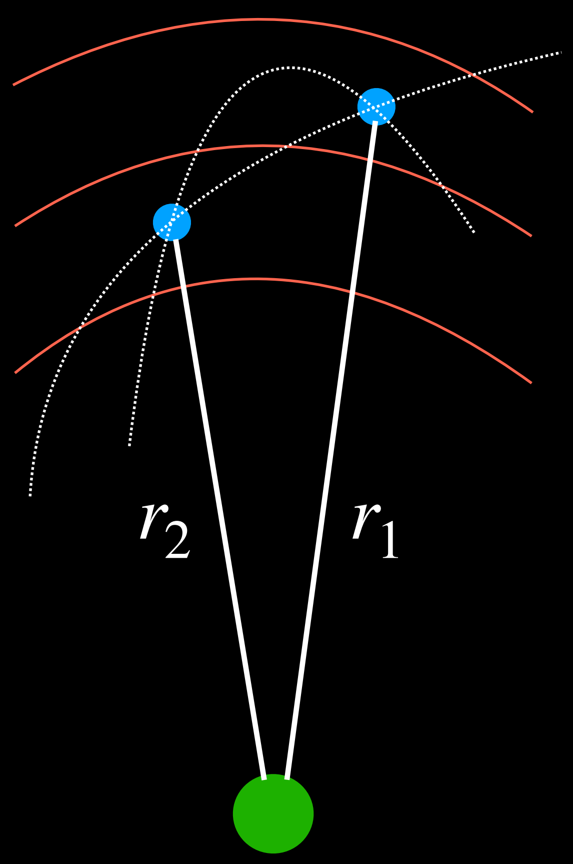




Energia potencial

- No caso particular da força gravitacional, temos a energia potencial:

$$U_G(r) = -\frac{GMm}{r}$$



- De um ponto 1 a uma distância r_1 da massa M, até um ponto 2 a uma distância r_2 , a energia potencial gravitacional varia de:

$$\Delta U_{12} = U(r_1) - U(r_2)$$

$$= -\frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{r_2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

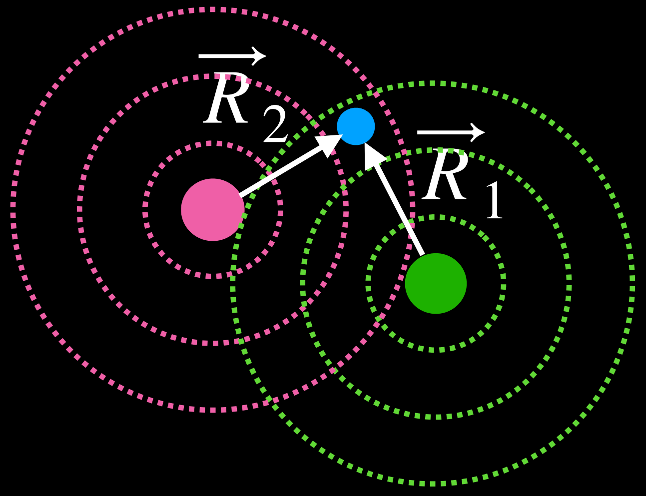
- Note que essa energia ***não depende do caminho***: a energia cinética que a massa m vai ganhar/perder no trajeto entre os dois pontos é dada apenas por ΔU_{12} !

Energia potencial

- O que acontece no caso na força gravitacional gerada por muitas massas (M_1 , M_2, …), cada uma numa posição ($\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, …)?
- Simples! Fazendo $\overrightarrow{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$, temos que a força de ***cada uma*** é dada por:

$$\overrightarrow{F}_{Tot} = -GM_1 m \frac{\overrightarrow{R_1}}{R_1^3} - GM_2 m \frac{\overrightarrow{R_2}}{R_2^3} + \dots$$

$$= -\sum_i G M_i m \frac{\overrightarrow{R_i}}{R_i^3}$$



- Mas cada uma dessas forças pode ser expressa por uma energia potencial:

$$\overrightarrow{F}_i = -G M_i m \frac{\overrightarrow{R_i}}{R_i^3} = -G M_i m \frac{\vec{r} - \overrightarrow{r_i}}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_i}|^3}$$

$$= -\overrightarrow{\nabla}\left(-GMm \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}\right)$$

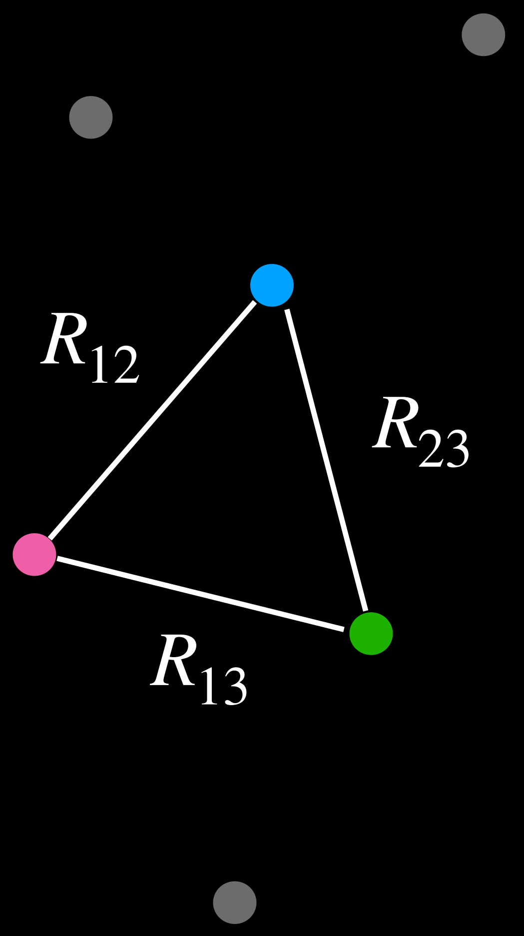
- Portanto, podemos expressar a força conjunta dessas massas pontuais em termos de uma energia potencial gravitacional total:

$$\overrightarrow{F}_{Tot} = -\overrightarrow{\nabla} U_{Tot} \quad , \quad \text{onde} \quad U_{Tot} = \sum_i U_i = -\sum_i \frac{G M_i m}{R_i}$$

Energia potencial

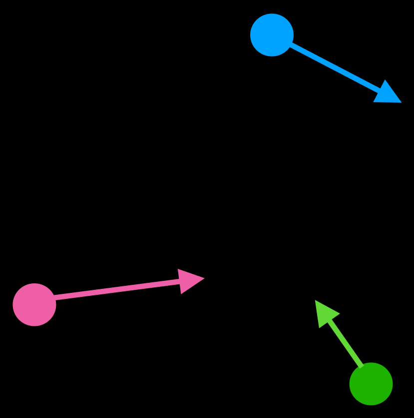
- De um modo ainda mais geral, podemos expressar a ***energia potencial total*** de um ***sistema*** de N partículas ($i = 1,2,\ldots,N$)

$$U_{Tot} = \sum_{j<i} \sum_{i=1}^{N} U_{ij} = - \sum_{j<i} \sum_{i=1}^{N} \frac{G\, M_i\, M_j}{R_{ij}}$$



O centro de massa

- E por falar num conjunto de partículas, vamos considerar um sistema de N massas pontuais (M_1 , M_2, …), em posições $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, …, e com velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …).



- A ***quantidade de movimento (momento) total*** do sistema é:

$$\vec{P}_{Tot} = \sum_i M_i \vec{v}_i$$

- Podemos expressar esse momento total em termos do ***centro de massa*** (CM):

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}_{CM}}{M_{Tot}} \quad , \quad \text{onde} \quad M_{Tot} = \sum_i M_i$$

$$\implies \quad \vec{P}_{Tot} = M_{Tot} \vec{V}_{CM}$$

- E a ***energia cinética total*** desse sistema de partículas é:

$$K_{Tot} = \sum_i \frac{1}{2} M_i \vec{v}_i^2$$

O centro de massa

- Dado um par de partículas, a posição do CM é dada por:

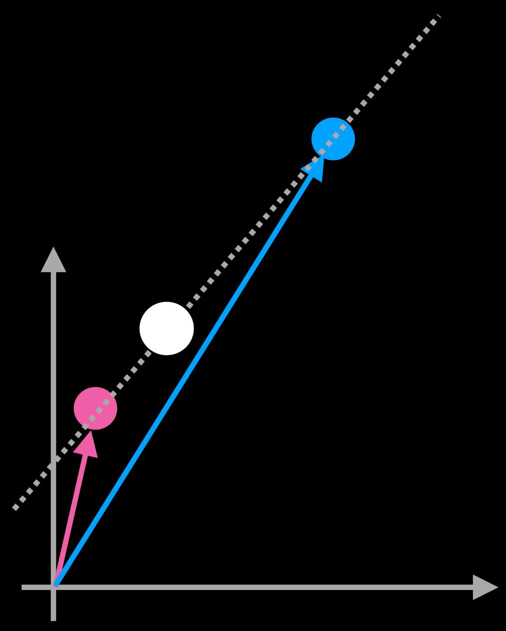
$$M_{Tot} \vec{R}_{CM} = \sum_i M_i \vec{r}_i$$

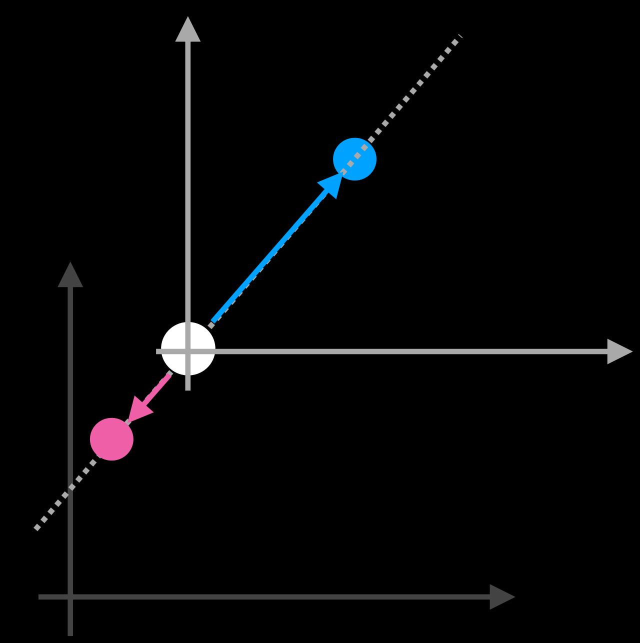
- Frequentemente é conveniente utilizar o referencial do CM, no qual $\vec{R}_{CM} \to \vec{0}$ (origem do sist. de coordenadas): $\vec{r}_i \to \vec{R}_i$
- Corolário: para um par de partículas, o CM está posicionado entre as duas, na direção que liga as partículas — quaisquer que sejam as suas massas.
- No caso de duas partículas temos, no referencial do CM:

$$M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R}_1 = -\frac{M_2}{M_1}\vec{R}_2$$

- A distância entre as duas partículas, $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, pode então ser escrita como:

$$\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 + \frac{M_2}{M_1}\vec{R}_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_1}\vec{R}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{R}_2 = \frac{m_1}{M_1 + M_2}\vec{R}_{12}$$

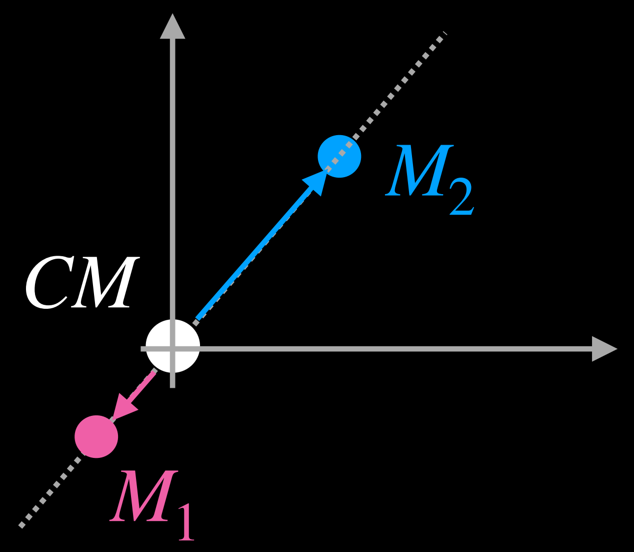




O centro de massa

- Agora podemos expressar a força gravitacional em termos dessa distâncias com relação ao CM. Temos:

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{GM_1M_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} = M_2\vec{a}_2 = M_2\ddot{\vec{R}}_2$$



- Usando a relação obtida acima, $\vec{R}_2 = \dfrac{M_1}{M_1+M_2}\vec{R}_{12}$, obtemos:

$$-\frac{GM_1M_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} = \frac{M_1\,M_2}{M_1+M_2}\ddot{\vec{R}}_{12} = \mu\ddot{\vec{R}}_{12} \quad , \quad \text{onde}$$

$\mu = \dfrac{M_1\,M_2}{M_1+M_2}$ é a chamada ***massa reduzida***

- Note que, se trocarmos os papéis das duas partículas, obtemos:

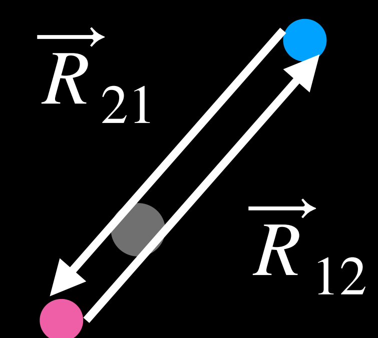
$$-\frac{GM_1M_2}{R_{21}^3}\vec{R}_{21} = \mu\,\ddot{\vec{R}}_{21} \quad ,$$

onde, claro, $\vec{R}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e $\vec{R}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{R}_{12}$

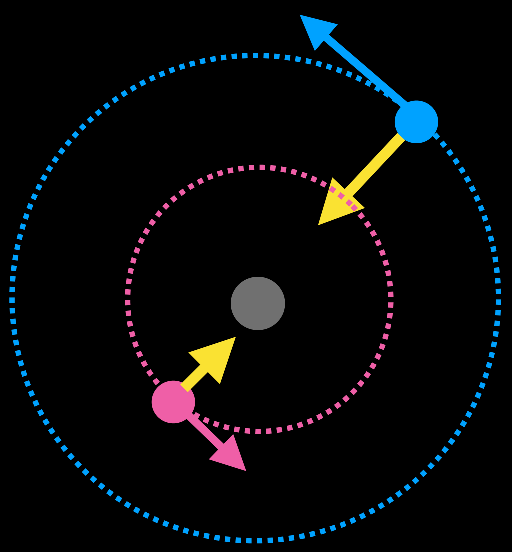
O centro de massa

- Na prática, isso significa que podemos ***reduzir*** o problema de dois corpos (M_1 e M_2) a um problema muito mais simples, de uma só variável — seja ela $\overrightarrow{R}_{12}$ ou $\overrightarrow{R}_{21}$. Por exemplo, resolvemos:

$$-\frac{GM_1M_2}{R_{12}^3}\overrightarrow{R}_{12} = \mu\ddot{\overrightarrow{R}}_{12}$$



- Note que, após resolver essas equações e obter as trajetórias, podemos voltar e calcular a posição no referencial do CM, fazendo:

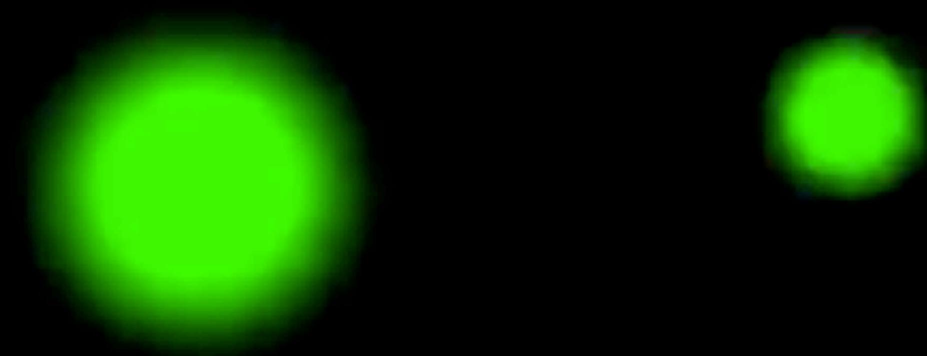


$$\overrightarrow{R}_2 = \frac{M_1}{M_1+M_2}\overrightarrow{R}_{12} \quad \textbf{\textit{e}} \quad \overrightarrow{R}_1 = \frac{M_2}{M_1+M_2}\overrightarrow{R}_{21} = -\frac{M_2}{M_1}\overrightarrow{R}_2$$

Trajetórias

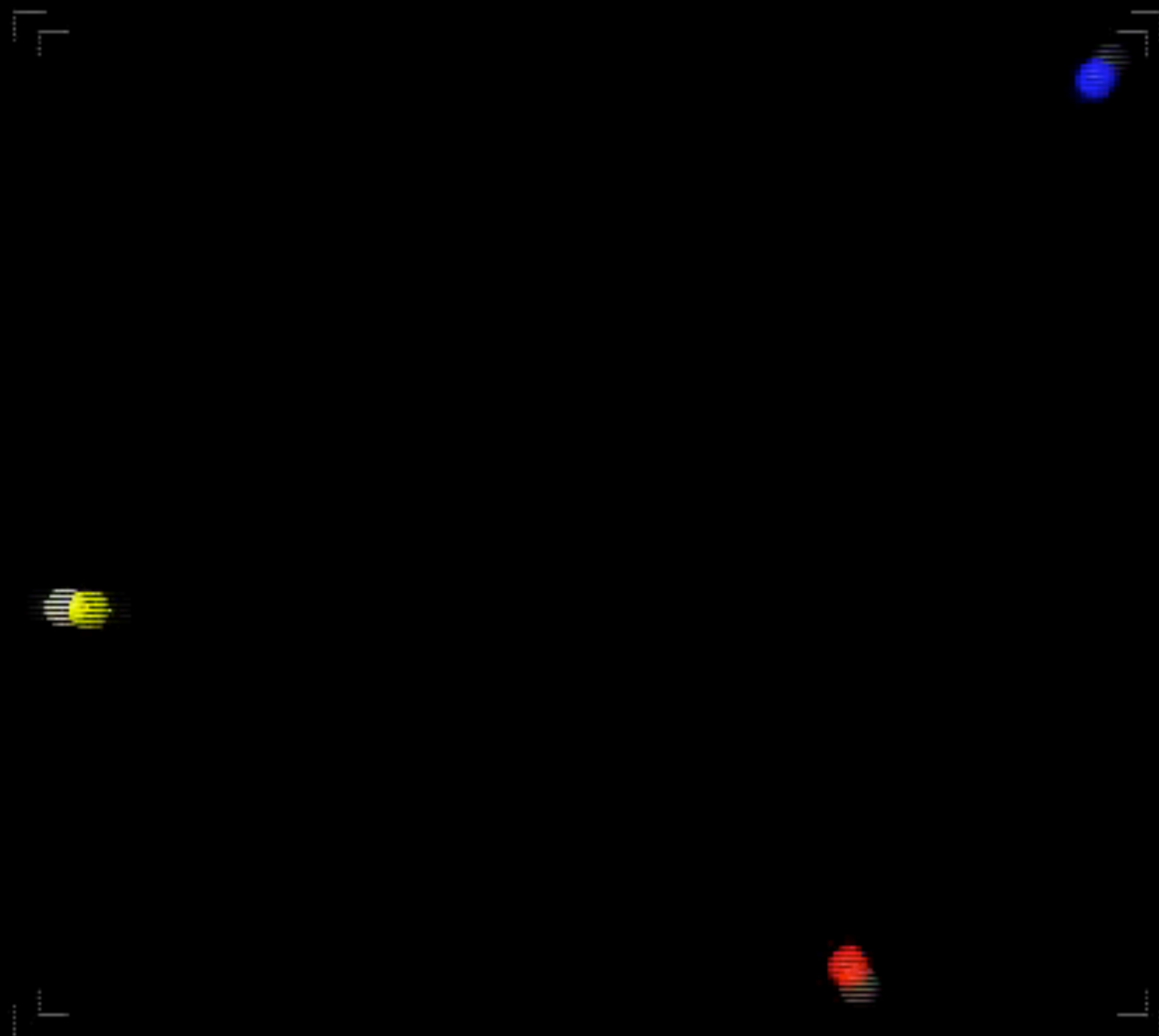
Simulações de Rubens Machado (UFOP)

http://professor.ufop.br/rgmachado/hist%C3%B3ria-da-astronomia



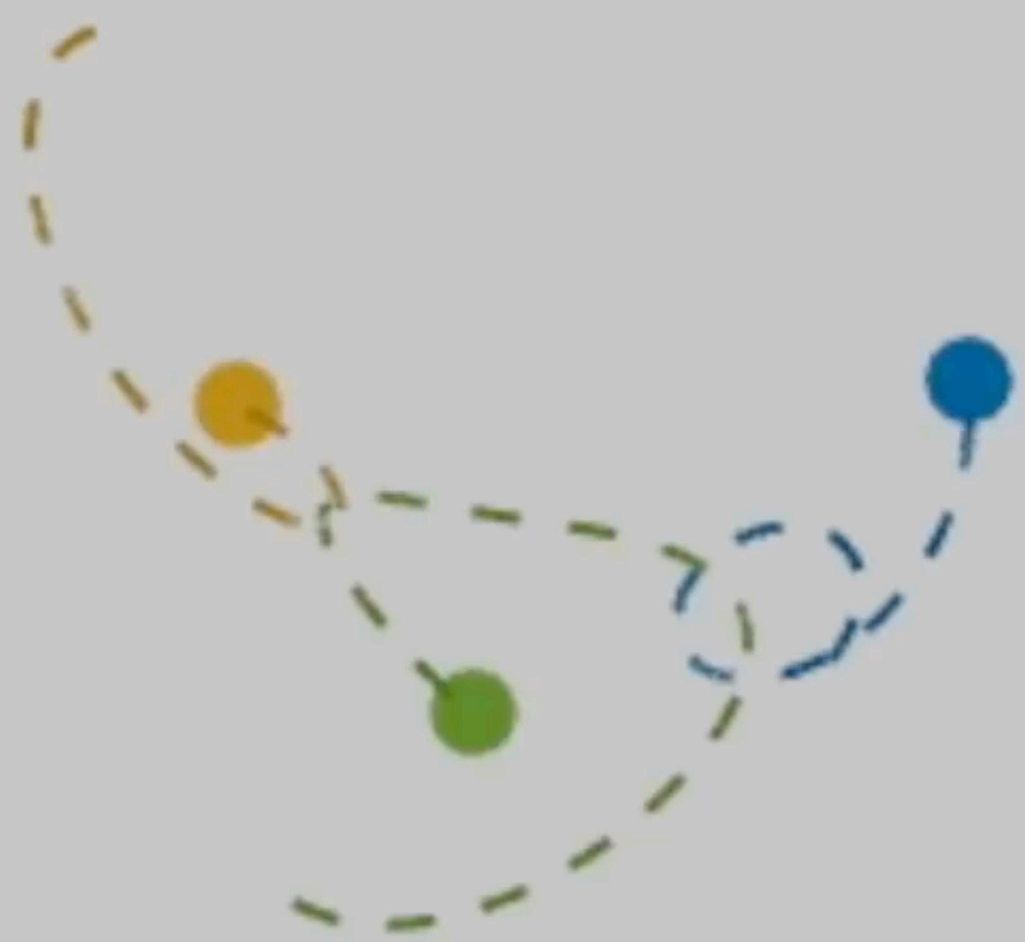
Problema de 2 corpos… e 3 corpos??

Trajetórias



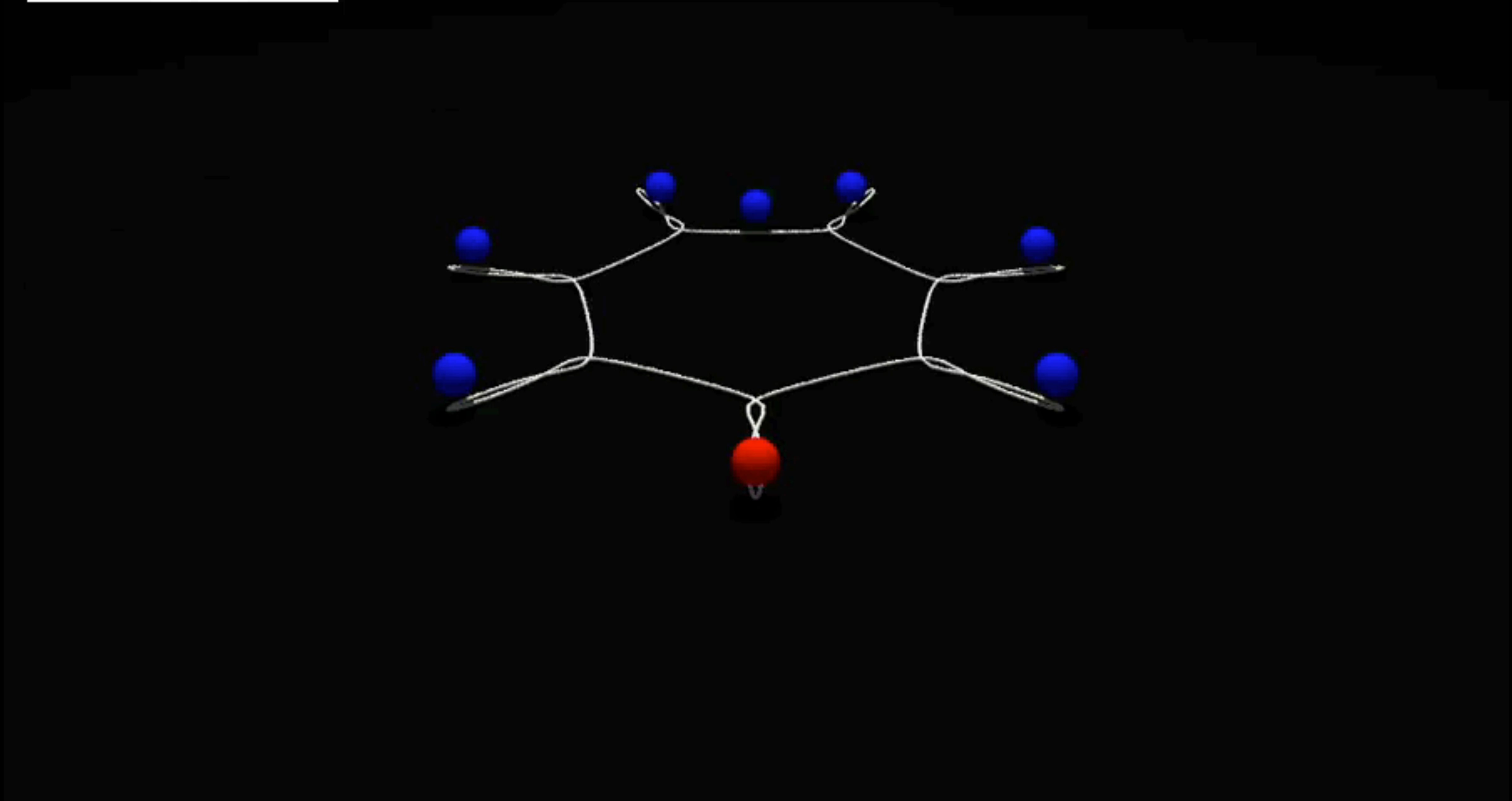
Problema de 3 corpos mais geral: **caos**!

Trajetórias



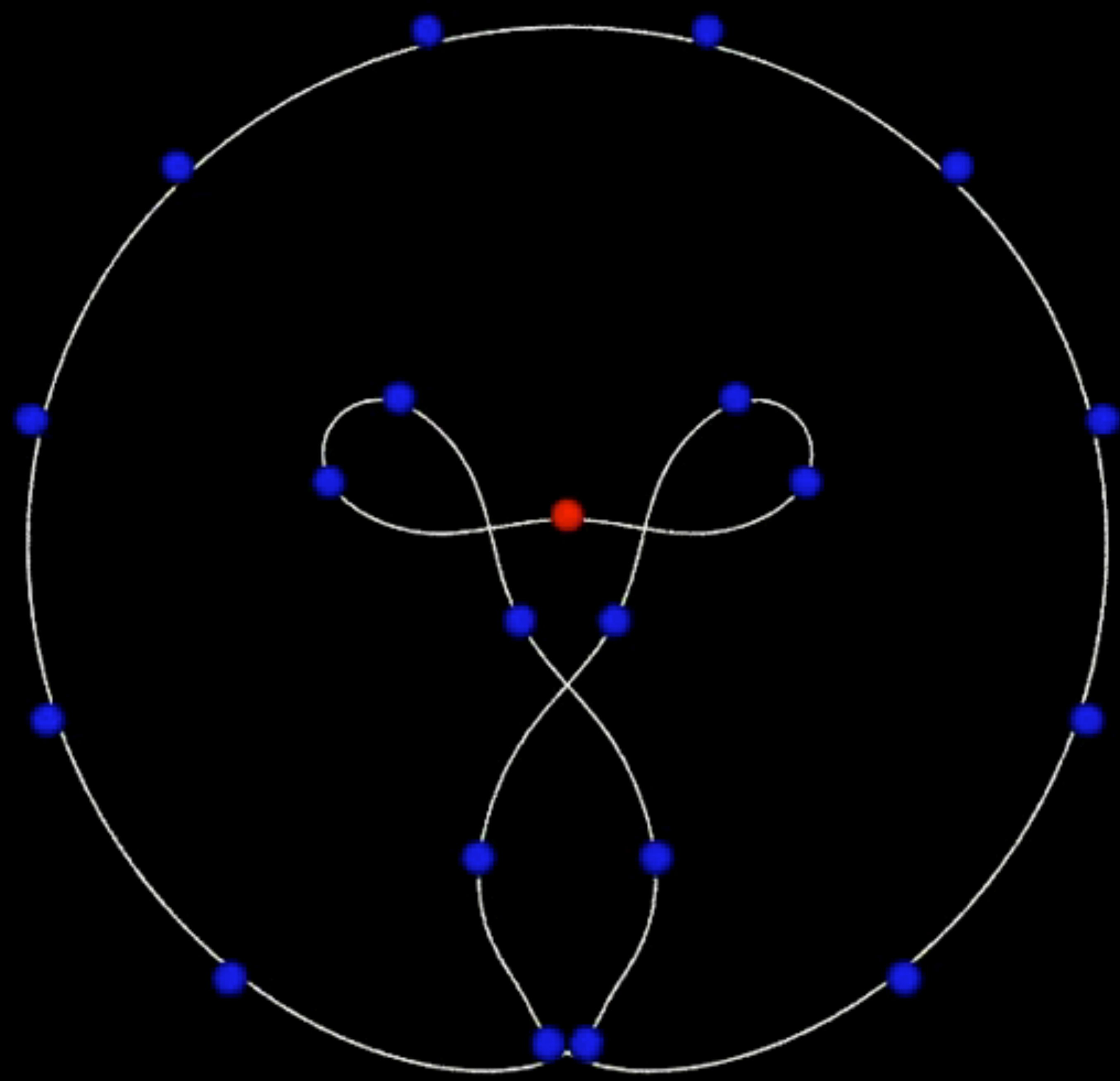
Problema de 3 corpos: algumas soluções periódicas!

Trajetórias



Problema de 8 corpos periódico

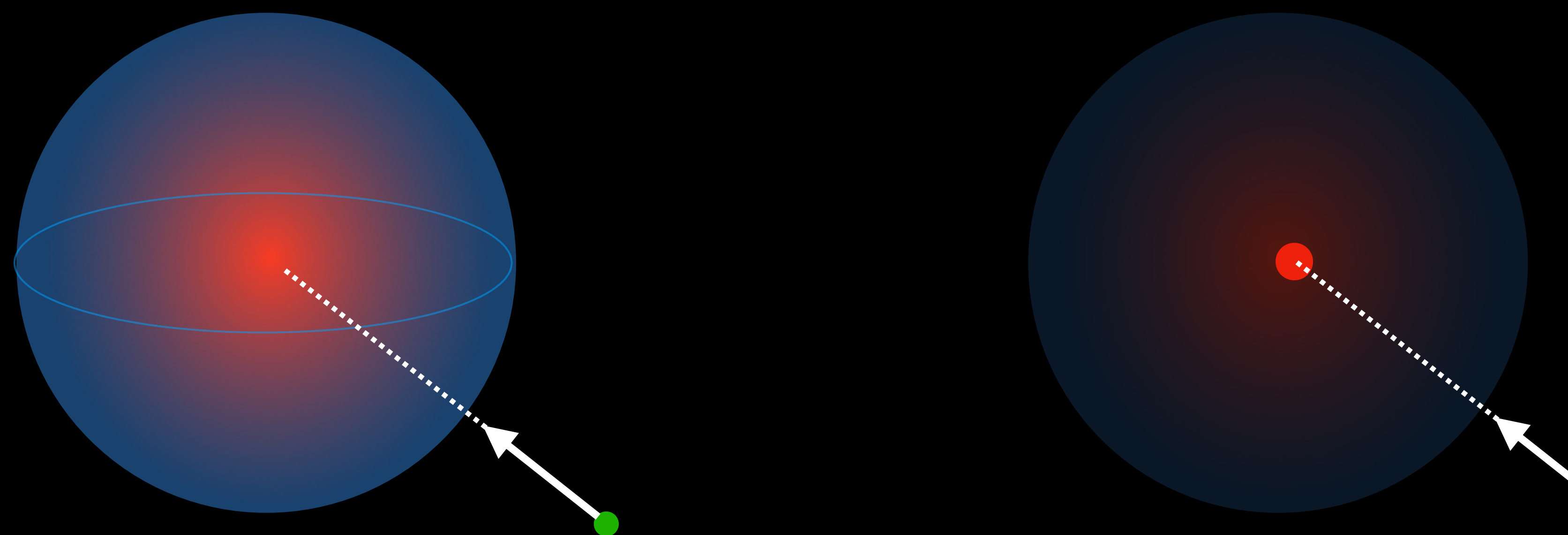
Trajetórias



Problema de 21 corpos periódico!

Teorema das cascas esféricas

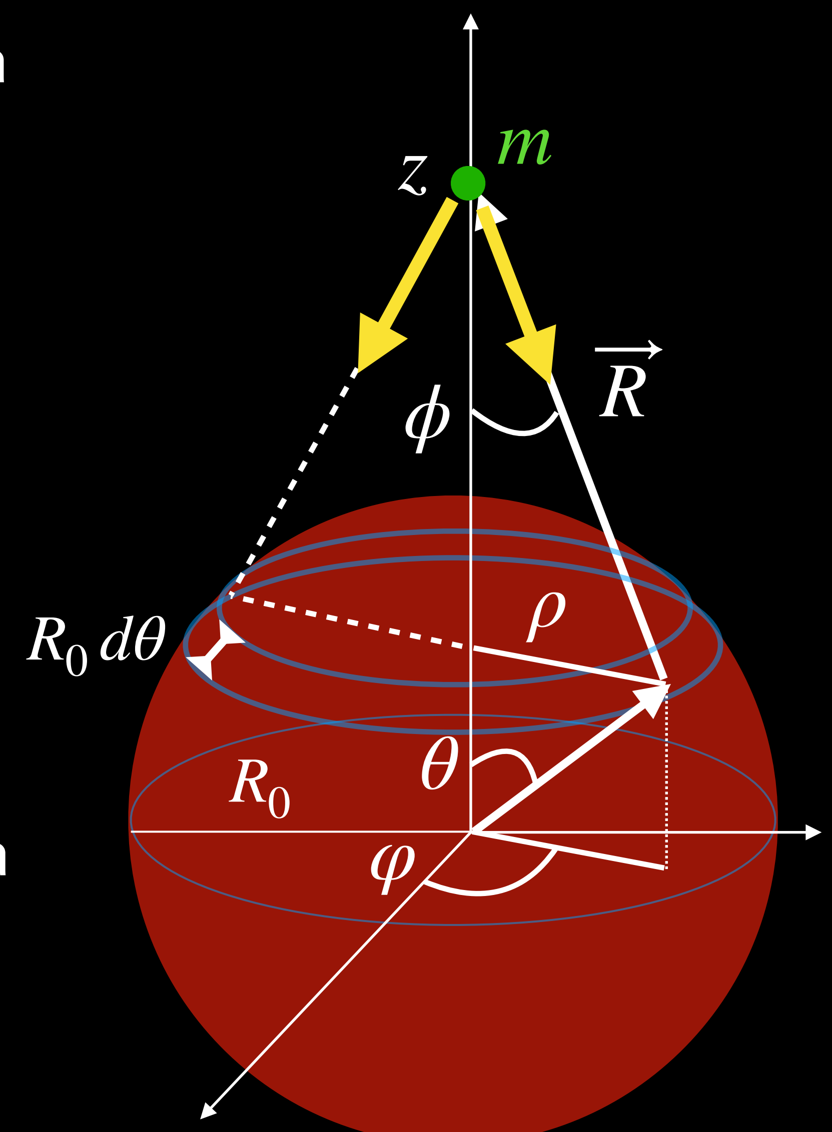
- Seja uma ***distribuição esfericamente simétrica de massa***, de tal forma que a densidade do objeto é dada por $\rho = \rho(r)$:



- O teorema nos diz que, desde que haja essa simetria esférica, a ***força gravitacional <u>total</u>*** de cada parte dessa distribuição de massa ***se combina*** de um tal modo que é como se ***toda a massa estivesse no centro*** da distribuição.

Teorema das cascas esféricas

- Vamos começar esse cálculo num caso simples, de uma ***casca esférica*** de raio R_0 e ***densidade superficial*** de massa $\sigma = M/A = M/(4\pi R_0^2)$.
- Comece considerando o ***anel*** que corresponde ao ângulo θ, com largura $d\theta$.
- Pela ***simetria por rotações*** em torno do eixo φ, só a componente da força ***na direção do eixo*** z não cancela nesse anel. Temos portanto que a força total do anel é dada por:



$$d\vec{F} = -G\, m\, dM \,\frac{1}{R^2}\,\left(\cancel{\operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho}} + \cos\phi\,\hat{z}\right) \quad\longrightarrow\quad -G\, m\, dM_{\text{anel}}\,\frac{1}{R^2}\,\cos\phi\,\hat{z}$$

onde $dM_{\text{anel}} = \sigma\, dA_{\text{anel}} = \sigma\,(2\pi\rho\, R_0\, d\theta) = \sigma\, 2\pi R \operatorname{sen}\theta\, R_0\, d\theta$

Teorema das cascas esféricas

- Agora é fácil — basta integrar!

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \left[-G\, m\, dM_{\text{anel}} \frac{1}{R^2} \cos\phi\, \hat{z} \right]$$

$$= \int \left[-G\, m\, (\sigma\, 2\pi\, R\, \text{sen}\, \theta\, R_0\, d\theta) \frac{1}{R^2} \cos\phi\, \hat{z} \right]$$

- Pode parecer uma expressão muito complicada, já que a distância $R = R(\theta)$: para $\theta = 0$, $R = z - R_0$, e para $\theta = \pi$, $R = z + R_0$.
- De um modo totalmente geral, essa dependência está dada pela lei dos cossenos, ou seja:

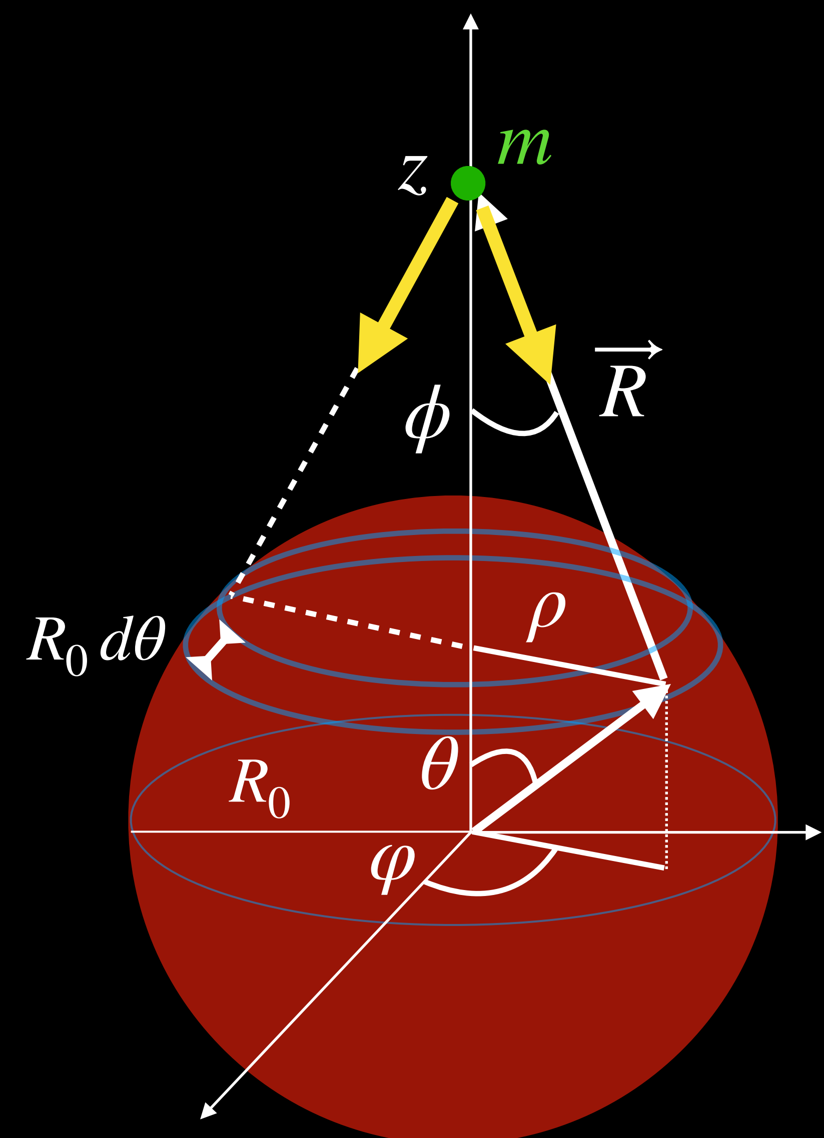
$$R^2 = R_0^2 + z^2 - 2\, R_0\, z\, \cos\theta$$

- Tomando a derivada com relação a θ temos:

$$2R \frac{dR}{d\theta} = -\,2\, R_0\, z\, (-\text{sen}\, \theta\,)$$

- Finalmente, podemos expressar $\cos\phi$ pela lei dos cossenos:

$$R_0^2 = R^2 + z^2 - 2\, R\, z\, \cos\phi \quad , \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{R^2 + z^2 - R_0^2}{2\, R\, z}$$



Teorema das cascas esféricas

- Substituindo as expressões obtidas, e usando que $\sigma = M/(4\pi R_0^2)$, temos:

$$\vec{F} = -\,G\,m\,M\,\hat{z}\int \frac{z^2+R^2-R_0^2}{4\,R_0\,z^2\,R^2}\frac{dR}{d\theta}d\theta$$

$$= -\,G\,m\,M\,\hat{z}\int_{z-R_0}^{z+R_0} \frac{z^2+R^2-R_0^2}{4\,R_0\,z^2\,R^2}dR$$

- Há muitos modos equivalentes de chegar em algo que é basicamente a mesma coisa. E agora ficou bem mais fácil:

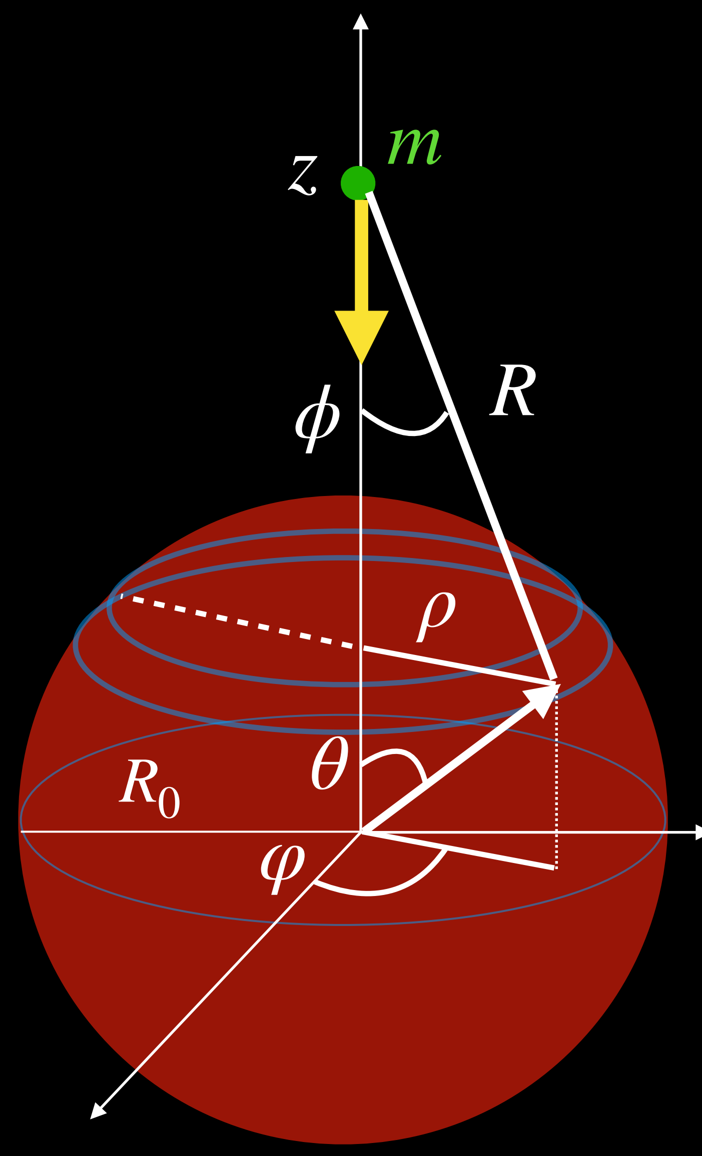
$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,M}{4\,R_0\,z^2}\,\hat{z}\int_{z-R_0}^{z+R_0} \frac{z^2+R^2-R_0^2}{R^2}dR$$

$$= -\frac{G\,m\,M}{4\,R_0\,z^2}\,\hat{z}\left(\int_{z-R_0}^{z+R_0} \frac{z^2-R_0^2}{R^2}dR \;+\; \int_{z-R_0}^{z+R_0} 1\,dR\right)$$

$$= -\frac{G\,m\,M}{4\,R_0\,z^2}\,\hat{z}\left[-(z^2-R_0^2)\frac{1}{R}\Bigg|_{z-R_0}^{z+R_0} \;+\; R\,\Big|_{z-R_0}^{z+R_0}\right]$$

- O termo dentro das chaves dá ***exatamente*** $4\,R_0$, e portanto chegamos em:

$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,M}{z^2}\,\hat{z}$$



Teorema das cascas esféricas

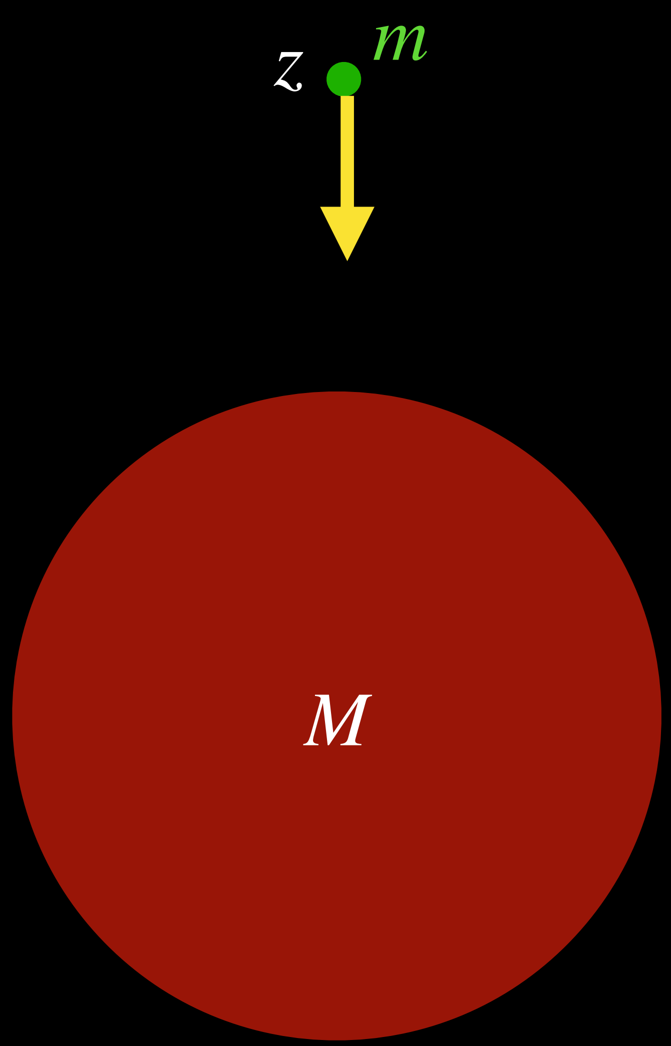
- Ou seja, a força causada por essa casca esférica de massa M é realmente idêntica à força que seria gerada por uma partícula pontual no centro da casca esférica!

$$\overrightarrow{F} = -\frac{G\,m\,M}{r^2}\,\hat{r}$$

- Um resultado que eu não demonstrei, mas que vocês podem mostrar facilmente, é que, se a massa m estiver ***dentro*** da casca esférica, a força se anula!

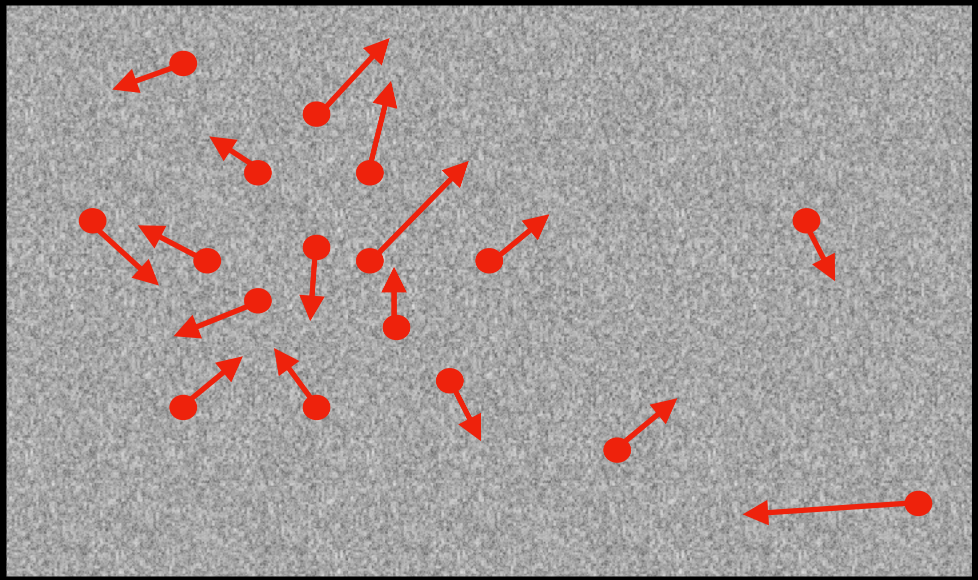
- A generalização para um corpo esfericamente simétrico qualquer é trivial: desde que a massa m esteja ***fora*** da distribuição de massa, a força gravitacional e o potencial são idênticos aos de uma massa pontual M no centro do objeto. Ou seja:

$$\overrightarrow{F}(r) = -\frac{G\,m}{r^2}\,\hat{r}\int_0^r \rho(r') \times dA = -\frac{G\,m}{r^2}\,\hat{r}\int_0^r \rho(r') \times 4\pi r'^2\,dr'$$



Teorema do Virial

- Esse é um dos resultados mais importantes da Física, com conexões com a Termodinâmica, a Mecânica Estatística, a Astrofísica, na Mecânica Quântica e até mesmo na Epidemiologia. Vamos tomar um sistema de ***muitas*** partículas interagindo entre si:



- O Teorema do Virial nos diz que, se a interação entre as partículas for descrita por uma ***força conservativa***, qualquer que seja o seu ***estado de movimento inicial***, com o tempo vai se estabelecer uma espécie de ***equilíbrio***, de tal forma que a energia cinética e a energia potencial vão guardar uma relação precisa:

$U_{Tot} + D\,K_{Tot} \;\to\; 0$, onde D é uma constante (tipicamente, $D \simeq 2$)

Teorema do Virial

Teorema do Virial

- Vamos começar definindo uma quantidade relacionada à energia, dada por:

$$G = \sum_i \overrightarrow{p}_i \cdot \vec{r}_i \quad , \quad \text{onde } \overrightarrow{p}_i \text{ é o momento de cada partícula.}$$

- Vamos analisar a variação dessa grandeza G com o tempo:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\overrightarrow{p}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i + \overrightarrow{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$$

$$= \sum_i \left(\overrightarrow{F}_i \cdot \vec{r}_i + m_i v_i^2 \right)$$

$$= \sum_i \overrightarrow{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2\, K_{Tot}$$

Teorema do Virial

- O Teorema do Virial nos diz que essa quantidade, G, tende a uma ***constante***, ou seja, deixa de variar, $dG/dt \to 0$. Quanto isso acontece, temos que:

$$0 = \sum_i \overrightarrow{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2\, K_{Tot}$$

- Agora, note que a força em cada partícula, $\overrightarrow{F}_i$, é dada pela soma das forças de todas as outras partículas ($j \neq i$), ou seja:

$$\overrightarrow{F}_i = \sum_{j \neq i} \overrightarrow{F}_{j \to i}$$

- Mas se as forças são conservativas, então $\overrightarrow{F}_{j \to i} = -\overrightarrow{\nabla}_i U_{ij}$, onde $\overrightarrow{\nabla}_i$ é o gradiente com relação a $\vec{r}_i$.
- Vamos supor aqui que a interação é de tal natureza que:

$U_{ij}(r_{ij}) = \alpha_{ij}\, r_{ij}^{-n}$, onde α_{ij} são constantes que dependem do par i, j , e $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

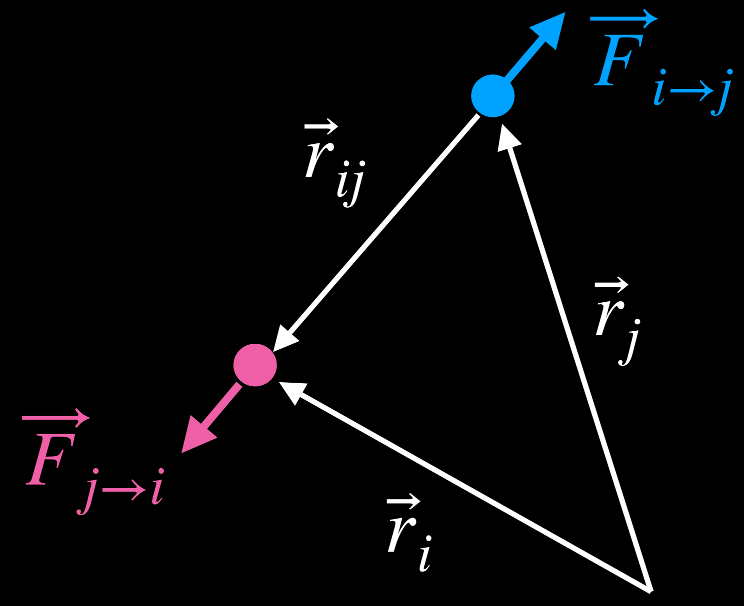
Claramente, no caso da gravidade temos $n = 1$ e $\alpha_{ij} = -G\, m_i m_j$.

Teorema do Virial

- Usando essa interação "hipotética", temos que:

$$\vec{F}_{j\to i} = -\,\alpha_{ij}\,\vec{\nabla}_i\left(\frac{1}{r_{ij}^n}\right)$$

$$= -\,\alpha_{ij}\left(-n\,\frac{1}{r_{ij}^{n+2}}\,\vec{r}_{ij}\right)$$



$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

- Portanto, temos assim que:

$$0 = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2\,K_{Tot}$$

$$= \sum_i \sum_{j\neq i}\left(\alpha_{ij}\,\frac{n}{r_{ij}^{n+2}}\,\vec{r}_{ij}\right)\cdot\vec{r}_i + 2\,K_{Tot}$$

$$\vec{F}_{j\to i} = -\,\vec{F}_{i\to j}$$

$$= \sum_i \sum_{j<i}\left(\alpha_{ij}\,\frac{n}{r_{ij}^{n+2}}\,\vec{r}_{ij}\right)\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + 2\,K_{Tot}$$

- Assim, obtemos finalmente que:

$$0 = \sum_i \sum_{j<i}\left(\alpha_{ij}\,\frac{n}{r_{ij}^{n}}\right) + 2\,K_{Tot} \;=\; n\,U_{Tot} + 2\,K_{Tot}$$

Teorema do Virial

- Para a força gravitacional, assim como para a força eletrostática, por exemplo, temos $n = 1$, e assim:

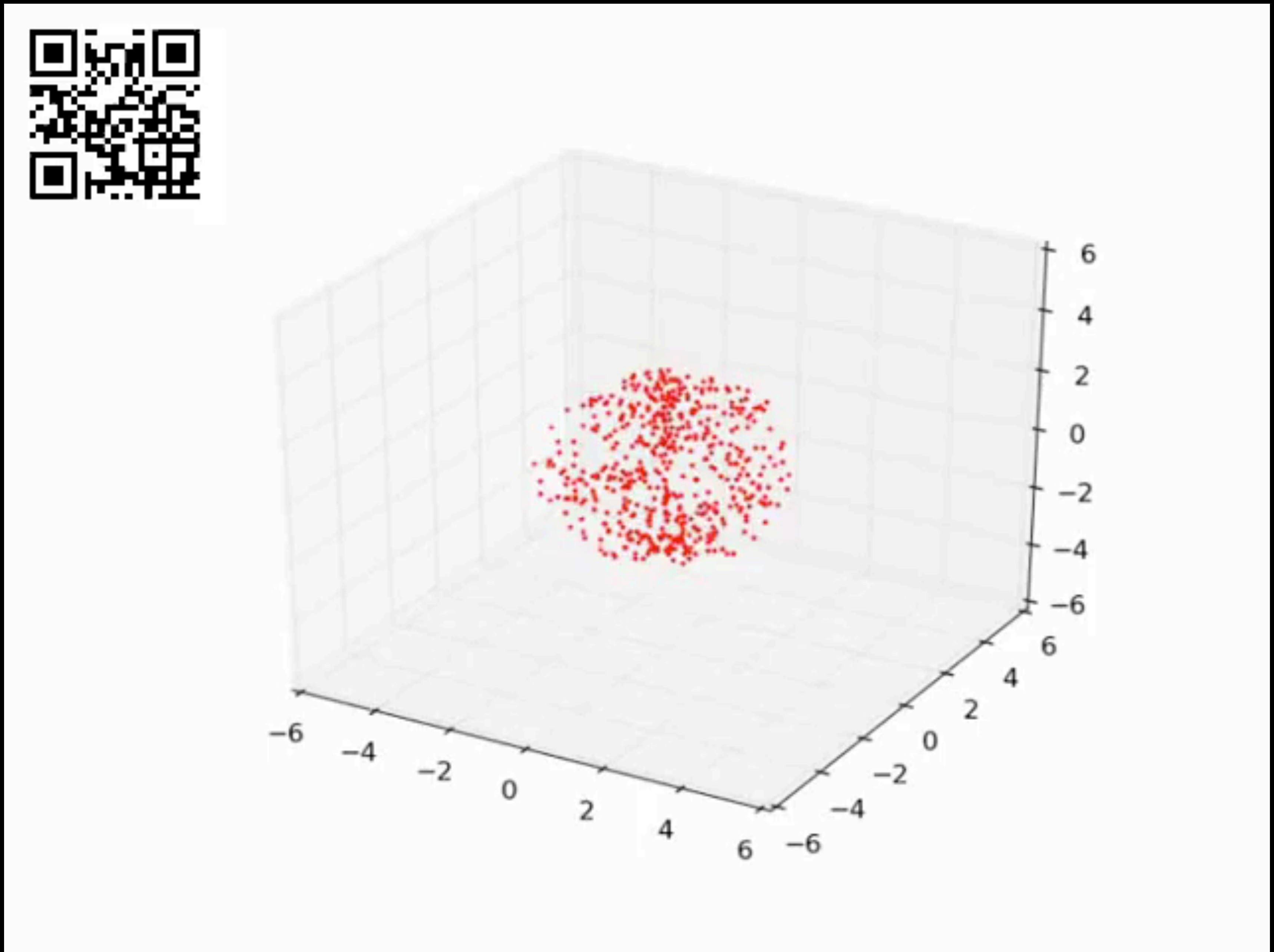
$$0 = U_{Tot} + 2\,K_{Tot}$$

- Ou seja, num sistema "virializado", temos que:

$$U_{Tot} = -\,2\,K_{Tot}$$

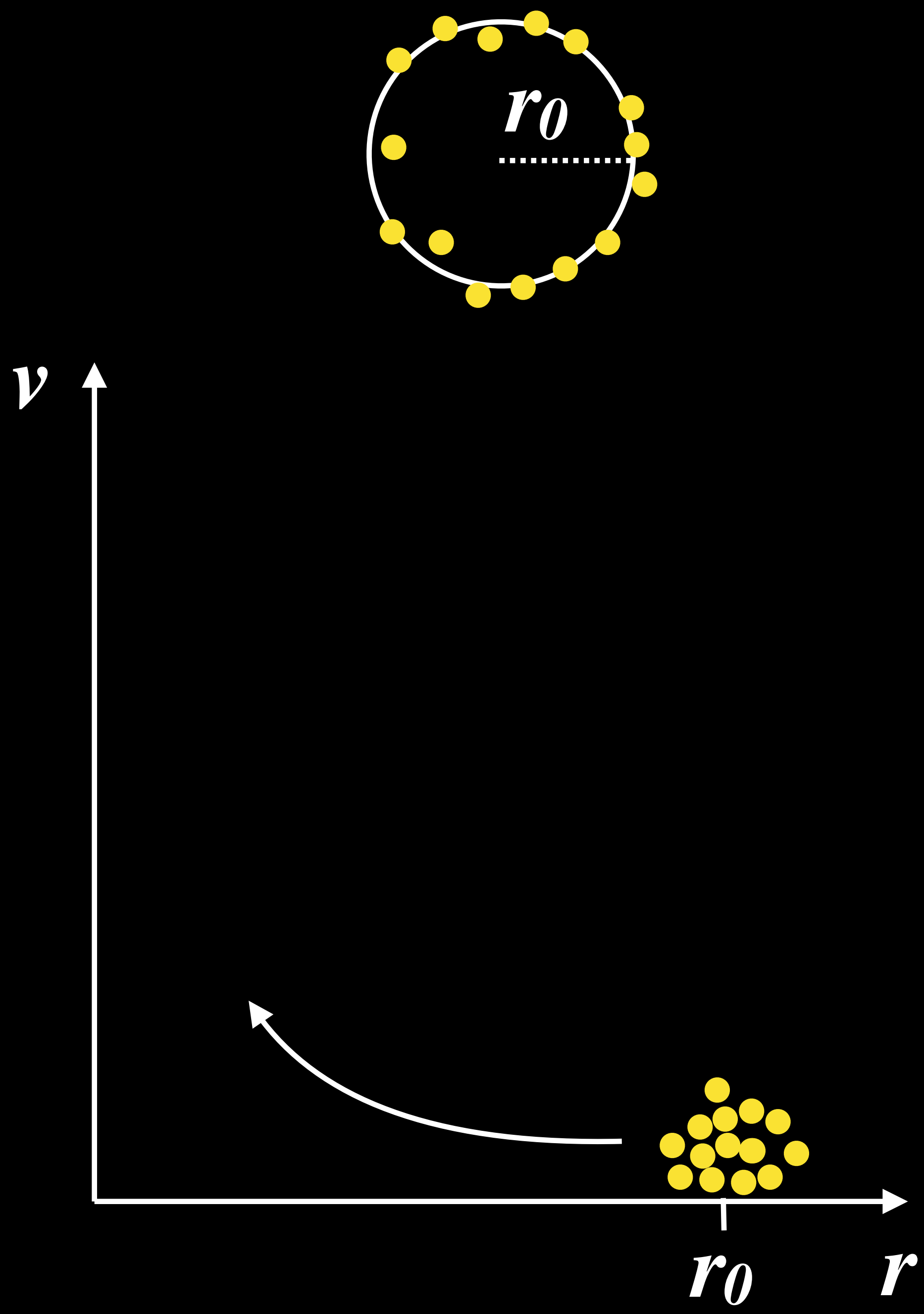
Teorema do Virial

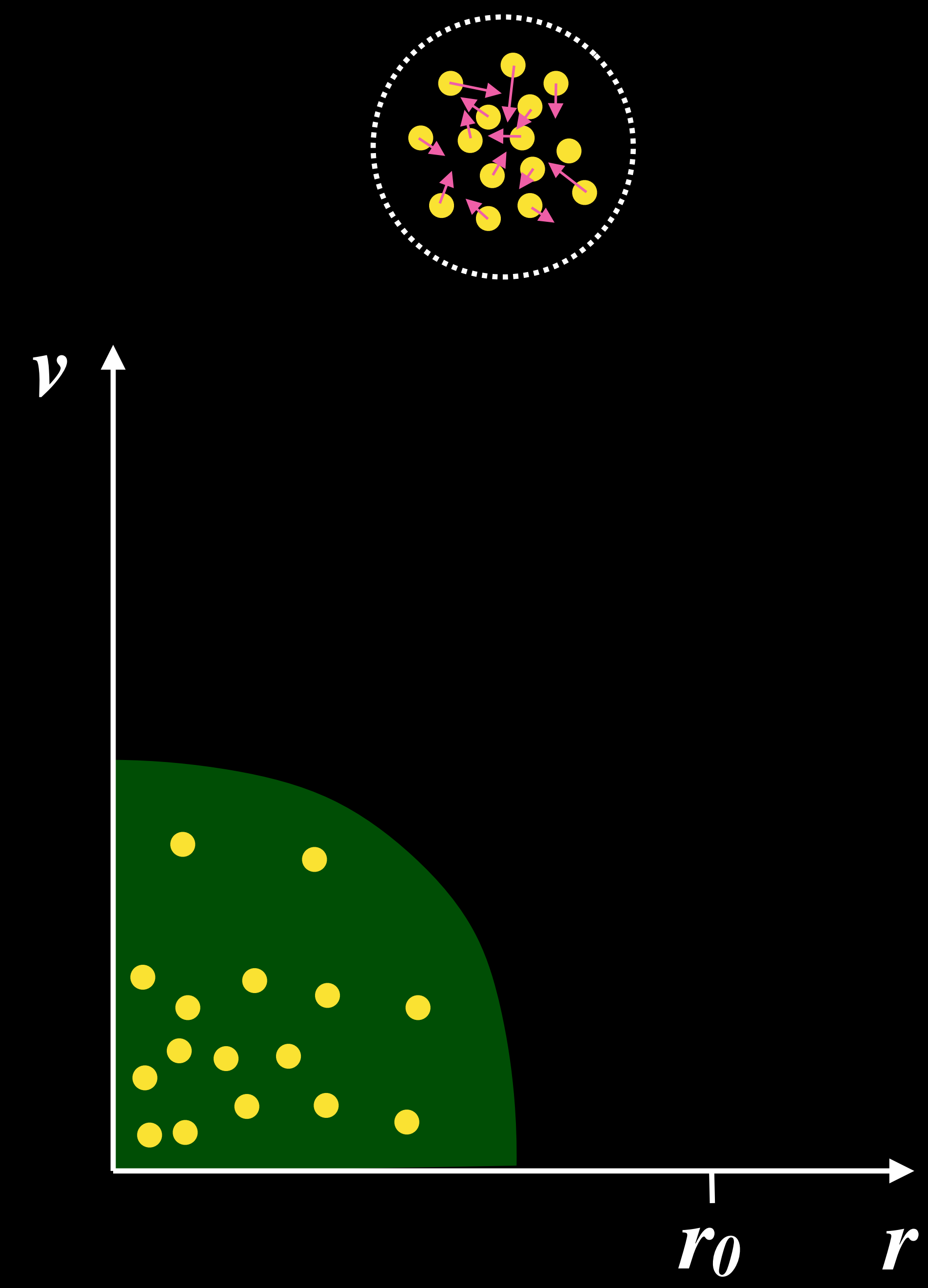
Teorema do Virial



Virialização de um sistema de 500 partículas

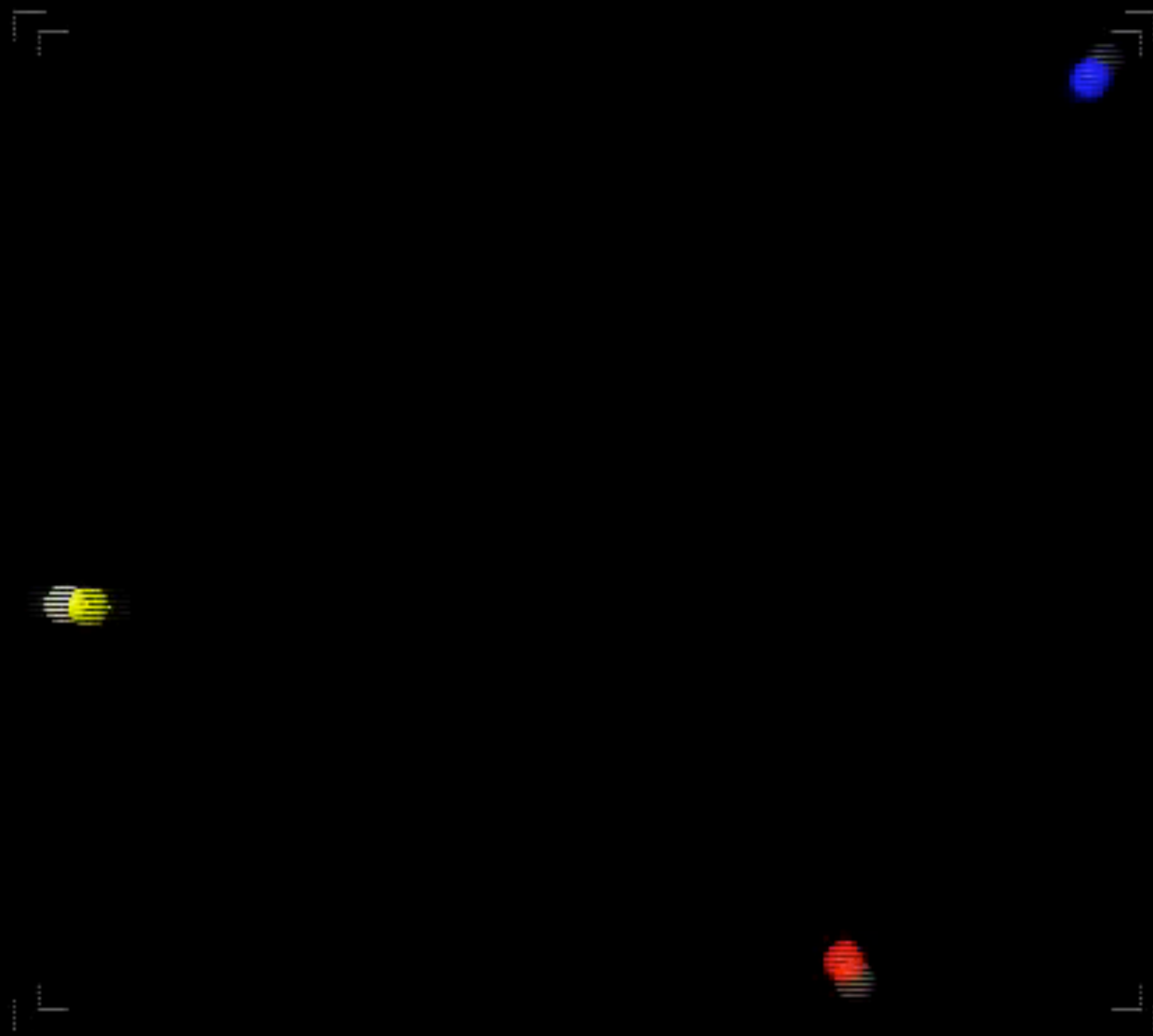
Teorema do Virial





Virialização no *espaço de fase*

Teorema do Virial



Virialização com 3 corpos??

Média no *tempo* - Teorema Ergódico