

O princípio de Arquimedes pode ser deduzido das equações de Navier-Stokes para um fluido:

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] = \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho_f \mathbf{g}$$

Sendo: ρ_f a densidade do fluido, \mathbf{v} a velocidade, p a pressão estática, μ a viscosidade e \mathbf{g} a aceleração da gravidade. Da condição de que o fluido está em repouso resulta:

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \rho_f \mathbf{g}$$

A partir dessa relação, podemos reescrever facilmente as forças que atuam em um corpo submerso em termos do peso do fluido deslocado pelo corpo. Quando um sólido K é imerso em um fluido, em cada ponto de sua superfície, uma força (\vec{f}) por unidade de área aparece perpendicular à superfície naquele ponto e proporcional à pressão do fluido (p) nesse ponto:

$$\vec{f} = p \vec{n}$$

Sendo \vec{n} o vetor normal à superfície do corpo em cada ponto.

Para determinar a força resultante devemos integrar por toda a área do corpo. Assim cada uma das componentes da força pode ser expressa individualmente, e ao aplicar o teorema da divergência de Stokes obtemos:

$$\begin{cases} F_x = \int_{S_K} f_x dS = \int_{S_K} -pn_x dS \\ F_y = \int_{S_K} f_y dS = \int_{S_K} -pn_y dS \\ F_z = \int_{S_K} f_z dS = \int_{S_K} -pn_z dS \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \int_{V_K} \frac{\partial(-pn_x)}{\partial x} dV \\ F_y = \int_{V_K} \frac{\partial(-pn_y)}{\partial y} dV \\ F_z = \int_{V_K} \frac{\partial(-pn_z)}{\partial z} dV \end{cases}$$

Onde a força resultante será:

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \int_{\partial V_K} -p\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_K} -\nabla p dV = \int_{V_K} -\rho_f \mathbf{g} dV = -\rho_f \mathbf{g} V_K$$

Distribuição da pressão e das forças sob um cubo sólido imerso num líquido incompressível em repouso.

