Questão 1. Sejam $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (2, -11, 7)$. Vamos encontrar $x$ e $y$ tais que $C = xA + yB$. Temos que

$$\begin{aligned}(2, -11, 7) &= x(2, -1, 1) + y(1, 2, -1)\\ &= (2x + y, -x + 2y, x - y),\end{aligned}$$

de modo que obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -x + 2y = -11 \\ x - y = 7 \end{cases} \tag{1}$$

Somando as 1ª e 3ª equações do sistema (1) obtemos

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

Substituindo $x = 3$ na 2ª equação do sistema (1) temos que

$$-3 + 2y = -11 \Rightarrow 2y = -8 \Rightarrow y = -4.$$

Portanto, para que $C = xA + yB$ devemos ter que $x = 3$ e $y = -4$.

Questão 2. Vamos mostrar que

$$(a, b) \text{ e } (c, d) \text{ são L.I } \Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$$

**Definição 1.** Dizemos que $(a, b)$ e $(c, d)$ são linearmente independentes (L.I) se, e somente se, a equação

$$\lambda_1(a, b) + \lambda_2(c, d) = (0, 0),$$

admite somente a solução trivial, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Em particular, segue da Definição 1 que

$$(a, b) \neq (0, 0) \text{ e } (c, d) \neq (0, 0),$$

isso significa que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $c \neq 0$ ou $d \neq 0$. Pois o vetor nulo não é linearmente independente com nenhum outro vetor.

*Solução.* Devemos mostrar que as duas direções da relação de equivalência do enunciado são verdadeiras. Primeiro vamos mostrar a ida ($\Rightarrow$).

Suponha que $(a, b)$ e $(c, d)$ são L.I então vamos mostrar que $ad - bc \neq 0$.

Pela Definição 1, supor que $(a, b)$ e $(c, d)$ são L.I é equivalente a afirmar que a equação

$$\lambda_1(a, b) + \lambda_2(c, d) = (0, 0),$$

admite somente a solução trivial. De onde segue que o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 c = 0 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \end{cases} \tag{2}$$

admite apenas a solução trivial, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Pela observação logo após a Definição 1, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \neq 0$ e $c \neq 0$ (pois caso não forem, o mesmo valeria para $b$ e $d$). Sendo assim, escrevendo $\lambda_1$ em função de $\lambda_2$ na 1ª equação do sistema (2) temos

$$\lambda_1 = -\frac{c}{a}\lambda_2$$

e substituindo na 2ª equação do sistema (2) temos

$$\begin{aligned} b\left(-\frac{c}{a}\lambda_2\right) + \lambda_2 d &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \lambda_2\left(-\frac{bc}{a} + d\right) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \lambda_2\left(\frac{-bc + ad}{a}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Se $ad - bc = 0$ então $\lambda_2$ pode assumir qualquer valor real. Mas por hipótese, nós temos que $\lambda_2 = 0$ então, por contraposição, nós temos que $ad - bc \neq 0$.
Agora vamos mostrar a volta ($\Leftarrow$). Suponha que $ad - bc \neq 0$. Vamos mostrar que $(a, b)$ e $(c, d)$ são L.I.
Da equação $\lambda_1(a, b) + \lambda_2(c, d) = (0, 0)$, nós temos o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 c = 0 \\ \lambda_1 b + \lambda_2 d = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Como $ad - bc \neq 0$ então $ad \neq 0$ ou $bc \neq 0$. Assim, $a \neq 0$ e $d \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Sem perda de generalidade nós vamos supor que $a \neq 0$ e $d \neq 0$, pois caso contrário o mesmo valeria para $b$ e $c$.
Daí, escrevendo $\lambda_1$ em função de $\lambda_2$ na 1ª equação do sistema (4) nós temos

$$\lambda_1 = -\frac{c}{a}\lambda_2,$$

substituindo $\lambda_1$ na 2ª equação do sistema (4) nós temos

$$\begin{aligned} b\left(-\frac{c}{a}\lambda_2\right)+\lambda_2 d &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \lambda_2\left(\frac{-bc+ad}{a}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Como $ad-bc\neq 0$ então devemos ter que $\lambda_2=0$.
Escrevendo $\lambda_2$ em função de $\lambda_1$ na 2ª equação do sistema (4) nós temos que

$$\lambda_2=-\frac{b}{d}\lambda_1$$

e substituindo $\lambda_2$ na 1ª equação do sistema (4) nós temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 a+c\left(-\frac{b}{d}\lambda_1\right) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \lambda_1\left(\frac{ad-bc}{d}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Como $ad-bc\neq 0$ então devemos ter que $\lambda_1=0$.
Logo, $\lambda_1=\lambda_2=0$ □

Questão 3. Dados um ponto $P_0=(x_0,y_0)$ e um vetor não-nulo $\vec{v}=(a,b)$, só existe uma reta $r$ que passa por $P_0$ e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto $P=(x,y)$ pertence a $r$ se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é

$$\overrightarrow{P_0P}=t\vec{v}\Leftrightarrow P-P_0=t\vec{v}\Leftrightarrow P=P_0+t\vec{v},$$

para algum $t\in\mathbb{R}$. Assim, em coordenadas temos que

$$\boxed{r:(x,y)=(x_0,y_0)+t(a,b)} \tag{7}$$

A equação acima é dita *equação vetorial* da reta $r$, $\vec{v}$ é dito *vetor diretor* da reta $r$ e $t$ é o parâmetro. Note que para cada número real $t$ corresponde um ponto $P\in r$. A recíproca também é verdadeira, isto é, para cada $P\in r$ corresponde um número real $t$.
Podemos reescrever a equação (7) como o seguinte sistema linear:

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}} \tag{8}$$

As equações em (8) são ditas equações paramétricas da reta $r$.
*Solução:* Sejam $r:(0,3)+t(3,2),\ s:t(a,b)$ e $u:t(3,b)$ retas em $\mathbb{R}^2$.

a) Vamos encontrar o vetor $(a,b)$ para que as retas $r$ e $s$ se intersectem em $t=3$ e vamos determinar o ponto de interseção.

   Substituindo $t=3$ em $r$ nós temos $(0,3)+3(3,2)=(0+9,3+6)=(9,9)$. Então como $(9,9)$ é o ponto de interseção em $r$ quando $t=3$, concluímos que o ponto $(9,9)$ deve pertencer a reta $s$ exatamente quando $t = 3$, assim

$$(9,9) = 3(a,b) \Rightarrow (9,9) = (3a,3b) \Rightarrow \begin{cases} 9 = 3a \\ 9 = 3b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 3 \text{ e } b = 3}.$$

Assim, para que $r$ e $s$ se intersectem quando $t = 3$ devemos ter $(a,b) = (3,3)$ e o ponto de interseção é $(9,9)$.

b) Vamos determinar o valor de $c$ para que $r$ não intersecte $u$. Sabemos que duas retas não se intersectam se, e somente se, seus vetores diretores são paralelos. Temos que $(3,2)$ e $(3,b)$ são os vetores diretores de $r$ e de $u$, respectivamente. Assim, para que $r \cap u = \emptyset$ devemos ter que $(3,2)//(3,b)$ o que significa dizer que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(3,2) = k(3,b) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3k \\ 2 = bk \end{cases} \Rightarrow k = 1 \text{ e } \boxed{b = 2}.$$

Questão 4. Determinarmos a equação geral da reta a partir de sua inclinação (vetor diretor) e um de seus pontos. Similarmente, podemos determinar um plano no espaço tridimensional a partir da sua inclinação (**vetor normal**) e de um de seus pontos. O vetor normal é um vetor perpendicular ao plano.
Suponha que queremos determinar a equação do plano $\pi$ que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que tenha vetor normal $\vec{n} = (a,b,c)$. Para tanto, seja $P = (x,y,z) \in \pi$, então o vetor $\overrightarrow{P_0P} \in \pi$ e, portanto, como $\vec{n}$ é perpendicular ao plano $\pi$, temos que

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Resolvendo o produto escalar acima obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (a,b,c) \cdot (x - x_0, y - y_o, z - z_o) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\ &= ax + by + cz + (ax_0 + by_0 + cz_0), \end{aligned}$$

Como $a, b, c, x_0, y_0,$ e $z_0$ são números reais dados, nós temos que $ax_0 + by_0 + cz_0 = d \in \mathbb{R}$. Assim o plano $\pi$ fica bem determinado pela equação

$$\pi : ax + by + cz + d = 0$$

que é dita equação geral do plano $\pi$. Note que os coeficientes $a, b, c$ são as coordenadas do vetor normal $\vec{n} = (a,b,c)$.
*Solução:* Sejam os planos $\pi_1 : 2x + 3y - z = 3$ e $\pi_2 : -x - 2y + z = 2$ vamos determinar a equação vetorial da reta $r$ que é interseção de $\pi_1$ e $\pi_2$.
Sejam $n_1 = (2,3,-1)$ e $n_2 = (-1,-2,1)$ os vetores normais à $\pi_1$ e $\pi_2$, respectivamente.

Primeiro note que não existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $n_1 = kn_2$, de fato se existisse tal $k \in \mathbb{R}$ então deveríamos ter:

$$(2,3,-1) = k(-1,-2,1) \Rightarrow (2,3,-1) = (-k,-2k,k) \Rightarrow \begin{cases} 2 = -k \\ 3 = -2k \\ -1 = k \end{cases}$$

o que é um absurdo.
Logo $\pi_1$ e $\pi_2$ não são paralelos e, portanto, $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Sabemos que a interseção de dois planos não paralelos é uma reta $r$. Sendo assim, vamos determinar $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
Para isso, basta encontrarmos a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos $x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y$. Substituindo $x$ na segunda equação obtemos:

$$-(5-y) - 2y + z = 2 \Rightarrow -5 - y + z = 2 \Rightarrow z = 7 + y.$$

Assim, fazendo $y = t \in \mathbb{R}$ nós temos:

$$\begin{cases} x = 5 - t \\ y = t \\ z = 7 + t \end{cases}$$

e, portanto, $r : (x,y,z) = (5,0,7) + t(-1,1,1))$.
Para a outra parte do exercício, temos que $\pi_1$ é dado pela equação geral $2x + 3y - z = 3$. Para determinar o ponto $A$ vamos tomar $x = 1$ e $y = 0$, para o vetor $B$ tomaremos $x = 0$ e $y = 1$ e, por fim, para o vetor $C$ vamos tomar $x = y = 0$:

$$\begin{cases} A : x = 1 \text{ e } y = 0 \Rightarrow 2.1 + 3.0 - z = 3 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow (x,y,z) = (1,0,-1) \\ B : x = 0 \text{ e } y = 1 \Rightarrow 2.0 + 3.1 - z = 3 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,1,0) \\ C : x = y = 0 \Rightarrow 2.0 + 3.0 - z = 3 \Rightarrow z = -3 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,-3), \end{cases}$$

assim $A = (1,0,-1)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,-3)$.
Note que

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (1,0,-1) - (0,0,-3) = (1,0,2) \text{ e}$$
$$\overrightarrow{CB} = B - C = (0,1,0) - (0,0,-3) = (0,1,3)$$

são L.I, de fato temos que a equação (e, respectivamente, o sistema)

$$\lambda_1(1,0,2)+\lambda_2(0,1,3)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

admite somente a solução trivial. $\square$

QUESTÃO 5. Vamos determinar a equação geral do plano $\pi$ que passa pelo ponto $(0,0,1)$ e é ortogonal à reta $r:(1,0,0)+s(-2,1,1)$.
Para isso, precisamos notar que uma reta é ortogonal a um plano se o vetor diretor da reta é perpendicular ao plano, isso significa que o vetor diretor da reta é paralelo ao vetor normal do plano.
Assim, como $\vec{v}=(-2,1,1)$ é o vetor diretor de $r$ temos que o vetor $\vec{n}=\vec{v}$ é um vetor normal à $\pi$. Como a equação geral de $\pi$ é dada por $ax+by+cz+d=0$, onde $a,b$ e$c$ são as coordenadas do vetor normal à $\pi$ temos que $\pi:-2x+y+z+d=0$. Resta determinarmos $d$. Para isso vamos substituir o ponto $P=(0,0,1)$ na equação:

$$-2.0+0+1+d=0 \Rightarrow d=-1,$$

portanto,

$$\pi:-2x+y+z-1=0$$

é uma equação para o plano $\pi$. $\square$