Capítulo 3

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e dimensões maiores

Neste curso iremos usar $n = 2$ ou 3, mas isto pode ser feito para qualquer n inteiro positivo.

Como $\mathbb{R}$ é um objeto matemático com propriedades, o $\mathbb{R}^n$ é um outro objeto matemático definido a partir de $\mathbb{R}$ e suas propriedades básicas são provadas a partir de propriedades de $\mathbb{R}$. Podemos estudar $\mathbb{R}^n$ para qualquer n inteiro positivo, como objeto matemático a partir de suas propriedades, sem ter que considerar que deve existir um objeto real que o represente.

3.1 Os elementos de $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Pares ordenados e triplas ordenadas

Primeiro vamos relembrar pares ordenados. Um par ordenado (a, b) tem duas coordenadas, a primeira a e a segunda b de forma que $(a, b) = (a', b')$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$. Ou seja dois pares são iguais se suas coordenadas são todas iguais. Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são pares ordenados em que as coordenadas são números reais. Uma tripla ordenada (a, b, c) tem três coordenadas, a primeira a, a segunda b e a terceira c, de forma que $(a, b, c) = (a', b', c')$ se e somente se $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. As triplas com todas as coordenadas reais são os elementos de $\mathbb{R}^3$.

3.1.2 n-uplas

Uma n-upla tem n-coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ e a_i é a i-ésima coordenada da n-upla, onde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Duas n-uplas são iguais se e somente se as suas coordenadas são todas iguais. O $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as n-uplas com coordenadas reais.

3.2 Operações sobre $\mathbb{R}^n$

Pontos e vetores no espaço euclidiano E^n são descritos por R^n. Um sistema de coordenadas em E^n é uma bijeção entre E^n e R^n. Uma bijeção entre V^n (vetores de E^n) e R^n é obtida por meio de uma base de vetores. Este assunto vai ser abordado no próximo capítulo.

Em $\mathbb{R}^n$, pontos e vetores são descritos como n-uplas. Porém ao fazermos cálculos com algum significado geométrico, fazemos a distinção. A soma vale para somar ponto e vetor ou dois vetores, mas não para somar dois pontos. Multiplicação por escalar se refere a multiplicar um real por um vetor, o oposto se refere a um vetor, e tanto produto escalar quanto produto vetorial se referem a usar dois vetores. A norma se refere a um vetor e a distância é uma relação entre dois pontos.

3.2.1 Soma, elemento neutro, oposto e multiplicação por escalar

As soma de dois elementos de $\mathbb{R}^n$ é feito coordenada a coordenada. Assim $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots b_n) = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n)$. O elemento neutro é a n-upla em que todas as coordenadas são 0 e é denotada por $(0, \ldots, 0)$ (a n-upla de zeros). *Não se soma elementos de dimensões distintas.*

A multiplicação de um elemento de uma n-upla $(a_1, \ldots a_n)$ por um escalar (no caso um número real) α é dada por $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$.

Dado $A = (a_1, \ldots a_n)$, denotemos por $-A = (-a_1, \ldots - a_n)$.

Usando as propriedades coordenada a coordenada podemos provar as seguintes propriedade básicas para um n fixado:

a) $A + B = B + A$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^n$.
b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ para todo $A, B, C \in \mathbb{R}^n$.
c) $A + (0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0) + A = A$ para todo $A \in \mathbb{R}^n$.
d) $A + (-A) = (-A) + A = (0, \ldots, 0)$, para todo $A \in \mathbb{R}^n$.
e) $(-A) = (-1)A$ para todo $A \in \mathbb{R}^n$.
f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^n$.
g) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Norma, distância e produto escalar

Definimos a norma de $A = (a_1, \ldots a_n)$ é dada por $\sqrt{(a_1)^2 + \ldots (a_n)^2}$. Ela é exatamente a distância entre A e $\vec{0}$.

Fixe $A = (a_1, \ldots a_n)$ e $B = (b_1, \ldots b_n)$.

A distância entre A e B é definida por $d(A, B) = ||(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)||$. O produto escalar entre A e B é $A.B = a_1 b_1 + \ldots a_n b_n$.

Temos então as seguintes propriedades:

h) $||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^n$.
i) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ para todo $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular).
A igualdade vale se e somente se C é um ponto do segmento de extremidades A e B
j) $||A||^2 = A.A$, para todo $A \in \mathbb{R}^n$.
k) $|A.B| \leq ||A|| ||B||$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^n$.
l) $A.B = B.A$ para todo $A, B \in \mathbb{R}^n$.
Note que como $A.B$ é um número real, logo, $A.B.C$ não faz sentido, por isso não existe associatividade para esta operação.
m) $(A + B).C = A.B + A.C$ e $A.(B + C) = A.B + A.C$ para cada $A, B, C \in \mathbb{R}^n$.
n) $(\alpha A).(\beta B) = (\alpha\beta)(A.B)$ para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{R}^n$.

3.2.3 Produto vetorial (apenas para $\mathbb{R}^3$)

Dado $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, denotamos por $A \wedge B$ o produto vetorial de A e B. O produto vetorial $A \wedge B$ é novamente um elemento de $\mathbb{R}^3$. Ela pode ser calculada como

$$A \wedge B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

As propriedades básicas são:

o) $A \wedge B = -(B \wedge A)$.
p) $(A + B) \wedge C = (A \wedge B) + (A \wedge C)$ e $A \wedge (B + C) = (A \wedge B) + (A \wedge C)$.
q) $\alpha A \wedge \beta B = (\alpha\beta)(A \wedge B)$.

Obs. $(A \wedge B) \wedge C$ pode ser diferente de $A \wedge (B \wedge C)$. Tome por exemplo $(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = -\vec{i}$ e $\vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \vec{0}$.

Essas propriedades tem uma motivação geométrica que será discutida no próximo capítulo.

No caso abaixo, as propriedades não são tão imediatas justamente por que temos que usar as propriedades geométricas. Aqui, basta usar as propriedades dos reais coordenada a coordenada e as propriedades dos determinantes.

Uma forma de lembrar o produto vetorial é usando a notação de determinante:

$$A \wedge B = det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{k}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Capítulo 4

Espaço Euclidiano e espaços vetoriais arbitrários

O espaço Euclidiano é a representação do que a gente 'vê', um espaço com três dimensões. Seria como trabalhar com a reta real desenhada mas com mais dimensões. Eu vou comentar aqui sobre os vetores dessa forma, mas depois faremos tudo apenas em $\mathbb{R}^3$ que já foi definido na seção anterior. A intenção aqui é dar algum significado para as operações definidas para o $\mathbb{R}^n$ e em particular o $\mathbb{R}^3$.

Lembrando que existem pontos e vetores quando tratamos do espaço Euclidiano, mas ambos são escritos do mesmo jeito quando pensamos neles como objetos de $\mathbb{R}^3$ e por isso quando necessário, escrevemos por exemplo A, B para pontos e $\vec{u}, \vec{v}$ para vetores.

4.1 Preparando para dizer o que é um vetor no espaço Euclidiano

4.1.1 Distância e ângulo

Ao trabalhar com o espaço Euclidiano, assumimos que existe uma distância. Novamente como na reta real desenhada, fixa-se uma escala usando dois pontos. A partir dessa escala, temos a noção de comparação de distâncias. Além disso temos a noção de paralelismo e perpendicularismo e ângulo. Os ângulos são comparados pelo 'tamanho' da abertura.

Usando que uma volta completa tem 360° graus, os outros ângulos são proporcionais a eles. Para trabalhar com o Cálculo vamos utilizar radianos que corresponde a medir a distância percorrida num círculo de raio 1. Então uma volta completa corresponde a 2π radianos, 90° corresponde a $\frac{\pi}{2}$ radianos e 0° corresponde a 0 radianos. No caso a medição tem orientação, andar em anti-horário é a orientação positiva, então se andar por exemplo 270^0 no sentido anti-horário temos $\frac{3}{2}\pi$ e andando 90° no sentido horário temos $-\frac{\pi}{2}$, apesar de 'pararmos no mesmo lugar'.

4.1.2 Representante de vetor

Um vetor não é um objeto que se desenha, você desenha um segmento orientado que sai de um ponto A até um ponto B que representa o vetor (geralmente desenhamos uma flechinha). Dois segmentos orientados representam o mesmo vetor se dá pra 'mover' um segmento orientado exatamente em cima do outro mantendo o 'segmento sendo movido' sempre paralelos. Esta seria a forma de ver um vetor de forma geométrica.

4.1.3 Soma de vetores

A ideia do vetor é que ele representa um deslocamento. Por exemplo, a soma de um ponto por um vetor é $A + \overrightarrow{AB} = B$. Agora se formos somar $A + \overrightarrow{CD}$, primeiro temos que achar o ponto B tal que os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo vetor. Então $A + \overrightarrow{CD} = A + \overrightarrow{AB} = B$.

No caso por exemplo, o vetor nulo, representado por $\vec{0}$ seria não sair do lugar. Ou seja $A + \vec{0} = A$. No caso, o representante do vetor nulo com ponto inicia A é o segmento AA.

A soma de dois vetores é 'juntar' dois deslocamentos. Para calcular $\vec{u}+\vec{v}$, tomamos primeiro um segmento AB que representa $\vec{u}$ e tomamos então o reprentante de $\vec{v}$ que sai de B. Assim tomamos um segmento orientado BC que representa $\vec{v}$. Então AC é um representante da soma $\vec{u} + \vec{v}$.

Note que a soma $\vec{v} + \vec{u}$ segue um outro caminho para encontrar um representante. Para mostrar que esta soma é comutativa, veremos que aparece um paralelogramo.

4.1.4 As propriedades que caracterizam um vetor

Queremos poder falar de todos os vetores obtidos a partir de dois pontos arbitrários do espaço Euclidiano. Dai como em $\mathbb{R}$ queremos dar um tratamento algébrico para tirar conclusões.

Para fazer isto, vamos usar propriedades que caracterizam quando dois vetores são iguais ou não. Primeiro podemos identificar se um vetor é nulo ou não. Existe um único vetor nulo. A seguir queremos identificar quando dois vetores não nulo são iguais.

Para isso sempre identificamos um vetor não nulo pelo seu tamanho (norma), sentido e direção.

- A norma de um vetor $\vec{u}$ é a distância entre A e B onde o segmento orientado AB é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$. A norma do vetor nulo é 0 e qualquer vetor não-nulo tem norma positiva. A norma de $\vec{u}$ é representada por $||\vec{u}||$.

- Dados dois vetores não-nulos, dizemos que eles tem a mesma direção se os representantes deles estão contidos em retas paralelas (incluindo serem a mesma reta).

- Dados dois vetores não nulos, dizemos que eles tem o mesmo sentido se tomando um representante com o mesmo ponto inicial A, os dois pontos finais estão na mesma semi reta com ponto inicial A. Assim, vetores não nulos tem o mesmo sentido se eles tem a mesma direção e ambas 'apontam' pro mesmo lado.

Dois vetores não nulos são iguais se e somente se possuem a mesma norma, a mesma direção e o mesmo sentido.

4.1.5 Múltiplos de um vetor

Se temos dois vetores com a mesma direção e sentido, podemos 'encurtar' ou 'esticar' um deles para que obter um a partir do outro. Se eles tem a mesma direção e sentido oposto podemos 'virar' um deles, e 'encurtar' ou 'esticar' para obter o outro. Essa é a ideia da multiplicação de um vetor por um escalar (o escalar no nosso caso é um número real).

Dado um vetor $\vec{u}$ e um escalar α denotamos por $\alpha\vec{u}$ como o múltiplo de $\vec{u}$ por α. Se $\vec{u}$ é o vetor nulo então $\alpha\vec{u}$ é o vetor nulo. Se $\vec{u}$ é um vetor não nulo então $0\vec{u}$ é o vetor nulo (caso em que $\alpha = 0$). Se $\alpha > 0$ então $\alpha\vec{u}$ é um vetor de norma $|\alpha||\vec{u}|| = \alpha||\vec{u}||$ que tem a mesma direção e mesmo sentido de $\vec{u}$. Se $\alpha < 0$ então $\alpha\vec{u}$ é um vetor de norma $|\alpha||\vec{u}|| = (-\alpha)||\vec{u}||$ que tem a mesma direção e sentido oposto de $\vec{u}$.

Note que $|\alpha|$ e $||\vec{u}||$ são números reais, então o produto deles é um número real.

Para medir o ângulo de dois vetores, nós tomamos um representante de cada vetor que comece no mesmo ponto e consideramos o menor ângulo formado pelas duas semirretas que as

contenha. Assim o ângulo θ entre dois vetores sempre satisfará $0 \leq \theta \leq 180$ se trabalharmos com graus (ou $0 \leq \theta \leq \pi$ se medirmos o ângulo em radianos).

Dizemos que dois vetores não nulos são ortogonais se o ângulo entre eles é de 90 graus.

4.2 Espaços vetoriais

Os espaços vetoriais tem uma operação de soma e uma operação de multiplicação de escalar por vetor que mantém propriedades relevantes que são satisfeitas para os vetores do Espaço Euclidiano. Em particular, o $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.

As definições a seguir valem para qualquer espaço vetorial.

4.2.1 Combinações lineares

Dizemos que o vetor nulo $\vec{0}$ está na direção de qualquer reta, plano, etc...

Quando um vetor é um múltiplo do outro, $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ com $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos que $\vec{u}$ dá a direção de uma reta e $\vec{v}$ têm a mesma direção dessa reta.

Quando consideramos que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não tem a mesma direção, então as direções delas indicam a direção de um plano e $\vec{w}$ estaria na direção do plano.

A combinação linear indica como um vetor pode ser escrito em função de outros.

Em geral, dados vetores $\vec{u_1}, \ldots \vec{u_k}$, dizemos que $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{u_1}, \ldots \vec{u_k}$ se existem $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha_1\vec{v_1} + \ldots \alpha_k\vec{v_k}$.

4.2.2 Conjuntos L. I. e L. D.

Dados um conjunto de vetores, podemos considerar as combinações lineares que podemos obter delas. Todas essas combinações são as direções geradas pelo conjunto.

Intuitivamente, pensamos que um conjunto com um vetor é L.I se ele gera a direção de uma reta, que um conjunto de dois vetores geram as direções de um plano. Ou seja o número de vetores tem que ser o mínimo possível em relação a dimensão gerada.

Formalmente, dizemos que um conjunto $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k}\}$ é L.I. (linearmente independente) se a única forma de gerar o vetor nulo é com uma combinação trivial, ou seja se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ são tais que $\alpha_1\vec{u_1} + \ldots \vec{u_k} = \vec{0}$ então $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Isto équivalente a dizer que se removermos qualquer um dos vetores, já não conseguimos gerar as mesmas direções. *Ou seja, um conjunto é L. I. se não existe nenhum vetor 'sobrando'.*

Um conjunto que não é L.I. se chama L.D. (linearmente dependente). Ou seja existe uma combinação linear não trivial para o vetor $\vec{0}$. Isso é equivalente a poder escrever algum dos vetores em função dos outro (este vetor que pode ser escrito em função dos outros poderia ser descartado e as direções geradas com ou sem ele continuam as mesmas).

Aqui é importante enfatizar que é a possibilidade de remover algum vetor para ser L.D. e não qualquer um. Por exemplo $\{(0,0,1),(0,0,2),(1,0,0)\}$ *é L. D. pois os vetores gerados por* $\{(0,0,1),(0,0,2),(1,0,0)\}$ *e* $\{(0,0,2),(1,0,0)\}$ *são os mesmos, então remover* $(0,0,1)$ *não fez falta. Porém* $\{(0,0,1),(0,0,2),(1,0,0)\}$ *e* $\{(0,0,1),(0,0,2)\}$ *não geram os mesmos vetores. Assim,* $(1,0,0)$ *faz falta.*

No caso específico dos do vetores gerados no espaço Euclidiano, qualquer conjunto de vetores com 4 ou mais vetores é L. D. e existe um conjunto L.I. com três vetores (basta pensar na quina de um cubo, por exemplo).

4.2.3 Equação vetorial da reta

Podemos agora descrever uma reta utilizando pontos e vetores.

Dado um ponto A e um vetor não nulo $\vec{u}$ dizemos que $X = A + \alpha\vec{u}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial de uma reta. O vetor $\vec{u}$ é chamado de um vetor diretor da reta (qualquer múltiplo não nulo é um vetor diretor da mesma reta).

A ideia é associar pontos da reta a um real α.

Por exemplo, dado uma reta que passa pelos pontos A e B com $A \neq B$, tome $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Vamos verificar que $X = A+\alpha\vec{u}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ corresponde a reta que passa por A e B. Claramente A e B pertencem a reta usando respectivamente $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. Se $P \neq A$ é um ponto da reta, então os segmentos AP e AB são paralelos, assim pela definição de múltiplo de vetor, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB}$. Assim, $P = A + \overrightarrow{AP} = A + \beta\overrightarrow{AB} = A + \vec{u}$. Por outro lado, se Q não pertence a reta que passa por A e B, então $\overrightarrow{AQ}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são paralelos, assim $\overrightarrow{AQ}$ não é um múltiplo de $\vec{u}$. Assim não existe α tal que $Q = A + \alpha\vec{u}$.

4.2.4 Equação Vetorial de plano

Dado um ponto A e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ L.I., dizemos que

$X = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$é uma equação vetorial de plano.

Precisamos que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sejam L.I. por que precisamos 'varrer' todas as direções na direção de um plano.

Por exemplo, se A, B e C são pontos não-colineares (i. e., não estão contidas no mesmo plano) então podemos tomar $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Se tomarmos um ponto P no plano que passa por A, B e C, então pelo fato de A, B, C e P serem coplanares vai implicar que $\overrightarrow{AP}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Ou seja, existem α e β reais tais que $\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Logo $P = A + \overrightarrow{AP} = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Se P não é um ponto do plano, então AP não é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e por isso não satisfaz a equação vetorial para nenhum α e β em $\mathbb{R}$.

4.2.5 Bases e coordenadas

Quando tomamos um conjunto L.I. que gera o espaço e o ordenamos, dizemos que temos uma base. Fixada uma base, qualquer vetor do espaço é combinação linear dela de uma única forma.

Como a base está ordenada, os coeficientes que aparecem na combinação linear podem ser associadas a uma única n-upla onde n é o número de elementos da base (toda base do espaço tem o mesmo número de elementos). Assim no caso do espaço Euclidiano, podemos associar cada vetor a uma tripla ordenada. Dessa maneira, podemos associar através de uma base, os elementos do espaço vetorial Euclidiano com $\mathbb{R}^3$.

Por exemplo, se $\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ é uma base e $\vec{v} = 3\vec{u_1}+2\vec{u_2}+\sqrt{2}\vec{u_3}$, então as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ são $(3, 2, \sqrt{2})_{\mathcal{B}}$. Quando a base está subentendida, indicamos apenas por $(3, 2, \sqrt{2})$

Para que as contas funcionem bem, é necessário porém escolher uma boa base, no caso uma base que lembre a quina de um cubo: os vetores têm norma 1 e são dois a dois perpendiculares. Dizemos que uma base com esta propriedade é ortonormal.

No caso de $\mathbb{R}^3$, temos que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ é uma base ortonormal, onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Dada uma base ortornormal o produto escalar e o produto vetorial batem com os valores indicados na definição destas operações para $\mathbb{R}^3$.

4.2.6 Sistemas de coordenadas no Espaço Euclidiano e o $\mathbb{R}^3$

Um sistema de coordenadas no espaço Euclidiano se refere a um ponto fixado O e uma base $\mathcal{B}$ do espaço Euclidiano. A ideia é associar cada ponto do Espaço Euclidiano a uma tripla

ordenada do sistema de coordenadas $\mathcal{S} = (O, \mathcal{B})$ da seguinte forma: Dado um ponto A, então o ponto $A = O + \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA} = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$. Assim, $A = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{S}}$.

Quando 'trocamos' o espaço Euclidiano por $\mathbb{R}^3$, tomamos uma base ortonormal e o ponto O de sistemas de coordenadas é identificado com $(0, 0, 0)$ e com isto, passamos a ver pontos e vetores como triplas ordenadas escritas sem distinção. Como veremos abaixo isto simplifica contas com produtos escalares, produtos vetoriais e produto misto.

4.2.7 Produtos escalares

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço Euclidiano, o produto escalar, denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u}.\vec{v}$ é um número relacionado à norma dos vetores e o ângulo entre eles (quando são vetores não-nulos).

A definição formal é

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos\theta & \text{se } \vec{u}, \vec{v} \text{ são não-nulos e } \theta \text{ é o ângulo entre } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \\ 0 & \text{se } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ são vetores nulos.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Note que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não-nulos então $\vec{u}.\vec{v} = 0$ é equivalente a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serem ortogonais.

Quando $\mathcal{B} = (\overrightarrow{w_1}, \ldots \overrightarrow{w_3})$ é uma base ortonormal, e $\vec{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (\beta_1, \ldots, \beta_3)_{\mathcal{B}}$ então vale que $\vec{u}.\vec{v} = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_3\beta_3$.

Dado um espaço vetorial arbitrário podemos definir um produto escalar (também chamado de produto interno) que satisfaça propriedades como as dos vetores do Espaço Euclidiano. A partir do produto interno pode se definir uma norma e definir ângulo como acima. *Ou seja, buscamos algo que se comporte algebricamente como o produto escalar e passamos a definir norma e ângulo.* Assim, usamos a intuição geométrica do espaço Euclidiano para outros casos mais gerais.

4.2.8 Um breve comentário sobre matriz de mudança de bases e orientação

Dadas duas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, um vetor vai ter coordenadas na base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Existe uma matriz que pode-se usar para passar as coordenadas de uma base para outra. Esta matriz é chamada de matriz de mudança de base. Duas bases têm a mesma orientação se há como 'movimentar' uma base para outra sem deixar de ser L.I.

Algebricamente, isto é equivalente a dizer que o determinante da matriz de mudança de base entre eles é um número real positivo.

Quando fixamos uma base para a orientação, as que têm a mesma orientação desta tem orientação positiva e as que não têm a mesma orientação tem orientação negativa. Qualquer duas bases com orientação negativa têm a mesma orientação, assim realmente só existem duas possibilidades de orientação.

4.2.9 Produto Vetorial - apenas para dimensão 3

Considere o espaço vetorial Euclidiano e fixe uma base ortonormal de orientação positiva.

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor.

Caso $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é um conjunto L.D. então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é o vetor $\vec{0}$.

Caso $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é um conjunto L.I. então os vetores geram um plano. Como estamos no espaço Euclidiano, há apenas uma direção ortogonal ao plano. O vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor não-nulo. Assim diremos qual sua norma, direção e sentido. A norma do vetor é igual à área do paralelogramo tomando representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que têm o mesmo ponto inicial. Isso é exatamente

$||\vec{u}||||\vec{v}||\sin\theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A direção de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O sentido do vetor é tal que $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ tem orientação positiva.

Se $\mathcal{B}=(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)$ é uma base de orientação positiva e $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)_{\mathcal{B}}$ então

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=det\begin{pmatrix}\overrightarrow{w_1} & \overrightarrow{w_2} & \overrightarrow{w_3}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)_{\mathcal{B}}$$

4.2.10 Produto misto - apenas para dimensão 3

O produto misto é $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})$.

Quando $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal positiva e $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)_{\mathcal{B}}$ então

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-(\alpha_1\beta_3\gamma_2+\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_2\gamma_1)$$

O valor $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ corresponde ao volume do paralelepípedo gerado por representantes de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ que têm o mesmo ponto inicial. O tetraedro gerado por estes representantes tem volume igual a $\frac{1}{6}|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$.

4.3 Projeções de vetores

4.3.1 Projeção de vetor na direção de uma reta

Dado um vetor não nulo $\vec{v}$ e um vetor $\vec{u}$, podemos projetar um vetor (se fixarmos uma reta r na direção de $\vec{v}$ e tomarmos um ponto A de r e o representante AB de $\vec{u}$, podemos projetar perpendicularmente o ponto B na reta r num ponto C da reta. Então o segmento AC seria a sombra perpendicular de AB na reta r. O vetor $\overrightarrow{AC}$ é a projeção de $\vec{u}$ na direção de $\vec{v}$ e é denotado por $proj_{\vec{v}}\vec{u}$.

Temos então que $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ é um múltiplo de $\vec{v}$ tal que $\vec{u}-proj_{\vec{v}}\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v}$.

Vamos agora fazer o cálculo para saber quem é a projeção em termos dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Temos que existe um α real tal que $proj_{\vec{v}}\vec{u}=\alpha\vec{v}$. Vamos encontrar este α com os cálculos abaixo:

Então $(\vec{u}-\alpha\vec{v}).(\vec{v})=0$ sse $\vec{u}.\vec{v}-\alpha\vec{v}.\vec{v}=0$ sse $\vec{u}.\vec{v}=\alpha\vec{v}.\vec{v}$ sse $\alpha=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}$.

Assim $proj_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$.

4.3.2 Projeção de vetor na direção de um plano

Dado um vetor $\vec{u}$ e dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ L.I., podemos fixar um plano na direção dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e um ponto A deste plano. Podemos então tomar o ponto B tal que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Podemos então projetar o ponto B ortogonalmente no plano que dará um ponto C do plano. Então $\overrightarrow{AC}$ é a projeção de $\vec{u}$ na direção do plano gerado por $\{\vec{v},\vec{w}\}$ e denotado por $proj_{[\vec{v},\vec{w}]}\vec{u}$.

Podemos encontrar este vetor usando dois métodos pelo menos:

1) Resolvendo um sistema de equações.

Precisamos achar $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tal que $proj_{[\vec{v},\vec{w}]}\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$.

Sabemos que $\vec{u}-\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$ deve então ser ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$. Logo

$$\begin{cases} (\vec{u} - \alpha\vec{v} - \beta\vec{w}).\vec{v} = 0 \\ (\vec{u} - \alpha\vec{v} - \beta\vec{w}).\vec{w} = 0 \end{cases}$$

sse

$$\begin{cases} (\vec{u}.\vec{v}) - \alpha||\vec{v}||^2 - \beta(\vec{w}.\vec{v}) = 0 \\ (\vec{u}.\vec{w}) - \alpha(\vec{v}.\vec{w}) - \beta||\vec{w}||^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraremos α e β.

Obs. Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores ortogonais então as equações ficam mais simples. Nesse caso especial, temos

$$\begin{cases} (\vec{u}.\vec{v}) - \alpha||\vec{v}||^2 = 0 \\ (\vec{u}.\vec{w}) - \beta||\vec{w}||^2 = 0 \end{cases}$$

Assim, no caso especial em que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais temos que $proj_{[\vec{v},\vec{w}]} = proj_{\vec{v}}\vec{u} + proj_{\vec{w}}\vec{u}$.

2) O outro modo é calcular primeiro o produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e notar que $\vec{u} - proj_{\vec{v}\wedge\vec{w}}\vec{u}$ é a projeção do vetor $\vec{u}$ na direção do plano gerado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Capítulo 5

Retas e Planos

A partir de agora vamos utilizar o $\mathbb{R}^3$ como nosso espaço de dimensão 3.
Queremos descrever retas e planos usando relações algébricas.

5.1 Equações da reta e do plano em $\mathbb{R}^3$

5.1.1 Equação vetorial da reta

Vimos anteriormente que $X = A + \alpha\vec{u}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial de reta.

5.1.2 Equação paramétrica da reta

Vamos agora descrever retas usando suas coordenadas.
Escrevendo $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$, a equação vetorial se torna $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(a, b, c)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
Escrevendo as coordenadas separadamente temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases} \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dizemos que um sistema como o acima são as equações paramétricas de uma reta.

5.1.3 Equação simétrica da reta

Basicamente, se pudermos isolar a variável α na equação paramétrica podemos escrever a equação simétrica. Nem toda reta pode ser escrita dessa forma, pois nenhum dos coeficientes do vetor diretor pode ser 0.

Caso (a, b, c) é um vetor em que nenhuma das coordenadas é 0 então podemos escrever a partir da equação paramétrica as equações:
$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$
que são chamadas de equações simétricas da reta.

5.1.4 Equação vetorial do plano

Vimos anteriormente que dado um ponto A e vetores L.I. $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
$X = A + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial de um plano.

5.1.5 Equação geral do plano

Se (a, b, c) é uma tripla em que pelo menos uma das coordenadas é diferente de 0, então $ax + by + cz + d = 0$ (ou $ax + by + cz = d$) é uma equação geral de plano.

Por exemplo $x+y-z = 2$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x+y-z = 2$.

Importante: Como as equações estão escritas numa base ortonormal, temos que (a, b, c) é um vetor normal ao plano.

Vamos dar um exemplo de como passar de equação vetorial para equação geral e como passar de uma equação geral para uma equação vetorial.

Exemplo 1: Tome $X = (1, 2, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 1, -1)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Método 1. Queremos uma vetor ortogonal a $(1, 0, 1)$ e $(2, 1, -1)$. Podemos para isso resolver o sistema:

$$\begin{cases} (1, 0, 1).(a, b, c) = 0 \\ (2, 1, -1).(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

para alguma tripla $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Fazendo o produto escalar, temos o sistema

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} a = -c \\ 2(-c) + b - c = 0 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} a = -c \\ b = 3c \end{cases}$$

Tomando por exemplo $c = -1$, temos que $(a, b, c) = (1, -3, -1)$ é uma solução do sistema. Assim, basta tomar

$x - 3y - z = d$ para algum d. Para ver o valor de d, temos que considerar primeiro um ponto do plano. Claramente $(1, 2, 0)$ é um ponto do plano, logo substituindo $(1, 2, 0)$ na equação, temos $1 - 3(2) - 0 = d$. Assim $d = -5$ e uma equação geral do plano seria $x - 3y + z = -5$.

Método 2. Também queremos um vetor ortogonal como no método 1, mas vamos usar o produto vetorial $(1, 0, 1) \wedge (2, 1, -1)$.

Neste caso

$$(1, 0, 1) \wedge (2, 1, -1) = det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0 - 1, 2 - (-1), 1 - 0) = (-1, 3, 1)$$

Assim $-x + 3y + z = d$ é um equação geral do plano para algum d. Novamente substituindo $(1, 2, 0)$ (um ponto do plano) na equação, temos que $-1 + 6 + 0 = d$ e portanto $-x + 3y + z = 5$ é uma equação geral do plano.

Método 3. Vamos usar determinantes para encontrar a equação geral.

Temos que $(1, 0, 1)$ e $(2, 1, -1)$ são vetores L.I.

Dado um ponto arbitrário $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que (x, y, z) está no plano se e somente se o vetor $(x - 1, y - 2, z - 0)$ está no plano (o ponto $(1, 2, 0)$ está no plano.

Logo (x, y, z) está no plano se e somente se

$$det \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

Logo, $0 + 2(y-2) + 1(z-0) - [(x-1) - (y-2) - 0] = 0$ sse $2y - 4 + z - [x - 1 - y + 2] = 0$ sse $2y - 4 + z - x + 1 + y - 2 = 0$. E assim, $-x + 3y + z - 5 = 0$ é uma equação geral do plano.

Exemplo 2. Encontre uma equação vetorial para o plano $x + y - z = 2$.

Para encontrar um ponto do plano, basta chutar os valores. Tomemos por exemplo $x = y = 1$ e vamos encontrar z para que o ponto esteja no plano. Substituindo na equação temos $1 + 1 - z = 2$. Logo $z = 0$ e $(1, 1, 0)$ pertence ao plano. Vamos buscar agora dois vetores L.I. na direção do plano. Como $(1, 1, -1)$ é normal ao plano, basta procurar vetores que satisfaçam $x + y - z = 0$.

Tomando por exemplo $x = 0$ e $y = 1$, temos que $0 + 1 - z = 0$. Assim, $z = 1$ e $(0, 1, 1)$ é um vetor na direção do plano. Agora tomando $x = 1$ e $z = 0$, temos que $1 + y - 0 = 0$ e $y = -1$. Assim $(1, -1, 0)$ é um vetor na direção do plano. Ainda resta notar que os dois vetores encontrado são L.I. (pusemos 0 na hora de buscar por que é mais fácil de ver se é L.I.). Claramente $(0, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$ são L.I. (um não é múltiplo do outro).

Assim $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, -1, 0)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, é uma equação vetorial para o plano.

5.1.6 Equações paramétricas do plano

Dado uma equação vetorial do plano, podemos escrever uma equação para cada coordenada, como foi feito para a equação vetorial de reta. O sistema de equações é chamado de equações paramétricas.

No caso do Exemplo acima uma equação paramétrica de $X = (1, 2, 0) + \alpha(1, 0, 1) = \beta(2, 1, -1)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ 2 = \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

5.2 Equações da reta em $\mathbb{R}^2$

No caso do $\mathbb{R}^2$ temos apenas duas coordenadas.

5.2.1 Equação vetorial da reta

Vimos anteriormente que $X = A + \alpha\vec{u}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial de reta.

5.2.2 Equação paramétrica da reta

Vamos agora descrever retas usando suas coordenadas.
Escrevendo $X = (x, y)$, $A = (x_0, y_0)$ e $\vec{u} = (a, b)$, a equação vetorial se torna
$(x, y) = (x_0, y_0) + \alpha(a, b)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
Escrevendo as coordenadas separadamente temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \end{cases} \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Estas são equações paramétricas da reta.

5.2.3 Equação simétrica da reta

A equação simétrica só existe para retas cujo vetor diretor (a, b) seja diferente de 0 nas duas coordenadas. A partir da equação paramétrica podemos concluir que $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ que seria uma equação simétrica da reta.

5.2.4 Equação geral da reta (somente para $\mathbb{R}^2$)

Como estamos em dimensão 2, dada uma reta, existe apenas uma direção perpendicular. Dado um vetor não nulo (a, b), é fácil verificar que $(-b, a)$ é perpendicular a (a, b), pois o produto escalar $(a, b).(-b, a) = -ab + ba = 0$. Assim, dada uma reta com equação vetorial $(x, y) = (x_0, y_0) + \alpha(a, b)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a equação geral da reta é da forma $-bx + ay = c$ para alguma constante c.

Para encontrar c basta substituir um ponto da reta na equação geral, por exemplo (x_0, y_0) e teremos $-bx_0 + ay_0 = c$ e uma equação geral seria $-bx + ay = -bx_0 + ay_0$.

Ou podemos usar o fato que $(x - x_0, y - y_0)$ é perpendicular a $(-b, a)$ e a equação geral pode ser encontrada usando $(x - x_0, y - y_0).(-b, a) = 0$. Então $(x - x_0)(-b) + (y - y_0).a = 0$ sse $-bx + bx_0 + ay - ay_0 = 0$. Assim, $-bx + ay = -bx_0 + ay_0$ é uma equação geral da reta.

Finalmente outra maneira é utilizando o determinante de ordem 2. Um ponto (x, y) está na reta sse $(x - x_0, y - y_0)$ e (a, b) são L.D. sse

$$det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{pmatrix} = 0$$

Logo, $(x - x_0)b - (y - y_0)a = 0$. Então $bx - bx_0 - ay + ay_0 = 0$. Portanto $bx - ay = bx_0 - ay_0$ é uma equação geral da reta.

Não confundir equação geral em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$!!!!. Por exemplo $x - y = 3$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$, mas é um plano em $\mathbb{R}^3$. O fato de z não aparecer como equação em $\mathbb{R}^3$ diz apenas que se os valores de x e y satisfazem a equação, então z pode ser qualquer valor.

Capítulo 6

Alguns lugares geométricos

Vimos retas e planos usando equações. Podemos usar outras equações para definir outros lugares geométricos.

6.1 Parábolas no $\mathbb{R}^2$

Fixe $a \neq 0$ um número real e b, c reais arbitrários. O conjunto dos (x, y) tal que $y = ax^2 + bx + c$ é uma parábola no eixo x.

Quando $a > 0$, a concavidade é 'virada' para cima. Quando $a < 0$, a concavidade é 'virada' para baixo.

Fixe $a \neq 0$ um número real e b, c reais arbitrários. O conjunto dos (x, y) tal que $x = ay^2+by+c$ é uma parábola no eixo y. Quando $a > 0$, a concavidade é 'virada' para a direita. Quando $a < 0$, a concavidade é 'virada' para a esquerda.

6.2 Hipérboles

O conjunto dos (x, y) tal que $y = \frac{1}{x}$ é uma hipérbole. Quando x se aproxima de 0 com $x > 0$, o valor de y começa crescer para o infinito. Quando o valor de x cresce para o infinito, o valor de y começa a se aproximar de 0 mas por cima do eixo OX.

Quando x se aproxima de 0 com $x < 0$, o valor de y começa decrescer para o menos infinito. Quando o valor de x decresce para o menos infinito, o valor de y começa a se aproximar de 0 mas por baixo do eixo OX.

Se $a > 0$ temos que $y = \frac{a}{x}$ tem um comportamento parecido ao de $y = \frac{1}{x}$. Os pontos (x, y) da hipérbole deste caso estão no primeiro e terceiro quadrante

Se $a < 0$: Quando x se aproxima de 0 com $x > 0$, o valor de y começa decrescer para menos infinito. Quando o valor de x cresce para o infinito, o valor de y começa a se aproximar de 0 mas por baixo do eixo OX.

Quando x se aproxima de 0 com $x < 0$, o valor de y começa crescer para o infinito. Quando o valor de x decresce para o menos infinito, o valor de y começa a se aproximar de 0 mas por cima do eixo OX. Os pontos (x, y) da hipérbole deste caso estão no segundo e quarto quadrante

6.3 A circunferência em $\mathbb{R}^2$

Uma circunferência centrada em (a, b) com raio $r > 0$ é o conjunto dos (x, y) tal que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

A distância de (x, y) a (a, b) é exatamente $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, logos os pontos (x, y) que satisfazem a equação distam exatamente r do ponto (a, b).

6.4 Elipse em $\mathbb{R}^2$

Uma elipse é um conjunto da forma (x, y) tais

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$$

onde a, b e r são números reais positivos.

O conjunto também pode ser descrito por $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = r^2$.

Quando $a = b$, temos uma circunferência de raio r.

6.5 Senos e cossenos

Como vocês já devem ter visto no colegial, dado um ponto (x, y) na circunferência de raio 1, podemos considerar o ângulo θ 'indo no sentido anti-horário' da semirreta OX de origem $(0, 0)$ que passa por $(0, 0)$ e $(1, 0)$ até a semirreta de origem $(0, 0)$ que passa pelo $(0, 0)$ e ponto (x, y). Então $\cos\theta = x$ e $\sin\theta = y$. Assim para todo (x, y) na circunferência existe θ tal que $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Por outro lado, dado um ângulo θ há uma semirreta r saindo de $(0, 0)$ tal que OX e r têm ângulo θ. Essa semirreta r, vai intersectar o círculo num único ponto que ó ponto $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Para o estudo do Cálculo Diferencial será mais útil calcular o seno e o coseno usando comprimento de arco. Isto é feito de forma linear. Um angulo de 360 corresponde a uma volta no círculo de raio 1 que corresponde a 2π. Assim 90 graus correspondem a $\frac{\pi}{2}$, 60 graus a $\frac{\pi}{3}$ 0 graus a 0 radianos e assim por diante.

Iremos em outra seção falar sobre as propriedades do seno e cosseno.

6.6 Parametrização do Círculo e da Elipse

A parametrização de um conjunto seria como estabelecer uma correspondência de um instante t com um ponto do conjunto, como se o conjunto fosse uma estrada e t o momento em que passamos por algum ponto desta estrada.

O círculo de raio r e centro $(0, 0)$ pode ser parametrizado como

$$(r\cos t, r\sin t), t \in \mathbb{R}$$

no sentido anti-horário e como

$$(r\sin t, r\cos t), t \in \mathbb{R}$$

no sentido horário. No instante $t = 0$ da primeira parametrização estamos no ponto $(r, 0)$. No instante $t = 0$ da segunda parametrização estamos no ponto $(0, r)$.

No caso do círculo de raio r e centro (a, b), podemos parametrizar no sentido horário como

$$(r\cos t + a, r\sin t + b), t \in \mathbb{R}$$

no sentido anti-horário e como

$$(r\sin t + a, r\cos t + b), t \in \mathbb{R}$$

no sentido horário.

A parametrização da Elipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = r^2$ é dada por $(ra\cos t, rb\sin t), t \in \mathbb{R}$.

Note que $t \in \mathbb{R}$ dá infinitas voltas sobre o conjunto parametrizado. Nos casos acima, se tomarmos por exemplo $t \in [0, 2\pi]$ é suficiente para parametrizarmos o círculo e a elipse na forma acima.