Lista de Exercícios 3 - Resolução

Exercício 1

a) $y = \cos(\pi x)$. Para que uma função seja periódica, devemos ter a seguinte condição satisfeita: $f(t) = f(t+T)$. No caso da função do exercício, temos:

$\cos(\pi x) = \cos[\pi(x+T)]$ sendo T o período da função. Assim

$\cos(\pi x + \pi T) = \cos(\pi x).\cos(\pi T) - \sin(\pi x).\sin(\pi T) \equiv \cos(\pi x)$. Para que esta identidade seja satisfeita, devemos ter

$$\begin{cases} \cos(\pi.T) = 1 \Rightarrow T = 0, 2, 4, \ldots \\ \sin(\pi.T) = 0 \Rightarrow T = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Como por definição o período é a menor constante positiva tal que o sistema acima seja satisfeito simultaneamente, então $T = 2$ é o período de $y = \cos(\pi x)$. Como existe T que satisfaz a igualdade $f(t) = f(t+T)$, então a função é periódica.

b) $y = \tan(\pi x)$

Solução: Para que $\tan(\pi x)$ seja periódica devemos ter $\tan(\pi x) = \tan[\pi(x+T)]$

$$\tan[\pi(x+T)] = \frac{\tan \pi x + \tan \pi T}{1 - \tan \pi x . \tan \pi T} \equiv \tan(\pi x).$$ Para que a identidade acima seja satisfeita devemos ter

$\tan(\pi.T) = 0 \Rightarrow T = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Como $T = 1$ é a menor constante positiva que a igualdade $\tan(\pi x) = \tan[\pi(x+T)]$ verdadeira, $T = 1$ é o período dessa função. Como $\exists$ T que satisfaça a condição de periodicidade de uma função, então $\tan(\pi x)$ é uma função periódica.

(c) $y = x^2$

Usando a definição, devemos ter $f(x) = f(x+T)$, sendo T o período da função. Portanto, devemos encontrar $T > 0$ para que a função seja considerada periódica. Assim

$$x^2 \equiv x^2 + 2xT + T^2 \iff T = 0.$$

Como, por definição, T deve ser a menor constante positiva que satisfaça $f(x) = f(x+T)$, então $y = x^2$ não é periódica.

(d) $y = \sin(5x)$.

Usando a definição, devemos ter: $f(x) = f(x+T)$ ∴

$$\sin[5(x+T)] = \sin(5x) \Rightarrow \sin(5x).\cos 5T + \sin(5T).\cos(5x) \equiv \sin(5x)$$

A identidade acima só é satisfeita se:

$$\begin{cases} \cos(5T) = 1 \Rightarrow 5T = 2\pi \therefore T = \frac{2\pi}{5}. \text{ Logo, } T = 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \dots \\ \sin(5T) = 0 \Rightarrow 5T = 2\pi \therefore T = \frac{2\pi}{5}. \text{ Logo, } T = 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \dots \end{cases}$$

A menor constante positiva que satisfaz a equação acima é $\boxed{T = \frac{2\pi}{5}}$. → período da função

Como $\exists\, T$ tal que $f(x) \equiv f(x+T)$, então a função é periódica.

(e) $y = \cos(3x) + \sin(4x) + \cos(5x)$

As funções $\cos(3x)$, $\sin(4x)$ e $\cos(5x)$ são funções periódicas. As parcelas que compõem a função $y(x)$ possuem os seguintes períodos: $T_1 = \frac{2\pi}{3}k_1$, $T_2 = \frac{2\pi}{4}k_2$ e $T_3 = \frac{3\pi}{5}k_3$. A soma dessas três funções só será periódica se formos capaz de acharmos k_1, k_2 e $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que a seguinte condição seja satisfeita $T_1 = T_2 = T_3$. Portanto,

$$\frac{2\pi}{3}k_1 = \frac{2\pi}{4}.k_2 = \frac{2\pi}{5}.k_3.$$

É fácil constatar que para $k_1 = 3$, $k_2 = 4$ e

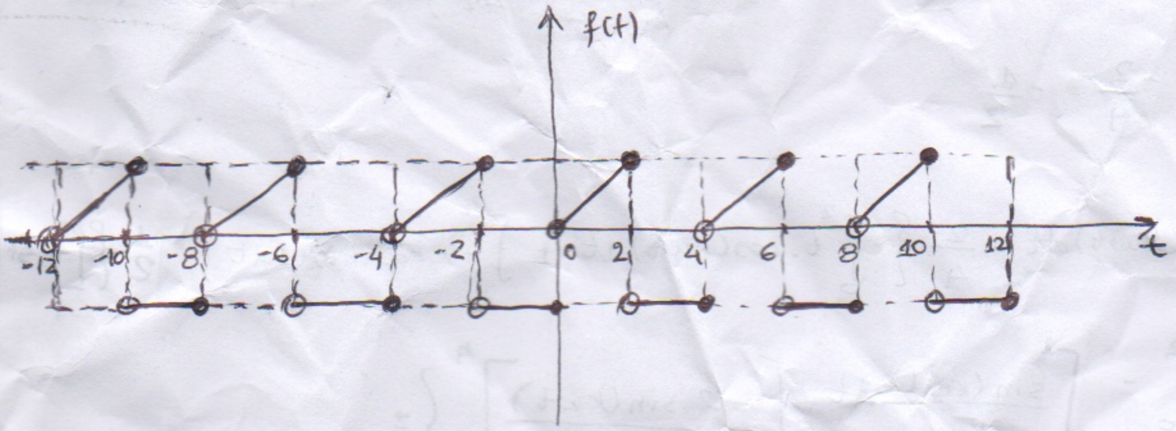
$K_3 = 5$ a condição é satisfeita. Logo, $y(x) = \cos(3x) + \sin(4x) + \cos(5x)$ é periódica. O menor período para o qual a condição $f(x) = f(x+T)$ é satisfeito é $\boxed{T = 2\pi}$.

Exercício 2

a)

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 < t \leq 2 \\ -2 & \text{para } 2 < t \leq 4 \end{cases}, \quad \text{sendo } f(t) = f(t+4)$$

Gráfico:



b) Sim, a função f(t) satisfaz as condições de Dirichlet, pois,

1º: é seccionalmente contínua, ou seja, não existe pontos de descontinuidade com saltos infinitos e há um número finito de subintervalos onde f(t) é contínua. Veja que os limites laterais nos pontos de descontinuidade existem e são finitos;

2º: A função f(t) é seccionalmente monotônica, já que ela preserva a ordem de crescimento para cada ponto onde f(t) está definida;

3º: A função é absolutamente integrável, já que a integral de $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$.

De fato, $\int_0^2 |t| dt + \int_2^4 |-2| dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \left[2t\right]_2^4 = \frac{4}{2} + [2.4 - 2.2] = 6$.

c) A série de Fourier de f(t) pode ser representada por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} (a_K \cdot \cos(K\omega t) + b_K \cdot \sin(K\omega t))$$

sendo

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt$$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(K\omega t)dt$$

$$b_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin(K\omega t)dt$$

com $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$a_0 = \frac{1}{4}\left[\int_0^2 t.dt + \int_2^4 -2.dt\right] = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 + \left[-2t\right]_2^4\right\} = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right] + \left[-8+4\right]\right\} = \frac{1}{4}\left\{2-4\right\} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(K\omega t)dt = \frac{2}{4}\left\{\int_0^2 t.\cos(K\omega t)dt + \int_2^4 -2.\cos(K\omega t)dt\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{t.\sin(K\omega t)}{K\omega}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin(K\omega t)}{K\omega}dt \quad \left[-\frac{2.\sin(K\omega t)}{K\omega}\right]_2^4\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{t.\sin(K\omega t)}{K\omega}\right]_0^2 + \left[\frac{\cos(K\omega t)}{(K\omega)^2}\right]_0^2 + \left[-\frac{2\sin(K\omega t)}{K\omega}\right]_2^4\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2.\sin(2K\omega)}{K\omega}\right] + \left[\frac{\cos(2K\omega)}{(K\omega)^2} - \frac{1}{(K\omega)^2}\right] + \left[-\frac{2.\sin(4K\omega)}{K\omega} + \frac{2\sin(2K\omega)}{K\omega}\right]\right\} =$$

Como $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e $T = 4$, então $\omega = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2.\sin\left(\frac{2K.\pi}{2}\right)}{\frac{K\pi}{2}}\right] + \left[\frac{\cos\left(\frac{2.K\pi}{2}\right)}{\left(K.\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(K.\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] + \left[\frac{2.\sin\left(2K.\frac{\pi}{2}\right)}{K.\frac{\pi}{2}} - \frac{2.\sin\left(\frac{4K.\pi}{2}\right)}{K.\frac{\pi}{2}}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{4.\sin(K\pi)}{K\pi} + \frac{4\cos(K\pi)}{K^2\pi^2} - \frac{4}{K^2\pi^2} + \frac{4.\sin(K\pi)}{K\pi} - \frac{4\sin(2K\pi)}{K\pi}\right\} =$$

Como $\sin(K\pi) = 0$, $\sin(2K\pi) = 0$ $\forall K \in \mathbb{N}$, com $K \geq 1$, então:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{4.\cos(K\pi)}{K^2\pi^2} - \frac{4}{K^2\pi^2}\right\}$$ Como $\cos(K\pi) = (-1)^K$, então:

$$a_K = \frac{1}{2}\left\{\frac{4.(-1)^K}{K^2\pi^2} - \frac{4}{K^2\pi^2}\right\}. \text{ Assim } a_K = \begin{cases} -\frac{4}{K^2\pi^2} \text{ se } K \text{ é ímpar} \\ 0 \text{ se } K \text{ é par} \end{cases}$$

$$a_K = -\frac{4}{(2K+1)^2\pi^2}$$

$$b_K = \frac{2}{4}\left\{\int_0^2 t.\sin(K\omega t)dt + \int_2^4 -2.\sin(K\omega t)dt\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{t.\cos(K\omega t)}{K\omega}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{\cos(K\omega t)}{K\omega}dt\right.$$

$$\left. + \left[\frac{2.\cos(K\omega t)}{K\omega}\right]_2^4\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2.\cos(K\omega 2)}{K\omega}\right] + \left[\frac{\sin(K\omega t)}{(K\omega)^2}\right]_0^2 + \left[\frac{2.\cos(4K\omega)}{K\omega} - \frac{2\cos(2K\omega)}{K\omega}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2.\cos\left(\frac{K.\pi.2}{2}\right)}{\frac{K\pi}{2}}\right] + \left[\frac{\sin\left(\frac{2.K.\pi}{2}\right)}{\left(\frac{K\pi}{2}\right)^2}\right] + \left[\frac{2.\cos\left(\frac{4.K.\pi}{2}\right)}{\frac{K.\pi}{2}} - \frac{2.\cos\left(\frac{2.K.\pi}{2}\right)}{\frac{K.\pi}{2}}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-4.\cos(K.\pi)}{K\pi}\right] + \left[\frac{4.\sin(K\pi)}{K^2\pi^2}\right] + \left[\frac{4.\cos(2K\pi)}{K.\pi} - \frac{4.\cos(K\pi)}{K.\pi}\right]\right\} =$$

Como $\sin(K\pi) = 0 \ \forall K \in \mathbb{N}$, com $K \geq 1$ e $\cos(K.\pi) = (-1)^K$ e $\cos(2K\pi) = 1$, então:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{-4.(-1)^K}{K\pi} + \frac{4}{K.\pi} - \frac{4.(-1)^K}{K\pi}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{K\pi} - \frac{8(-1)^K}{K\pi}\right\} = \frac{2}{K\pi}\left\{1 - 2(-1)^K\right\}$$

Assim, a série de Fourier de $f(t)$ é dada por:

$$\boxed{f(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-4}{K^2\pi^2}\right).\cos\left(K.\frac{\pi}{2}.t\right) + \left(\frac{2}{K\pi} - \frac{4}{K\pi}(-1)^K\right).\sin\left(K.\frac{\pi}{2}.t\right)\right]}$$

d) No ponto $t=0$, a função $f(t)$ apresenta descontinuidade. Logo, a série de Fourier deverá convergir para: $f(0) = \frac{f(0_+) + f(0_-)}{2} = -1$

No ponto $t = 1$, $f(t) = 1$. Portanto, a série de Fourier deverá convergir para este valor.

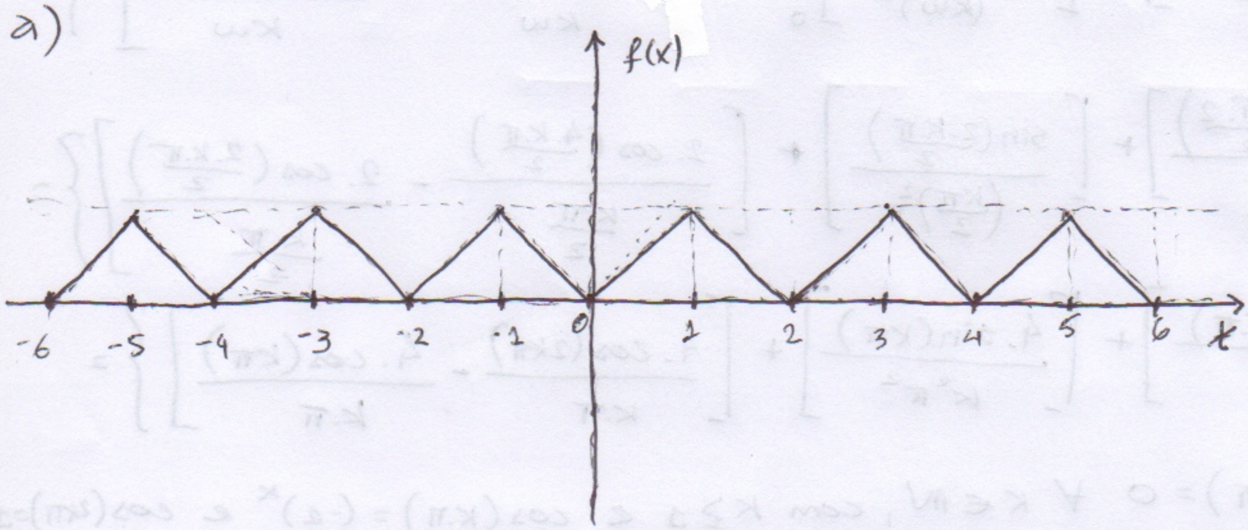
No ponto $t = 2$, $f(t)$ apresenta descontinuidade. Logo, a série deverá convergir para $f(2) = \dfrac{f(2_+) + f(2_-)}{2} = \dfrac{2 - 2}{2} = 0$.

No ponto $t = 3$, $f(t) = -2$. Portanto, a série deverá convergir para este valor.

Exercício 3

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad \text{com } f(x+2) = f(x)$$

a)



b) Sim, $f(x)$ satisfaz as condições de Dirichlet.

1º: $f(x)$ é uma função contínua;

2º: $f(x)$ é monotônica; (crescente e decrescente)

3º: $f(x)$ é absolutamente integrável:

$$\int_{-1}^{0} |-x| \cdot dx + \int_{0}^{1} |x| dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 < \infty$$

c) A função $f(x)$ pode ser representada em série de Fourier da seguinte forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)\right], \quad \text{com } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$$

Como $f(x)$ é uma função par, então não precisamos calcular os coeficientes b_K. Logo:

$$a_0 = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x\,dx\right\} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_K = \frac{4}{2}\left\{\int_0^1 x.\cos(K\omega x)\,dx\right\} = 2\left\{\left[\frac{x.\sin(K\omega x)}{K\omega}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(K\omega x)}{K\omega}dx\right\} =$$

$$2\left\{\left[\frac{x.\sin(K\omega x)}{K\omega}\right]_0^1 + \left[\frac{\cos(K\omega x)}{(K\omega)^2}\right]_0^1\right\} = 2.\left\{\frac{\sin(K\pi)}{K.\pi} + \frac{\cos(K\pi)}{K^2\pi^2} - \frac{1}{K^2\pi^2}\right\}$$

Como $\sin(K\pi) = 0 \;\forall\; K \in \mathbb{N}$, com $K \geq 1$ e $\cos(K\pi) = (-1)^K$, então:

$$a_K = 2\left\{\frac{(-1)^K}{K^2\pi^2} - \frac{1}{K^2\pi^2}\right\}. \text{ Assim } a_K = \begin{cases} -\dfrac{2}{K^2\pi^2} & \text{se } K \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } K \text{ for par} \end{cases}$$

$$\boxed{a_K = \frac{-2}{(2K+1)^2\pi^2}}$$

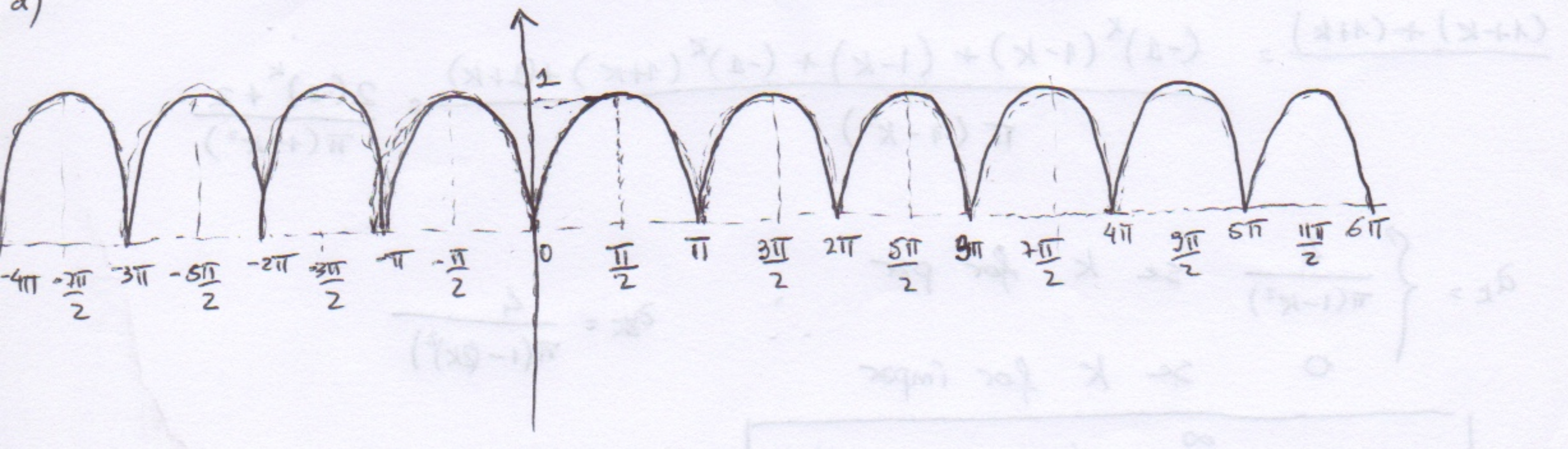
Portanto, a série de Fourier será dada por:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{(2K+1)^2\pi^2}.\cos\left[(2K+1)\pi.x\right]\right)}$$

Exercício 4

$$f(x) = |\sin x|,\; -\pi \leq x \leq \pi, \text{ com } f(x+2\pi) = f(x)$$

a)



b) Sim, a função f(x) satisfaz as condições de Dirichlet

1º: A função é contínua;

2º: É monotônica (no intervalo considerado); basta calcular as derivadas da função;

3º: É absolutamente integrável -> $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx = 4 < \infty$

c) A função $|\sin(x)|$ é uma par. Logo, $b_k = 0$ e precisamos apenas calcular os coeficiente a_0 e a_k.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(1+1\right) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(x).\cos(k\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(x+k\omega x)+\sin(x-k\omega x)\right]dx$$

já que
$$\sin(x+k\omega x) = \sin x.\cos(k\omega x) + \sin(k\omega x).\cos(x)$$
$$\sin(x-k\omega x) = \sin x.\cos(k\omega x) - \sin(k\omega x).\cos(x)$$

$$\sin(x+k\omega x) + \sin(x-k\omega x) = 2.\sin(x).\cos(k\omega x) \quad \therefore$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin[(1+k\omega)x] + \sin[(1-k\omega)x]\right)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos[(1+k\omega)x]}{(1+k\omega)}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos[(1-k\omega)x]}{(1-k\omega)}\right]_0^{\pi}\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos\pi.\cos k\pi}{(1+k)} + \frac{1}{(1+k)} - \frac{\cos\pi.\cos k\pi}{(1-k)} + \frac{1}{(1-k)}\right\} = \frac{\cos k\pi.(1-k)+(1-k)+\cos k\pi}{\pi(1+k)(1-k)}$$

$$\frac{(1+k)+(1+k)}{} = \frac{(-1)^k(1-k)+(1-k)+(-1)^k(1+k)+(1+k)}{\pi(1-k^2)} = \frac{2(-1)^k+2}{\pi(1-k^2)}$$

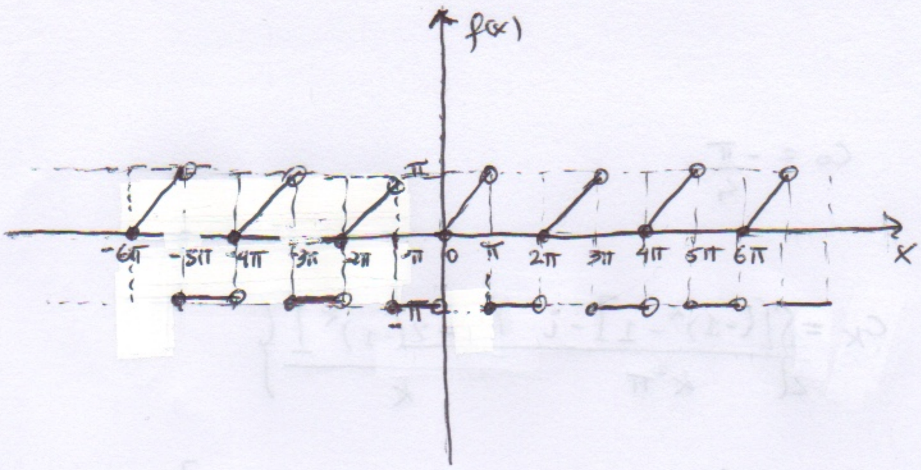
$$a_k = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1-k^2)} & \text{se } k \text{ for par} \\ 0 & \text{se } k \text{ for ímpar}\end{cases} \quad \therefore \quad a_{2k} = \frac{4}{\pi(1-(2k)^2)}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}.\cos 2kx}$$

Exercício 5

$$f(x)=\begin{cases} -\pi, & \text{se } -\pi<x<0 \\ x, & \text{se } 0<x<\pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

a)



b)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-\pi\,dx+\int_0^{\pi}x\,dx\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[-\pi.x\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right\}=\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right\}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\pi^2}{2}\right\}=-\frac{\pi}{4}$$

$$a_k=\frac{2}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-\pi.\cos(k\omega x)dx+\int_0^{\pi}x.\cos(k\omega x)dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\pi.\sin(k\omega x)}{k\omega}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x.\sin(k\omega x)}{(k\omega)}\right]_0^{\pi}\right.$$

$$\left.-\int_0^{\pi}\frac{\sin(k\omega x)}{k\omega}dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-\pi.\sin(k\omega x)}{k\omega}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{x.\sin(k\omega x)}{(k\omega)}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\cos(k\omega x)}{(k\omega)^2}\right]_0^{\pi}\right\}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{\pi.\sin(-k\pi)}{k}+\frac{\pi.\sin(k.\omega.0)}{k}\right]+\left[\frac{\pi.\sin(k\pi)}{k}-\frac{0.\sin(k0)}{k}\right]+\left[\frac{\cos(k\pi)}{k^2}-\frac{\cos(k.0)}{k^2}\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^k}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right\}=\frac{1}{k^2\pi}.\left((-1)^k-1\right)$$

$$b_k=\frac{2}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}-\pi.\sin(k\omega x)dx+\int_0^{\pi}x.\sin(k\omega x)dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.\cos(k\omega x)}{k\omega}\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{-x.\cos(k\omega x)}{k\omega}\right]_0^{\pi}+\right.$$

$$\left.\int_0^{\pi}\frac{\cos(k\omega x)}{k\omega}dx\right\}=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.\cos(k.0)}{k}-\underbrace{\frac{\pi.\cos(-k\pi)}{k}}_{=\cos(k\pi)}\right]+\left[\frac{-\pi.\cos(k\pi)}{k}\right]+\left[\underbrace{\frac{\sin(k\pi)}{k^2}}_{=0}\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{k}-\frac{2\pi(-1)^k}{k}\right\}=\frac{1}{k}\left(1-2(-1)^k\right)\therefore$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^k-1)}{k^2\pi}\cdot\cos(kx)+\frac{(1-2(-1)^k)}{k}\cdot\sin(kx)\right]}$$

c)

$$c_0=a_0$$

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$$

$$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$$

$$\therefore$$

$$c_0=-\frac{\pi}{4}$$

$$c_k=\frac{1}{2}\left\{\frac{[(-1)^k-1]}{k^2\pi}-i\frac{[1-2(-1)^k]}{k}\right\}$$

$$c_{-k}=\frac{1}{2}\left\{\frac{[(-1)^k-1]}{k^2\pi}+i\frac{[1-2(-1)^k]}{k}\right\}$$

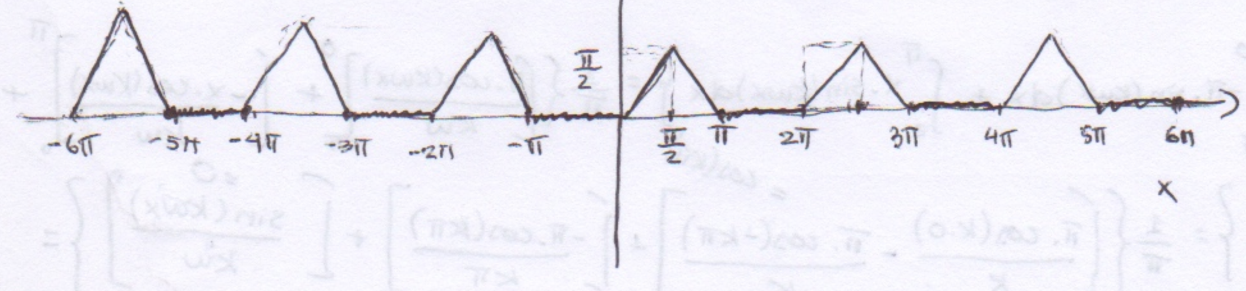
$$\therefore\ f(x)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\cdot e^{ik\omega x}+c_{-k}\cdot e^{-ik\omega x}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi}-\frac{i\left(1-2(-1)^k\right)}{k}\right]\cdot e^{ikx}+\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi}+\frac{i[1-2(-1)^k]}{k}\right]\cdot e^{-ikx}}$$

Exercício 6

a)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{se } -\pi<x<0\\ x, & \text{se } 0<x<\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \text{se } \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$



b) Sim, a função satisfaz as condições de Dirichlet:

1º: É contínua, logo seccionalmente contínua;

2º: É monotónica crescente e decrescente;

3º: É absolutamente integrável. $\int_{-\pi}^{0} |0| dx + \int_{0}^{\pi/2} |x| dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\pi - x| dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} =$

$\frac{\pi^2}{4} < \infty$.

c) A série de Fourier na forma complexa é dada por:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikwx}$$

com $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x).e^{-ikwx} dx$, sendo $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \therefore w = 1$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0.e^{-ikwx} dx + \int_0^{\pi/2} x.e^{-ikwx} + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x).e^{-ikwx} dx\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x.e^{-ikwx}}{(-ikw)}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-ikwx}}{(-ikw)} dx + \left[\frac{\pi.e^{-ikwx}}{(-ikw)}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[\frac{-x.e^{-ikwx}}{(-ikw)}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{-ikwx}}{(-ikw)} dx\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x.e^{-ikwx}}{(-ikw)}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{e^{-ikwx}}{(-ikw)^2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\pi.e^{-ikwx}}{(-ikw)}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[\frac{-x.e^{-ikwx}}{(-ikw)}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[\frac{e^{-ikwx}}{(-ikw)^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{2}.\frac{e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{(-ik)} - \left[\frac{e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{(-ik)^2} - \frac{1}{(-ik)^2}\right] + \left[\frac{\pi.e^{-ik\pi}}{(-ik)} - \frac{\pi.e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{(-ik)}\right] + \left[\frac{-\pi.e^{-ik\pi}}{(-ikw)} + \frac{\pi}{2}.\frac{e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{(-ikw)}\right] +\right.$$

$$\left.\left[\frac{e^{-ik\pi}}{(-ik)^2} - \frac{e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{(-ik)^2}\right]\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{2}.\frac{(-i\sin(\frac{k\pi}{2}))}{(-ik)} - \left[\frac{(-i\sin(\frac{k\pi}{2}))}{(-ik)^2} - \frac{1}{(-ik)^2}\right] + \left[\frac{\pi(-1)^k}{(-ik)} - \frac{\pi.(-i\sin(\frac{k\pi}{2}))}{(-ik)}\right] +\right.$$

$$\left.\left[\frac{-\pi.(-1)^k}{(-ik)} + \frac{\pi}{2}.\frac{(-i\sin(\frac{k\pi}{2}))}{(-ik)}\right] + \left[\frac{(-1)^k}{(-ik)^2} - \frac{(-i\sin(\frac{k\pi}{2}))}{(-ik)^2}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2k}.\sin(\frac{k\pi}{2}) - \left[\frac{i\sin(\frac{k\pi}{2})}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right] + \left[\frac{\pi(-1)^k}{(-ik)} - \frac{\pi.\sin(\frac{k\pi}{2})}{k}\right] + \left[\frac{\pi(-1)^k}{(ik)} + \frac{\pi}{2}\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{k}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\frac{(-1)^k}{-k^2} - \frac{i\sin(\frac{k\pi}{2})}{k^2}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)-1-(-1)^k}{k^2}\right\}$$. Repare que essa expressão calculada para c_k não é válida para $k=0$. Assim,

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}0.e^{-i(0)kx}\,dx+\int_{0}^{\pi/2}x.e^{-i(0)kx}\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x).e^{-i(0)kx}\,dx\right\}\Rightarrow$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2}+\left[\pi x-\frac{x^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\}\Rightarrow$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2}{8}+\pi^2-\frac{\pi^2}{8}\right\}=\frac{\pi}{2}\quad\therefore$$

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)-1-(-1)^k}{2\pi k^2}\right).e^{ikx}}$$ para $k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

d) Em $x=0$, a série convergirá para $f(0)=0$

Em $x=\frac{\pi}{2}$, a série convergirá para $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

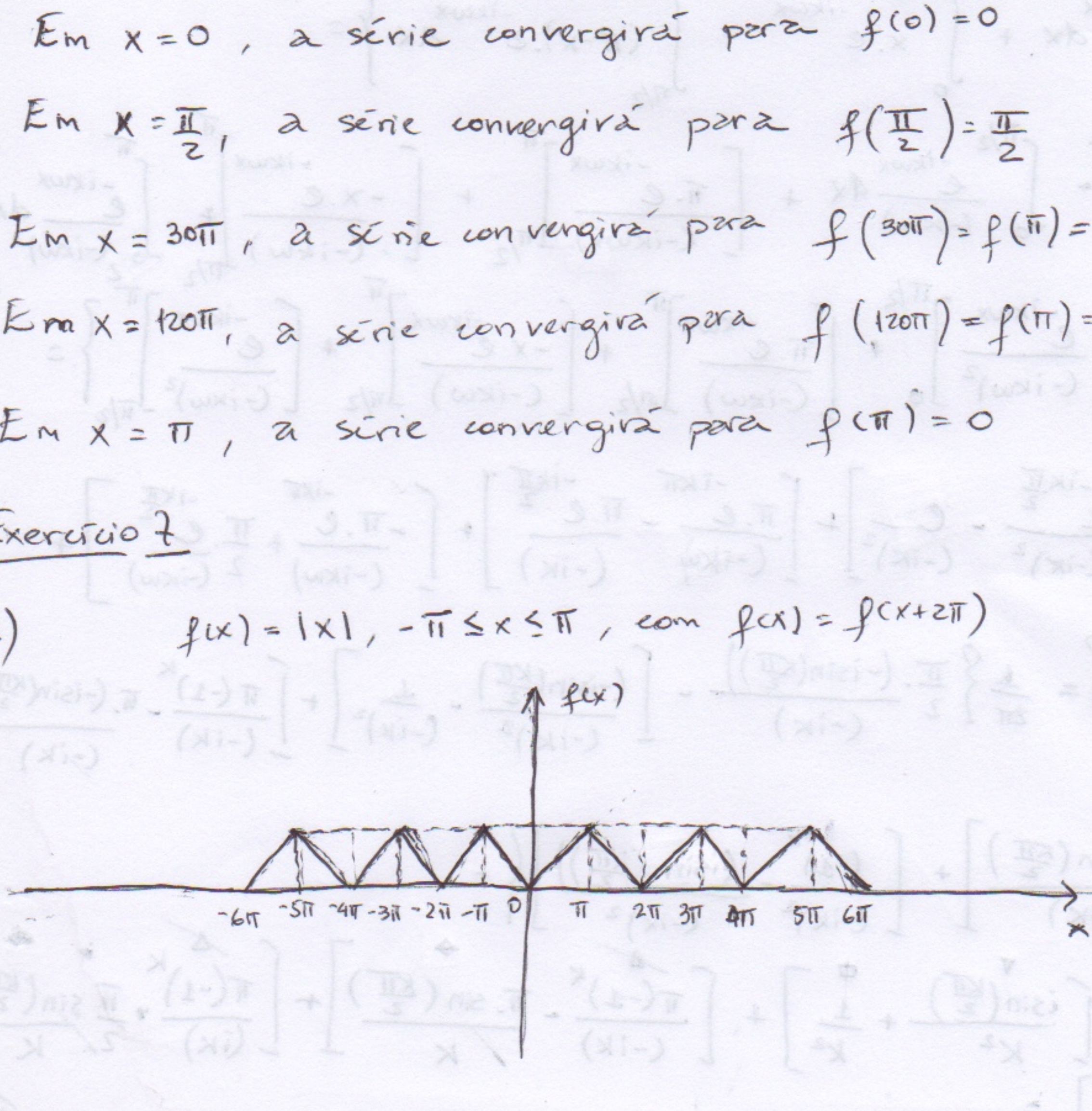
Em $x=30\pi$, a série convergirá para $f(30\pi)=f(\pi)=0$

Em $x=120\pi$, a série convergirá para $f(120\pi)=f(\pi)=0$

Em $x=\pi$, a série convergirá para $f(\pi)=0$

Exercício 7

a) $f(x)=|x|,\ -\pi\le x\le\pi$, com $f(x)=f(x+2\pi)$



b) Essa função possui simetria par pois $f(x) = f(-x) \; \forall x \in [-\pi, \pi]$.

c) Essa função satisfaz as condições de Dirichlet, pois:

1º: É contínua, logo seccionalmente contínua

2º: É monotônica,

3º: É absolutamente integrável no intervalo $[-\pi, \pi]$

d)

Como a função é par, então:

$$c_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x).e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x.e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x.e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)}dx\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x.e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.e^{-ik\pi}}{(-ik)}\right] - \left[\frac{e^{-ik\pi}}{(-ik\omega)^2} - \frac{e^{-ik0}}{(-ik\omega)^2}\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.(-1)^k}{(-ik)}\right] - \left[\frac{-(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right]\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi(-1)^k}{(-ik)}\right] + \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right\} \therefore$$

$$c_k = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{\pi(-1)^k}{ik}\right\}$$. Novamente, essa expressão não é válida para $k = 0$.

$$c_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x.e^{-i(0)\omega x}\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \therefore$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\underbrace{\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{\pi(-1)^k}{ik}\right\}}_{\text{para } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots}.e^{-ikx}}$$

Exercício 8

Para resolver este problema, vamos utilizar a identidade de Parseval:

$$\frac{2}{T}\int_0^{T} |f(x)|^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Como a função $f(x) = |x|$ tem simetria par, então $b_k = 0$. Portanto,

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x.\cos(k\omega x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x.\cos(k\omega x)dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x.\sin(k\omega x)}{k\omega}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(k\omega x)}{k\omega}dx\right\} =$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x.\sin(k\omega x)}{k\omega}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(k\omega x)}{k^2\omega^2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\overbrace{\left[\frac{\pi.\sin(k\pi)}{k}\right]}^{=0} + \left[\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right]\right\} =$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right\}.\quad \text{Assim}\quad a_k = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } k \text{ for par} \end{cases}$$

$$a_k = \left\{-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right.$$

Como a função é par:

$$2.\frac{2}{T}\int_0^{T/2}|f(x)|^2dx = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{4}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{2\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{4\pi^2}{6} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{(2k-1)^4.\pi^2} = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{2\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2.\pi^2}{6.16} = \frac{\pi^4}{96}$$

Exercício 9

Como a função $f(x) = x^2$ é par, então $b_k = 0$. Logo:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x).dx = \frac{2}{2}\int_0^{1} x^2dx = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$T = 2 = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \pi$

$$a_K = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x).\cos(K\omega x)\,dx = \frac{4}{2}\int_0^1 x^2.\cos(K\omega x)\,dx = 2\left\{\left[\frac{x^2.\sin(K\omega x)}{K\omega}\right]_0^1 - \right.$$

$$\left.\int_0^1 \frac{2x.\sin(K\omega x)}{K\omega}dx\right\} = 2\left\{\left[\frac{x^2.\sin(K\omega x)}{K\omega}\right]_0^1 - \left\{\left[\frac{2x(-\cos K\omega x)}{K^2\omega^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2(-\cos K\omega x)}{K^2\omega^2}dx\right\}\right\} =$$

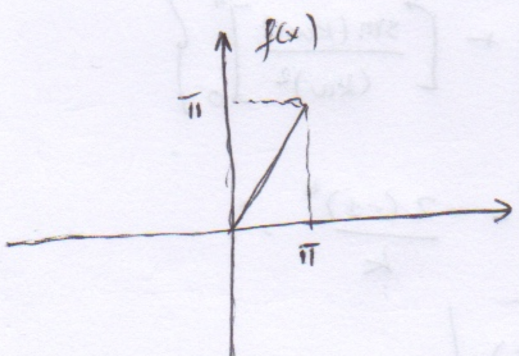
$$2\left\{\left[\frac{x^2.\sin(K\omega x)}{K\omega}\right]_0^1 - \left\{\left[\frac{2x(-\cos K\omega x)}{K^2\omega^2}\right]_0^1 + \left[\frac{2\sin(K\omega x)}{K^3\omega^3}\right]_0^1\right\}\right\} =$$

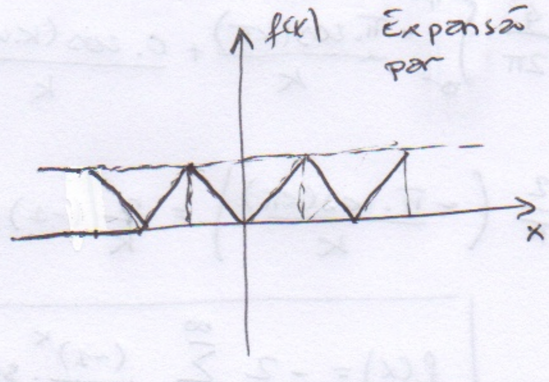
$$2\left\{\underbrace{\frac{\sin(K\pi)}{K\pi}}_{=0} + \frac{2.\cos(K\pi)}{K^2\pi^2} - \underbrace{\frac{2\sin(K\pi)}{K^3\pi^3}}_{=0}\right\} = \frac{4(-1)^K}{K^2\pi^2} \therefore$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4(-1)^K}{K^2\pi^2}.\cos(K\pi x)}$$

Exercício 10

Expansã par de $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, sendo $f(x) = x$





Como a expansã nos leva a uma função par, então precisamos somente calcular os coeficientes a_0 e a_K. Logo:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\pi} x.dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_K = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} x.\cos(K\omega x)dx = \frac{4}{2\pi}\left\{\left[\frac{x.\sin(K\omega x)}{K\omega}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(K\omega x)}{K\omega}dx\right\} \Rightarrow$$

$$a_K = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.\sin(K.2\pi)}{K} - \frac{0.\sin(K.\omega.0)}{K}\right] + \left[\frac{\cos(K\omega x)}{(K\omega)^2}\right]_0^{\pi} \Rightarrow\right.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(k.1.0)}{k^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - 1\right) \therefore$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{para } k \text{ par} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{para } k \text{ ímpar} \end{cases} \therefore \quad a_k = \frac{-4}{(2k-1)^2\pi}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi} \cdot \cos((2k-1)x)}$$

Exercício 11

Como a expansão ímpar nos leva à função ímpar, então precisamos calcular somente os coeficientes b_k. Logo,

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\pi} x.\sin(kwx)\,dx = \frac{4}{2\pi}\left\{\left[\frac{-x.\cos(kwx)}{(kw)}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(kwx)}{(kw)}dx\right\} = ?$$

$$b_k = \frac{4}{2\pi}\left\{\left[\frac{-\pi.\cos(k\pi)}{k} + \frac{0.\cos(k.w.0)}{k}\right] + \left[\frac{\sin(kwx)}{(kw)^2}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi.\cos(k\pi)}{k}\right) = \frac{2}{k}(-1)(-1)^k = \frac{-2(-1)^k}{k} \therefore$$

$$\boxed{f(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}.\sin(kx)}$$

Exercício 12

a) $\ddot{y} + 2y = \begin{cases} -x, & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, $T = 2\pi \therefore w = 1$

Desenvolvendo a função $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ em série de Fourier na forma complexa, temos:

$c_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x).e^{-ikwx}\,dx$ pois $f(x)$ é par. Assim, $c_k = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x.e^{-ikwx}\,dx$

$$c_K = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x.e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x.e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)}\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x.e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$c_K = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.e^{-ik\pi}}{(-ik)}\right] - \left[\frac{e^{-ik\pi}}{(-ik\omega)^2} - \frac{1}{(-ik\omega)^2}\right]\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi.(-1)^k}{(-ik)} - \frac{(-1)^k}{(ik\omega)^2} + \frac{1}{(-ik\omega)^2}\right]\right\}$$

$$c_K = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^k.\pi}{(-ik)} + \frac{(-1)^k}{K^2} - \frac{1}{k^2}\right\}$$. Vejam que esta expressão não é válida para $K=0$

Seja $v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_K.e^{ik\omega x}$ o desenvolvimento da solução particular da equação não-homogênea em série de Fourier. Derivando-se $v(x)$ em relação a x, temos:

$$\dot{v}(x) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} d_k(ik\omega)e^{ik\omega x} \qquad \ddot{v}(x) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} d_k(ik\omega)^2 e^{ik\omega x}$$

Substituindo na E.D.O.:

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} d_k(ik\omega)^2 e^{ik\omega x} + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_K.e^{ik\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_K.e^{ik\omega x}$$

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} d_K.e^{ik\omega x}\left[(ik\omega)^2+2\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_K.e^{ik\omega x}$$

Para que as séries do 1º e do 2º membro sejam iguais, é necessário que os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais, ou seja,

$$\left[(ik\omega)^2+2\right]d_K = c_K \Rightarrow$$

$$d_K = \frac{c_K}{\left[(ik\omega)^2+2\right]}$$

Como para $K=0$ não podemos calcular c_0 usando a expressão encontrada para c_K, então:

$$c_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x.dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, a solução particular $v(x)$ será dada por:

$$\boxed{v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . e^{ik\omega x} = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2-k^2)\pi} \cdot \left\{ \frac{(-1)^k \pi}{(-ik)} + \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} \right\} . e^{ikx}}$$

para $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

b) $\ddot{y} - y = e^x$, se $-\pi < x < \pi$, $T = 2\pi$, $\omega = 1$

Desenvolvendo a função $f(x) = e^x$ em série de Fourier na forma complexa, temos:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) . e^{-ik\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x . e^{-ik\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-ik\omega)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-ik\omega)x}}{(1-ik\omega)} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-ik)\pi}}{(1-ik)} - \frac{e^{(1-ik)(-\pi)}}{(1-ik)} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{\pi} . \overbrace{e^{-ik\pi}}^{(-1)^k}}{(1-ik)} - \frac{e^{-\pi} . \overbrace{e^{ik\pi}}^{(-1)^k}}{(1-ik)} \right] = \frac{(-1)^k}{2\pi(1-ik)} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)} \cdot \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)} \sinh(\pi)$$. Essa expressão é válida também para $k=0$.

Seja $v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . e^{ik\omega x}$ o desenvolvimento da solução particular da equação não-homogênea em série de Fourier. Derivando-se $v(x)$ em relação a x, temos:

$$\dot{v}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . (ik\omega) . e^{ik\omega x} \qquad \ddot{v}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . (ik\omega)^2 e^{ik\omega x}$$

Substituindo na E.D.O.:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k (ik\omega)^2 e^{ik\omega x} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{ik\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k . e^{ik\omega x}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . e^{ik\omega x} \left[(ik\omega)^2 - 1 \right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k . e^{ik\omega x}$$

Para que as séries do primeiro e do segundo membro sejam iguais, é necessário que os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais, ou seja,

$$d_k \left[(ik\omega)^2 - 1 \right] = c_k \quad \therefore$$

$$d_k = \frac{c_k}{[(ik\omega)^2 - 1]}$$

Assim, a solução particular $v(x)$ será dada por:

$$v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k . e^{ik\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k . e^{ik\omega x}}{[(ik\omega)^2 - 1]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)} \frac{\sinh(\pi). e^{ikx}}{[(ik)^2 - 1]} \Rightarrow$$

$$\boxed{v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} - \frac{(-1)^k}{\pi(1-ik)} . \frac{\sinh(\pi). e^{ikx}}{(k^2+1)}}$$

c) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = |\sin x|$, se $-\pi < x < \pi$

Desenvolvendo a função $f(x) = |\sin x|$ em série de Fourier na forma complexa, temos:

$$c_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x). e^{-ik\omega x} dx$$ já que $f(x)$ é uma função par. Assim,

$$c_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(x). e^{-ik\omega x} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x). e^{-ik\omega x} dx = \frac{1}{\pi}\left\{ \left[\frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \left[\frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \left\{ \left[\frac{\cos(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(-\sin(x)). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2} dx \right\} \right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{ \left[\frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\cos(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{k^2\omega^2} dx \right\} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x). e^{-ik\omega x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{k^2\omega^2} dx = \frac{1}{\pi}\left\{ \left[\frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\cos(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2} \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin(x). e^{-ik\omega x} dx \left(1 + \frac{1}{k^2\omega^2}\right) \right] = \frac{1}{\pi}\left\{ \left[\frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\cos(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2} \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x). e^{-ik\omega x} dx = \frac{k^2\omega^2}{\pi(1+k^2\omega^2)} \left\{ \left[\frac{\sin(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{\cos(x). e^{-ik\omega x}}{(-ik\omega)^2} \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x). e^{-ik\omega x} dx = \frac{k^2}{\pi(1+k^2)} \left\{ \left[\frac{\overset{=0}{\sin(\pi)}. e^{-ik\omega\pi}}{(-ik)} - \frac{\overset{=0}{\sin(0)}. e^{-ik\omega\pi}}{(-ik)} \right] - \left[\frac{\cos(\pi). e^{-ik\pi}}{(-ik)^2} - \frac{\cos(0). e^{-ik0}}{(-ik)^2} \right] \right.$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x).e^{-ik\omega x}\,dx = \frac{k^2}{\pi(1+k^2)} \cdot \left\{-\left[\frac{(-1).(-1)^k}{(-1).k^2} - \frac{(1).(1)}{(-1).k^2}\right]\right\} = \frac{\cancel{k^2}}{\pi(1+k^2)} \cdot \frac{1}{\cancel{k^2}}\left[-(-1)^k - 1\right]$$

$$c_k = -\frac{1}{\pi(k^2+1)}\left[(-1)^k + 1\right] \quad \therefore \quad c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ for ímpar} \\ -\dfrac{2}{\pi(k^2+1)} & \text{se } k \text{ for par} \end{cases}$$

$$c_k = -\frac{2}{\pi((2k)^2+1)} = -\frac{2}{\pi(4k^2+1)}$$

. Assim, a solução particular $v(x)$ será dada por:

$$\boxed{v(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k.e^{ik\omega x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k.e^{2ikx}}{[-4k^2+4ik+1]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{-2.e^{2ikx}}{\pi(4k^2+1)(-4k^2+4ik+1)}}$$