

CAPÍTULO 5

MODELOS ARIMA

INTRODUÇÃO

Metodologia bastante utilizada em análise de modelos paramétricos → abordagem de Box e Jenkins(1970).

Basicamente, esta metodologia ajusta modelos autorregressivos integrados de médias móveis, ARIMA (p,d,q), a um conjunto de dados.

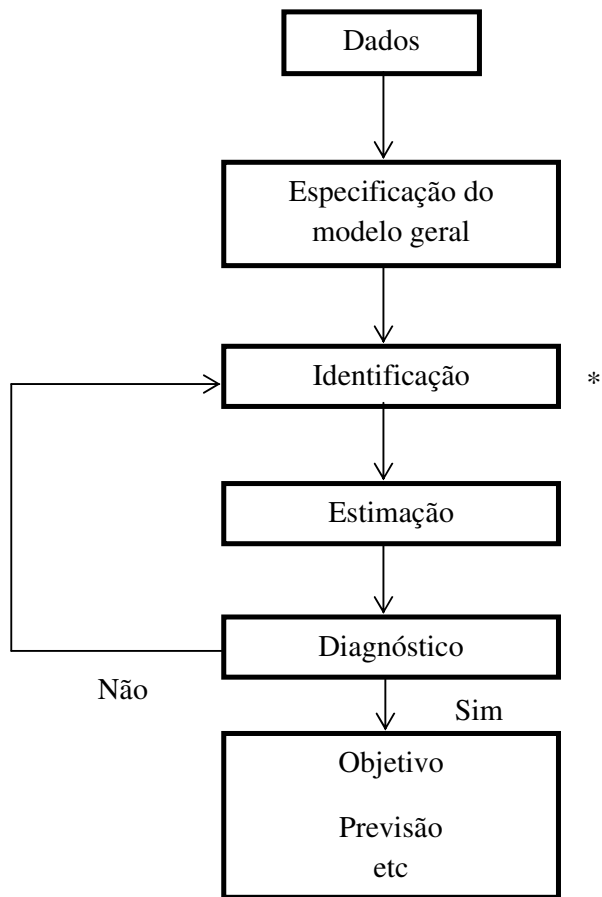
A construção dos modelos ARIMA (p,d,q) baseia-se em um ciclo iterativo no qual a escolha da estrutura do modelo é baseada nos próprios dados.

Essa construção é dependente da experiência do estatístico

Os estágios do ciclo iterativo são:

- i. Especificação de uma classe geral de modelos;
- ii. Identificação de um modelo, com base na análise de autocorrelações, autocorrelações parciais e outros critérios;
- iii. Estimação do modelo, na qual os parâmetros do modelo identificado são estimados;
- iv. Por último, diagnóstico do modelo ajustado, por meio da análise de resíduo;

Se o modelo não for adequado volta-se a fase de identificação;



* Fase crítica da construção do modelo. Diferentes pesquisadores podem identificar diferentes modelos para a mesma série temporal;

Princípio da parcimônia: pequeno número de parâmetros e precisão nas previsões.

Desvantagem da metodologia de Box e Jenkins: experiência do analista e algum conhecimento além do uso automático de um pacote computacional.

Programas computacionais específicos: R; SPLUS; MINITAB; SCA; IISM; EVIEWS;

Notação dos operadores;

i) Operador de translação para o passado

$$BZ_t = Z_{t-1}$$

$$B^n Z_t = Z_{t-n}$$

ii) Operador translação para o futuro

$$FZ_t = Z_{t+1}$$

$$F^n Z_t = Z_{t+n}$$

iii) Operador de diferença

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t$$

$$\Delta = 1 - B$$

iv) Operador soma

$$SZ_t = \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j} = Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + \dots = (1 + B + B^2 + \dots)Z_t = \frac{1}{1 - B}Z_t$$

$$= (1 - B)^{-1}Z_t = \Delta^{-1}Z_t$$

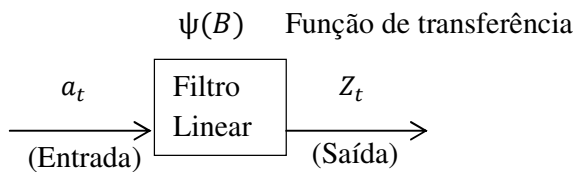
Ou seja:

$$S = \Delta^{-1}$$

MODELOS LINEARES ESTACIONÁRIOS

Processo Linear Geral

Veremos modelos que são casos particulares de um modelo de filtro linear:



Formalmente:

$$\begin{aligned}
Z_t &= \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \\
&= \mu + \psi(B)a_t = \mu + a_t(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)
\end{aligned}$$

em que $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ chamada função de transferência do filtro

e μ é um parâmetro que determina o nível de série.

Lembrando que $a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$, tal que:

$$E(a_t) = 0, \forall t$$

$$Var(a_t) = \sigma_a^2, \forall t$$

$$E(a_t a_s) = 0, s \neq t$$

Chamando $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, então:

$$\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t$$

Se a sequência de pesos $(\psi_j, j \geq 1)$ for finita ou infinita convergente, o filtro é estável (somável) e Z_t é estacionária. Neste caso, μ é a média do processo; c.c.

Z_t é não estacionária e μ não tem significado específico;

$$E(Z_t) = \mu + E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E(a_{t-j})$$

Se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j$ convergir ($\sum \psi_j < \infty$), então:

$$\begin{cases} E(\tilde{Z}_t) = 0 \\ E(Z_t) = \mu \end{cases}$$

$$Var(\tilde{Z}_t) = Var\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 Var(a_{t-j})$$

Se $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ convergir ($\sum \psi_j^2 < \infty$), então: $Var(\tilde{Z}_t) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$

$$Cov(\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_{t-k}) = E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-k}) = \gamma_k = E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j-k}\right)\right] = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

Exemplo: para $k = 1$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} (\psi_j a_{t-j})(\psi_j a_{t-j-1})\right] = E(\psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \\ &\dots)(\psi_0 a_{t-1} + \psi_1 a_{t-2} + \psi_2 a_{t-3} + \dots) = \\ &E(\psi_0^2 a_t a_{t-1} + \psi_0 \psi_1 a_t a_{t-2} + \psi_0 \psi_2 a_t a_{t-3} + \psi_0 \psi_1 a_{t-1}^2 + \psi_1^2 a_{t-1} a_{t-2} + \\ &\psi_1 \psi_2 a_{t-1} a_{t-3} + \psi_0 \psi_2 a_{t-1} a_{t-2} + \psi_1 \psi_2 a_{t-2}^2 + \psi_2^2 a_{t-2} a_{t-3} + \dots) = \\ &E(\psi_0 \psi_1 a_{t-1}^2 + \psi_1 \psi_2 a_{t-2}^2 + \dots) = \psi_0 \psi_1 \sigma_a^2 + \psi_1 \psi_2 \sigma_a^2 + \dots = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \end{aligned}$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j-2}\right)\right] \\ &= E(\psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots)(\psi_0 a_{t-2} + \psi_1 a_{t-3} + \psi_2 a_{t-4} \\ &+ \dots) = E(\dots \psi_2 \psi_0 a_{t-2}^2 + \psi_1 \psi_2 a_{t-2} a_{t-3} + \psi_2^2 a_{t-2} a_{t-4} + \dots) \\ &= \psi_0 \psi_2 \sigma_a^2 + \psi_1 \psi_3 \sigma_a^2 + \dots = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \end{aligned}$$

Para $\psi_0 = 1$. Em particular, para $j = 0$, obteremos a variância de Z_t ;

Condição de existência: $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$

Temos então que a média e a variância de Z_t são constantes e a covariância só depende de j , logo Z_t é estacionária.

Podemos escrever $\tilde{Z}_t$ da forma alternativa: como uma soma ponderada de valores passados.

$$\tilde{Z}_t = \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \pi_3 \tilde{Z}_{t-3} + \dots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{Z}_{t-j} + a_t$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= (\pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \dots) \tilde{Z}_t + a_t \\
a_t &= \tilde{Z}_t - (\pi_1 B + \pi_2 B^2 + \pi_3 B^3 + \dots) \tilde{Z}_t \\
&= (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots) \tilde{Z}_t \\
&= (1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j) \tilde{Z}_t \\
&= \pi(B) \tilde{Z}_t
\end{aligned}$$

Onde $\pi(B)$ é o operador:

$$\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots$$

Lembrando que $\tilde{Z}_t = \psi(B)a_t$, então:

$$a_t = \pi(B)\tilde{Z}_t, \text{ mas } \tilde{Z}_t = \psi(B)a_t, \text{ então:}$$

$$a_t = \pi(B)\psi(B)a_t, \text{ de modo que:}$$

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B).$$

Essa relação pode ser usada para obter os pesos π_j em função de ψ_j , e vice-versa.

CONDIÇÕES DE ESTACIONARIEDADE E INVERTIBILIDADE

Vamos exemplificar antes de postular as condições.

Ex1: Considere o processo $Z_t = \mu + \psi(B)a_t$ onde $\psi_j = \phi^j, j = 1, 2, 3, \dots, \psi_0 = 1$ e

$$|\phi| < 1. \text{ Temos que: } \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j = \frac{1}{1-\phi}$$

Nesse contexto:

$$Z_t = \mu + a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 a_{t-3} + \dots$$

$$\bullet E(\tilde{Z}_t) = 0$$

- $Var(\tilde{Z}_t) = \sigma_a^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi^2} (= \gamma_0)$
- $\gamma_k = E[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-k}] = E[(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j})(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j-k})] =$
 $= E[(a_t + \phi a_{t-1} + \phi a_{t-2} + \dots)(a_{t-k} + \phi a_{t-1-k} + \phi^2 a_{t-2-k} \dots)]$

Para $k = 1$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots)(a_{t-1} + \phi a_{t-2} + \phi^2 a_{t-3} + \dots)] \\ &= \phi \sigma_a^2 + \phi^3 \sigma_a^2 + \phi^5 \sigma_a^2 + \dots = \sigma_a^2 \phi (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) \\ &= \sigma_a^2 \frac{\phi}{1 - \phi^2}\end{aligned}$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots)(a_{t-2} + \phi a_{t-3} + \phi^2 a_{t-4} + \dots)] \\ &= \phi^2 \sigma_a^2 + \phi^4 \sigma_a^2 + \phi^6 \sigma_a^2 + \dots = \sigma_a^2 \phi^2 (1 + \phi^2 + \phi^4 + \dots) \\ &= \sigma_a^2 \frac{\phi^2}{1 - \phi^2}\end{aligned}$$

Generalizando: $\gamma_k = \sigma_a^2 \frac{\phi^k}{1 - \phi^2}, k \geq 1$

Supondo, por exemplo, que $\phi = 1$ e $\mu = 0$, então:

$$Z_t = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \dots$$

e $\sum \psi_j$ não converge; o processo será não estacionário.

Como $Z_t = Z_{t-1} + a_t$, pois:

$$Z_t = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \dots = a_t(1 + B + B^2 + \dots) = a_t \frac{1}{1 - B}$$

Então:

$$a_t = Z_t - Z_{t-1}$$

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t$$

$$a_t = \Delta Z_t$$

Dizemos que Z_t é um passeio aleatório. Seu valor no instante t é uma “soma” de choques aleatórios. Por outro lado, a 1ª diferença é ruído branco;

$$\begin{cases} Z_t = Z_{t-1} + a_t \text{ é passeio aleatório} \\ \Delta Z_t = a_t \text{ é RB} \end{cases}$$

Como

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots = 1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi B)^j$$

Vemos que a série converge se $|B| \leq 1$, ou seja, o processo é estacionário se o operador $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$.

Ex2: Consideremos, agora, um caso particular Z_t .

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

Ou seja, $\psi_1 = -\theta$, $\psi_j = 0, j > 1$. Como $\sum \psi_j = 1 - \theta$ vemos que $\tilde{Z}_t$ define um processo estacionário, $\forall \theta$.

Vejamos como deve ser θ para que possamos escrever $\tilde{Z}_t$ em termos de seus valores passados:

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta B)a_t$$

$$a_t = (1 - \theta B)^{-1} \tilde{Z}_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) \tilde{Z}_t$$

Lembrando que: $\pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots$, $\pi_j = -\theta^j, j \geq 1$. Dessa forma:

$$\pi(B) = 1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j B^j = \sum_{j=0}^{\infty} (\theta B)^j$$

A sequência formada pelos pesos π_j será convergente se $|\theta| < 1$. Nesse caso dizemos que o processo é invertível.

Para o processo ser invertível, o operador $\pi(B)$ deve convergir para $|B| \leq 1$, e;

$$\tilde{Z}_t = -\theta\tilde{Z}_{t-1} - \theta^2\tilde{Z}_{t-2} + \dots + a_t,$$

Lembrando que $\tilde{Z}_t = (1 - \theta B)a_t$, e $a_t = (1 - \theta B)^{-1}\tilde{Z}_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots)\tilde{Z}_t$, e $\tilde{Z}_t = -\theta\tilde{Z}_{t-1} - \theta^2\tilde{Z}_{t-2} + \dots + a_t$

Proposição. Um processo linear será estacionário se a série $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$. Será invertível se $\pi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$.

CASOS PARTICULARES DO MODELO LINEAR GERAL

Modelos Autorregressivos

Se em $\tilde{Z}_t = \pi_1\tilde{Z}_{t-1} + \pi_2\tilde{Z}_{t-2} + \dots + \pi_p\tilde{Z}_{t-p} + \dots + a_t, \pi_j = 0, j > p$, obtemos um modelo autorregressivo de ordem p , que denotamos AR(p). Renomeando os pesos π_j para ϕ_j , então:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1\tilde{Z}_{t-1} + \phi_2\tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

(Combinação linear do passado da série até (t-p))

Se definirmos o operador autorregressivo estacionário de ordem p

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

Então:

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Ex: O caso mais simples é o modelo autorregressivo de ordem 1 [AR(1)]:

$$\tilde{Z}_t = \phi\tilde{Z}_{t-1} + a_t$$

$\tilde{Z}_t$ depende apenas de $\tilde{Z}_{t-1}$ e do ruído no instante t .

$$a_t = \tilde{Z}_t - \phi \tilde{Z}_{t-1} = (1 - \phi B) \tilde{Z}_t$$

Como $\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi B$, o processo é sempre invertível.

Substituindo sucessivamente $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, \dots$ obtemos:

$$\tilde{Z}_t = \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t \quad \dots \quad \tilde{Z}_{t-1} = \phi \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1} \quad \dots$$

Então, substituindo $\tilde{Z}_{t-1}$ em $\tilde{Z}_t$, temos:

$$\tilde{Z}_t = \phi(\phi \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1}) + a_t = \phi^2 \tilde{Z}_{t-2} + \phi a_{t-1} + a_t$$

Da mesma forma, substituindo $\tilde{Z}_{t-2}$, temos:

$$\tilde{Z}_t = \phi^3 \tilde{Z}_{t-3} + \phi^2 a_{t-2} + \phi a_{t-1} + a_t$$

.

.

.

$$\tilde{Z}_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j a_{t-j}$$

Ou seja, $\tilde{Z}_t = \psi(B) a_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots) a_t$. Vemos, assim que:

$$\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j B^j = (1 - \phi B)^{-1} = [\phi(B)]^{-1}$$

- O processo será estacionário se $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$. Segue-se

que devemos ter $|\phi| < 1$.

Se $|\phi| < 1 \rightarrow \left| \frac{1}{\phi} \right| > 1$ raiz do polinômio AR é, em módulo, maior do que 1.

Condições de estacionariedade:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j < \infty = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j < \infty \\ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} < \infty \end{cases}$$

$$\phi(B) = 1 - \phi B$$

Raíz de $\phi(B) = 0 \rightarrow 1 - \phi B = 0 \rightarrow B = \frac{1}{\phi} = \phi^{-1}$, ou seja, a raiz de $\phi(B) = 0$

deve cair “fora” do círculo unitário para que o processo seja estacionário.

Vejamos as principais características de um processo representado pelo modelo $AR(p)$.

Estacionariedade e Invertibilidade

Como $\pi(B) = \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ é finito, não há restrições sobre os parâmetros para assegurar a invertibilidade de $\tilde{Z}_t$.

Nota. Em um modelo $AR(p)$, $\tilde{Z}_t$ é sempre invertível.

Sejam $G^{-1}_i, i = 1, 2, \dots, p$, as raízes da equação característica $\phi(B) = 0$; então:

$$\phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_p B)$$

Expandindo em funções parciais;

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B) = \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{1 - G_i B}$$

Se $\psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$ devemos ter que $|G_i| < 1, i = 1, 2, \dots, p$.

Invertível $\rightarrow a_t = \phi(B)\tilde{Z}_t \quad (|\phi| < 1)$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \text{ é finito.}$$

Estacionária $\rightarrow \tilde{Z}_t = \psi(B)a_t$

$$\psi(B) = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \dots)a_t$$

$$[\psi(B) = \sum_j \phi^j B^j = [\phi(B)]^{-1}]$$

$$\sum_i \frac{A_i}{1-G_i B} \rightarrow |G_i| < 1 \rightarrow \left| \frac{1}{G_i} \right| > 1 \rightarrow \text{fora do círculo unitário}$$

Função de autocorrelação

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

Multiplicando ambos os membros por $\tilde{Z}_{t-j}$ e tomando-se a esperança temos:

$$E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = \phi_1 E(\tilde{Z}_{t-1} \tilde{Z}_{t-j}) + \phi_2 E(\tilde{Z}_{t-2} \tilde{Z}_{t-j}) + \dots + \phi_p E(\tilde{Z}_{t-p} \tilde{Z}_{t-j}) + E(a_t \tilde{Z}_{t-j})$$

Como $E(\tilde{Z}_t) = 0$ e $E(\tilde{Z}_{t-j}) = 0$, segue que:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p}, j > 0$$

Dividindo-se tudo por $\gamma_0 = \text{Var}(Z_t)$, obtemos:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}, j > 0 \text{ ou } \phi(B)\rho_j = 0$$

Para $j = 0$, $E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j})$ será igual a:

$$\text{Var}(\tilde{Z}_t) = \text{Var}(Z_t) = \gamma_0 = \phi_1 \gamma_{-1} + \phi_2 \gamma_{-2} + \dots + \phi_p \gamma_{-p} + \sigma_a^2$$

Como $\gamma_{-j} = \gamma_j$, então:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2$$

Dividindo ambos os lados por γ_0 , então:

$$1 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_p + \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0}$$

Ou seja, $[Var(Z_t) = \gamma_0 = \sigma_z^2]$:

$$1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \dots - \phi_p\rho_p = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_z^2}$$

$$Var(Z_t) = \gamma_0 = \sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \dots - \phi_p\rho_p}$$

Fazendo $j = 1, 2, \dots, p$ na equação $\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \dots + \phi_p\rho_{j-p}$, obtemos as equações de Yule-Walker(YW):

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \dots + \phi_p\rho_{p-1}$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p\rho_{p-2}$$

.

.

.

$$\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2} + \dots + \phi_p\rho_{p-j}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

Lembrando que:

$$\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2} + \dots + \phi_p\rho_{j-p}$$

É uma equação de diferenças homogêneas. Portanto, sua solução satisfaz a propriedade:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_j = 0 \text{ (Decréscimo geométrico)}$$

Se o processo for estacionário, então o decaimento de ρ_j deve ser geométrico (Rápido).

Ex: $AR(1)$

$$\tilde{Z}_t = \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t$$

$$E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = E[(\phi \tilde{Z}_{t-1} \tilde{Z}_{t-j})] + E[a_t \tilde{Z}_{t-j}]$$

$$\gamma_j = \phi \gamma_{j-1} (\div \gamma_0)$$

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0}$$

$$\rho_j = \phi \rho_{j-1}$$

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} \rightarrow \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 = \phi \rho_0 = \phi$$

$$\rho_2 = \phi \rho_1 = \phi^2$$

$$\rho_3 = \phi \rho_2 = \phi^3$$

.

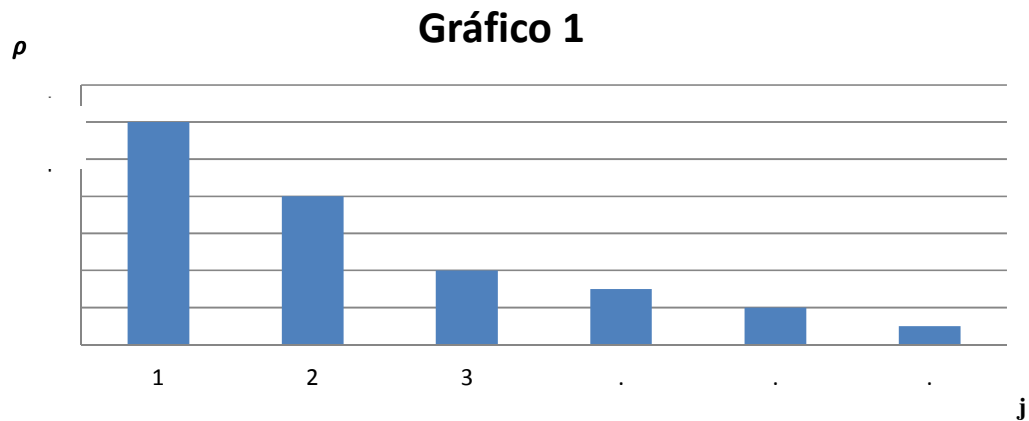
.

.

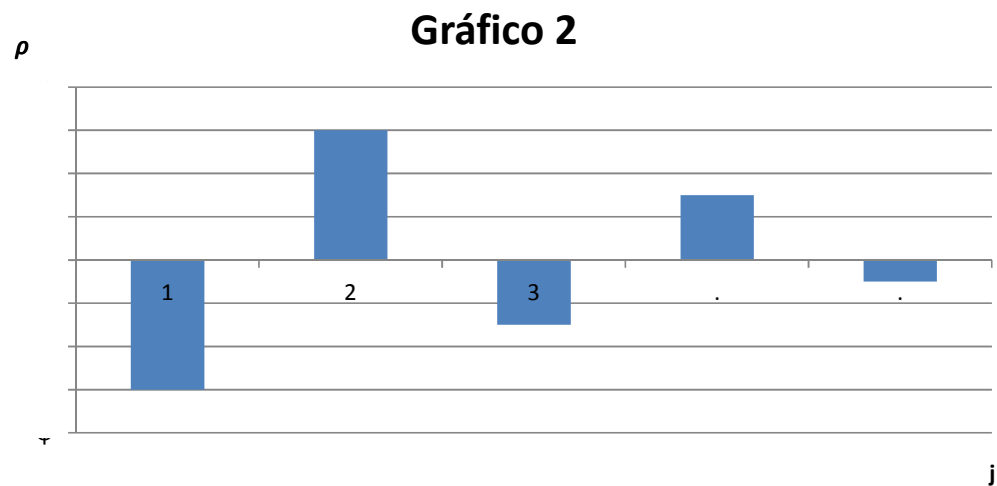
$$\rho_j = \phi \rho_{j-1} = \phi^j$$

$$\rho_j = \phi^j$$

Se $\phi > 0$



Se $\phi < 0$



Veremos adiante como verificar se as autocorrelações são significativamente diferentes de zero; $H_0 = \rho_j = 0$ (baseado nas fac amostrais r_j).

Lembrando que para processos estacionários $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, onde μ é a média do processo. Assim, em um processo $AR(1)$, podemos escrever:

$$Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + a_t$$

Muitas vezes o modelo pode apresentar uma constante que não é a média.

Ex: $AR(1)$.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t + \theta_0, |\phi| < 1$$

Tomando a esperança em ambos os lados:

$$E(Z_t) = \phi E(Z_{t-1}) + E(a_t) + \theta_0$$

Como o processo é estacionário, $E(Z_t) - E(Z_{t-1}) = \mu$, logo:

$$\mu = \phi\mu + \theta_0$$

$$\mu(1 - \phi) = \theta_0$$

$$\mu = \frac{\theta_0}{1 - \phi}$$

Se $\theta_0 = 0$, então $\mu = 0$.

Em geral, um processo $AR(p)$ pode ser escrito como:

$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(Z_{t-p} - \mu) + a_t$$

Ou ainda:

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

Assim:

$$\mu = \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

Ex. Considere agora o processo $AR(2)$:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

Escrito de outra forma:

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Onde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t (\times \tilde{Z}_{t-j})$$

Cálculo de γ_j :

$$E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = \phi_1 E(\tilde{Z}_{t-1} \tilde{Z}_{t-j}) - \phi_2 E(\tilde{Z}_{t-2} \tilde{Z}_{t-j}) + E(a_t \tilde{Z}_{t-j})$$

Como $E(\tilde{Z}_t) = E(\tilde{Z}_{t-j}) = 0$, então:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} (\div \gamma_0)$$

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \phi_1 \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \phi_2 \frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0}$$

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}, j > 0$$

Ou:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} - \phi_2 \rho_{j-2} = 0$$

$$\rho_j = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$$

$$\rho_j = \phi(B) = 0, \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

Para $j = 0$, $E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j})$ será igual a:

$$\gamma_0 = Var(\tilde{Z}_t) = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_a^2 (\div \gamma_0)$$

$$1 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0}$$

$$1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 = \frac{\sigma_a^2}{\gamma_0}$$

$$\gamma_0 = Var(Z_t) = \sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2}$$

As expansões de YW serão iguais a:

$$\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2}$$

Para $j = 1$ e 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \rightarrow \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rightarrow \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \\ \rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} \end{array} \right.$$

As condições de estacionariedade para um processo $AR(2)$ são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{array} \right.$$

Lembrando que para ser estacionário, as raízes de $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ devem estar fora do círculo unitário.

Por exemplo, o processo $(1 - 1,5B + 0,56B^2)\tilde{Z}_t = a_t$ é sempre estacionário, pois $(1 - 1,5B + 0,56B^2) = (1 - 0,7B)(1 - 0,8B) = 0$, resulta em $B = \frac{1}{0,7}$ e $B = \frac{1}{0,8}$, que são maiores do que 1, em módulo.

$$1 - 1,5B + 0,56B^2 = 0$$

$$0,56B^2 - 1,5B + 1 = 0$$

$$B = \frac{1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2,24}}{1,12}$$

$$B = \frac{1,5 \pm 0,1}{1,12} \left\{ \begin{array}{l} 1,42857 \rightarrow \frac{1}{1,42857} = 0,7 \\ 1,25 \rightarrow \frac{1}{1,25} = 0,8 \end{array} \right.$$

A condição de estacionariedade também pode ser expressa em termos de ϕ_1 e

ϕ_2 .

Seja B_1 e B_2 as raízes de $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$, ou, equivalentemente:

$$\phi_2 B^2 + \phi_1 B - 1 = 0$$

$$B = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$$

$$\begin{cases} B_1 = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \\ B_2 = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2} \end{cases}$$

De outra forma:

$$\phi_2 B^2 + \phi_1 B - 1 = 0 \quad (\div B^2)$$

$$\phi_2 + \frac{\phi_1}{B} - \frac{1}{B^2} = 0$$

→ Fazendo $\frac{1}{B} = b$

$$\phi_2 + \phi_1 b - b^2 = 0$$

que é igual a: $-b^2 + \phi_1 b + \phi_2 = 0$

$$b = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{B_1} = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \\ b_2 = \frac{1}{B_2} = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \end{cases}$$

A condição requerida $|B_i| > 1$ implica que $\left|\frac{1}{B_i}\right| < 1$, para $i = 1$ e 2 .

Consequentemente:

$$\left|\frac{1}{B_1} \cdot \frac{1}{B_2}\right| = |\phi_2| < 1$$

e

$$\left| \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right| = |\phi_1| < 2$$

Dessa forma, temos a seguinte condição necessária para a estacionariedade,

sem considerar se suas raízes são $\Re$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} -1 < \phi_2 < 1 \\ -2 < \phi_1 < 2 \end{cases}$$

Para as raízes reais: $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$, que implica:

$$-1 < \frac{1}{B_2} = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1 + 4\phi_2}}{2} \leq \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1 + 4\phi_2}}{2} = \frac{1}{B_1} < 1$$

Ou, equivalentemente:

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \end{cases}$$

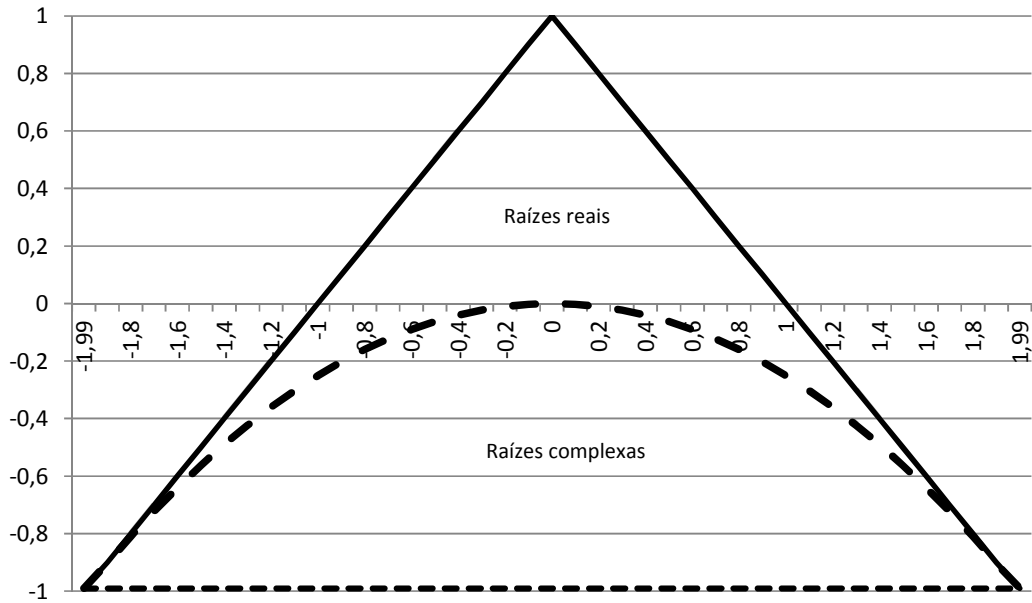
Para as raízes complexas: $\phi_2 < 0$ e $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$

$$\begin{cases} \phi_2 < 0 \\ \phi_2 < \frac{-\phi_1^2}{4} \end{cases}$$

$$|\phi_1| < 2$$

$$|\phi_2| < 1$$

Região Estacionária AR(2) - Raízes R e C



MODELOS DE MÉDIAS MÓVEIS

Considere o processo linear:

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \mu + \psi(B)a_t$$

e suponha que $\psi_j = 0, j > q$; Obtemos, assim, um processo de médias móveis de ordem q denotado por $MA(q)$.

Usaremos a seguinte notação daqui em diante:

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Sendo $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, então:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t \\ &= \theta(B) a_t \end{aligned}$$

Onde $\theta(B)$ é o operador de médias móveis de ordem q ; $\sum_{j=0}^q \theta_j < \infty$ e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty.$$

Vamos a um exemplo: $MA(1)$:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

Ou:

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta B)a_t = \theta(B) - a_t$$

Como $1 - \theta B (= \psi(B))$ é finito, o processo é sempre estacionário. Além disso:

$$a_t = [\theta(B)]^{-1} \tilde{Z}_t = \frac{1}{1 - \theta(B)} \tilde{Z}_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) \tilde{Z}_t$$

Obtemos a forma invertível:

$$\tilde{Z}_t = -\theta \tilde{Z}_{t-1} - \theta^2 \tilde{Z}_{t-2} - \dots + a_t$$

Se $|\theta| < 1$. Ou seja, a série $[\theta(B)]^{-1}$ converge para $|B| \leq 1$. Isso equivale a

dizer que os zeros de $\theta(B) = 1 - \theta B = 0$ estão fora do círculo unitário.

Estacionariedade e Invertibilidade

Dado que $\psi(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$ é finito não há restrições sobre

os parâmetros para que o processo seja estacionário.

Invertibilidade

Exemplificando com um processo $MA(1)$:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B)a_t$$

$$(1 - \theta_1 B)^{-1} \tilde{Z}_t = a_t$$

$$\frac{1}{1 - \theta_1 B} \tilde{Z}_t = a_t$$

$$(1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \theta_1^3 B^3 + \dots) \tilde{Z}_t = a_t$$

Dizemos que um processo qualquer é invertível se a sua representação autorregressiva tem coeficientes absolutamente somáveis. No caso de um $MA(1)$, isso ocorre se $|\theta_1| < 1$.

um processo $AR(p)$ é sempre invertível:

$$\sum |\theta^j| < \infty \Leftrightarrow |\theta| < 1$$

Neste caso, temos:

$$1 - \theta_1 B = 0$$

$$B = \frac{1}{\theta_1}$$

$$|\theta_1| < 1 \Leftrightarrow |B| > 1$$

A raiz do polinômio de médias móveis seja, em módulo, maior que 1 (fora do círculo unitário).

Similarmente, ao caso da estacionariedade no processo $AR(p)$, pode-se verificar que a condição de invertibilidade para um modelo $MA(q)$ é que as raízes da equação característica $\theta(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário.

Um modelo $MA(q)$ é equivalente a um modelo $AR(\infty)$.

Função de autocorrelação

$$MA(1): \tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, a_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$$

Cálculo da esperança:

$$E(\tilde{Z}_t) = 0$$

Cálculo da variância:

$$Var(\tilde{Z}_t) = \sigma_a^2 + \theta^2_1 \sigma_a^2 = \sigma_a^2(1 + \theta^2_1)$$

Cálculo da facv e fac:

$$\gamma_j = E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = E(a_t \tilde{Z}_{t-j}) - \theta_1 E(a_{t-1} \tilde{Z}_{t-j})$$

para $j = 1$

$$\gamma_1 = -\theta_1 \sigma_a^2$$

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1 \sigma_a^2}{\sigma_a^2(1 + \theta^2_1)} = -\frac{\theta_1}{1 + \theta^2_1}$$

para $j = 2$

$$\gamma_2 = 0 \rightarrow \rho_2 = 0$$

Deste modo, $\gamma_j = 0, j \geq 2 \rightarrow \rho_j = 0, j \geq 2$

➔ Para um processo $MA(1), \rho_j = 0, j \geq 2$.

$$MA(2): \tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Cálculo da esperança:

$$E(\tilde{Z}_t) = 0$$

Cálculo da variância:

$$Var(\tilde{Z}_t) = \sigma_a^2 + \theta^2_1 \sigma_a^2 + \theta^2_2 \sigma_a^2 = \sigma_a^2(1 + \theta^2_1 + \theta^2_2)$$

Cálculo da facv e fac:

$$\gamma_j = E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = E(a_t \tilde{Z}_{t-j}) - \theta_1 E(a_{t-1} \tilde{Z}_{t-j}) - \theta_2 E(a_{t-2} \tilde{Z}_{t-j})$$

para $j = 1$

$$\gamma_1 = -\theta_1 \sigma_a^2 + \theta_2 \theta_1 \sigma_a^2 = \sigma_a^2(\theta_1 \theta_2 - \theta_1)$$

$$\rho_1 = \frac{\sigma_a^2(\theta_1\theta_2 - \theta_1)}{\sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)} = \frac{\theta_1\theta_2 - \theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

para $j = 2$

$$\gamma_2 = -\theta_2\sigma_a^2$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2\sigma_a^2}{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_a^2} = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

para $j = 3$

$$\gamma_j = 0$$

De forma geral, $\rho_j = 0, j \geq 3$

$$MA(2) \begin{cases} \rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ \rho_j = 0, j \geq 3 \end{cases}$$

$$MA(q) \begin{cases} \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q \neq 0 \\ \rho_j = 0, j > q \end{cases}$$

$MA(2) \rightarrow$ Invertibilidade:

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t$$

$$\theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Forma invertida:

$$\tilde{Z}_t - \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} - \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} - \dots = a_t$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)\tilde{Z}_t = a_t$$

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B) \Leftrightarrow \pi(B)\theta(B) = 1$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 1$$

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \pi_1 B + \pi_1 \theta_1 B^2 + \pi_1 \theta_2 B^3 - \pi_2 B^2 + \pi_2 \theta_1 B^3 - \dots = 1$$

$$1 - \theta_1 B - \pi_1 B - \theta_2 B^2 + \pi_1 \theta_1 B^2 - \pi_2 B^2 + \pi_1 \theta_2 B^2 + \pi_2 \theta_1 B^3 - \dots = 1$$

$$1 - (\theta_1 + \pi_1)B - (\theta_2 - \pi_1 \theta_1 + \pi_2)B^2 + (\pi_1 \theta_2 + \pi_2 \theta_1 - \pi_3)B^3 - \dots = 1$$

Coeficientes em B:

$$-(\theta_1 + \pi_1) = 0 \rightarrow \pi_1 = -\theta_1$$

Coeficientes em B²:

$$-(\theta_2 - \pi_1\theta_1 + \pi_2) = 0 \rightarrow \pi_2 = \pi_1\theta_1 - \theta_2 \rightarrow \pi_2 = -\theta_1^2 - \theta_2$$

Coeficientes em B³:

$$-\pi_3 + \pi_1\theta_2 + \pi_2\theta_1 = 0 \rightarrow \pi_3 = \pi_1\theta_2 + \pi_2\theta_1$$

Para $j \geq 3, \pi_j = \theta_1\pi_{j-1} + \theta_2\pi_{j-2}$

$\sum_j |\pi_j| < \infty \Leftrightarrow$ as raízes de $1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$ forem, em módulo, maiores que

1. Invertibilidade garante estacionariedade no momento de estimar os parâmetros.

De forma geral, para um processo $MA(q)$, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \\ &= a_t - \sum_{k=1}^q \theta_k a_{t-k} \\ \tilde{Z}_{t-j} &= a_{t-j} - \theta_1 a_{t-j-1} - \theta_2 a_{t-j-2} - \cdots - \theta_q a_{t-j-q} \\ &= a_{t-j} - \sum_{l=1}^q \theta_l a_{t-j-l}\end{aligned}$$

Cálculo da facv e fac:

$$\begin{aligned}\gamma_j &= E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = E\left\{ \left[a_t - \sum_{k=1}^q \theta_k a_{t-k} \right] \left[a_{t-j} - \sum_{l=1}^q \theta_l a_{t-j-l} \right] \right\} = \\ &= E(a_t a_{t-j}) - \sum_{l=1}^q \theta_l E(a_t a_{t-j-l}) - \sum_{k=1}^q \theta_k E(a_{t-j} a_{t-k}) + \sum_k \sum_l \theta_k \theta_l E(a_{t-k} a_{t-j-l})\end{aligned}$$

Lembrando que:

$$\gamma_a(j) = E(a_t a_{t-j}) = \begin{cases} \sigma_a^2, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_a^2 + \theta^2_1 \sigma_a^2 + \theta^2_2 \sigma_a^2 + \dots + \theta_q \sigma_a^2 \\ &= \sigma_a^2 (1 + \theta^2_1 + \theta^2_2 + \dots + \theta^2_q) \end{aligned}$$

$$\gamma_j = \gamma_a(j) - \sum_{l=1}^q \theta_l \gamma_a(j+l) - \sum_{k=1}^q \theta_k \gamma_a(k-j) + \sum_k \sum_l \theta_k \theta_l \gamma_a(j+l-k)$$

Do que resulta:

$$\gamma_j = \begin{cases} (-\theta_j + \sum_{l=1}^{q-j} \theta_l \theta_{j-l}) \sigma_a^2, & j = 0, \theta_0 = 1 \\ (-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \theta_2 \theta_{j+2} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q) \sigma_a^2, & j = 1, 2, \dots, q \\ 0, & j > q \end{cases}$$

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \theta_2 \theta_{j+2} + \dots + \theta_{q-j} \theta_q}{1 + \theta^2_1 + \theta^2_2 + \dots + \theta^2_q} \\ 0, \quad j > q \end{cases}$$

MA(2)

$$\left\{ \begin{matrix} q = 2 \\ j = 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Subscrito } q - j = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta^2_1 + \theta^2_2} \left\{ \begin{matrix} q = 2 \\ j = 1 \end{matrix} \right. \\ \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta^2_1 + \theta^2_2} \left\{ \begin{matrix} q = 2 \\ j = 2 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Note que a fac de um processo $MA(q)$ é igual a zero para “lags” maiores do

que q , ao contrário do que acontece com um processo AR .

MODELOS AUTORREGRESSIVOS E DE MÉDIAS MÓVEIS

Na prática → Modelos com baixo número de parâmetros → opção: Inclusão de termos autorregressivos e de médias móveis.

$$ARMA(p, q)$$

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Na notação compacta, temos:

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = \theta(B)a_t$$

$$\begin{cases} \phi(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \rightarrow \text{operador autorregressivo} \\ \theta(B) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \rightarrow \text{operador de média móvel} \end{cases}$$

Um modelo frequentemente usado é o $ARMA(1,1)$:

$$\tilde{Z}_t = \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

Onde:

$$\phi(B) = 1 - \phi B \text{ e } \theta(B) = 1 - \theta B$$

Substituindo-se sequencialmente $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2} \dots$ obtêm-se um processo de MA de ordem infinita.

$$\tilde{Z}_t = \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$\tilde{Z}_{t-1} = \phi \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1} - \theta a_{t-2}$$

$$\tilde{Z}_t = \phi(\phi \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1} - \theta a_{t-2}) + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$= \phi^2 \tilde{Z}_{t-2} + \phi a_{t-1} - \theta \phi a_{t-2} + a_t - \theta a_{t-1}$$

$$= \phi^2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t - (\theta - \phi) a_{t-1} - \theta \phi a_{t-2}$$

$$\tilde{Z}_t = \phi^2(\phi \tilde{Z}_{t-3} + a_{t-2} - \theta a_{t-3}) + a_t - (\theta - \phi) a_{t-1} - \theta \phi a_{t-2}$$

$$= \phi^3 \tilde{Z}_{t-3} + \phi^2 a_{t-2} - \theta \phi^2 a_{t-3} + a_t - (\theta - \phi) a_{t-1} - \theta \phi a_{t-2}$$

$$= \phi^3 \tilde{Z}_{t-3} + a_t + (\phi - \theta) a_{t-1} + \phi(\phi - \theta) a_{t-2} - \phi^2 \theta a_{t-3}$$

De forma geral:

$$\psi_j = \phi^{j-1}(\phi - \theta), j \geq 1$$

O processo será estacionário se $\sum \psi_j = (\phi - \theta) \sum \phi^{j-1} < \infty$, ou seja, $|\phi| < 1$.

Do mesmo modo, o modelo $ARMA(1,1)$ pode ser escrito como:

$$\pi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Onde os pesos $\pi_j = \theta^{j-1}(\phi - \theta), j \geq 1$. O processo será invertível se $\sum \pi_j < \infty$,

ou seja: $|\theta| < 1$.

Desta forma, a condição de estacionariedade de um processo $ARMA(1,1)$ é a mesma que para um processo $AR(1)$ e a condição de invertibilidade é a mesma que para um processo $MA(1)$.

Modelo $ARMA(1,1)$

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t - a_{t-1}$$

$$(1 - \phi B)\tilde{Z}_t = (1 - \theta B)a_t$$

Estacionário: $1 - \phi B = 0 \rightarrow B = \frac{1}{\phi_1}, |B| > 1 \rightarrow \left|\frac{1}{\phi}\right| > 1 \Leftrightarrow |\phi| < 1$

Invertível: $1 - \theta B = 0 \rightarrow B = \frac{1}{\theta}, |B| > 1 \rightarrow \left|\frac{1}{\theta}\right| > 1 \Leftrightarrow |\theta| < 1$

De forma geral: $MA(\infty)$

$$\tilde{Z}_t = \underbrace{\theta(B)\phi^{-1}(B)}_{\psi(B)} a_t$$

$$\psi(B) \begin{cases} \sum |\psi_j| < \infty \\ \sum \psi_j^2 < \infty \end{cases}$$

Z_t é estacionário se as raízes de $\phi(B) = 0$ forem, em módulo, maiores do que

1. O processo MA é sempre estacionário.

$$\underbrace{\phi(B)\theta^{-1}(B)}_{\pi(B)}\tilde{Z}_t = a_t$$

$$\pi(B) \begin{cases} \sum |\pi_j| < \infty \\ \sum \pi_j^2 < \infty \end{cases}$$

Z_t é invertível se as raízes de $\theta(B) = 0$ forem, em módulo, maiores do que 1.

$$\begin{cases} AR(p) \rightarrow \text{sempre invertível} \\ MA(q) \rightarrow \text{sempre estacionário} \end{cases}$$

Determinação da facv e fac.

Multiplicando todos os membros de $\tilde{Z}_t$ por $\tilde{Z}_{t-j}$ e tomando esperanças obtemos:

$$\gamma_j = E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-j}) = E[(\phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}) \tilde{Z}_{t-j}]$$

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p} + \gamma_{za}(j) - \theta_1 \gamma_{za}(j-1) - \dots - \theta_q \gamma_{za}(j-q)$$

Onde $\gamma_{za}(j)$ é a covariância cruzada entre Z_t e a_t , definida por:

$$\gamma_{za}(j) = E(a_t \tilde{Z}_{t-j})$$

Como $\tilde{Z}_{t-j}$ só depende de choques a_t ocorrido até instante $t-j$, obtemos:

$$\gamma_{za}(j) \begin{cases} = 0, j > 0 \\ \neq 0, j \leq 0 \end{cases}$$

Deste modo:

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \phi_2 \gamma_{j-2} + \dots + \phi_p \gamma_{j-p}, j > q$$

a fac será:

$$\rho_j = \phi \rho_{j-1} + \phi_2 \rho_{j-2} + \dots + \phi_p \rho_{j-p}, j > q$$

Ou seja, as autocorrelações de “lags” $1, 2, \dots, q$ serão afetadas diretamente pelos parâmetros de médias móveis, mas para $j > q$ esses se comportam como nos modelos autorregressivos.

Ex: $ARMA(1,1)$

$$\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \gamma_{za}(j) - \theta_1 \gamma_{za}(j-1)$$

$$\text{para } j = 1$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \gamma_{za}(1) - \theta_1 \gamma_{za}(0)$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \gamma_{za}(0)$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2$$

$$\gamma_{za}(1) = E(a_t \tilde{Z}_{t-1}) = E[a_t(\phi_1 \tilde{Z}_{t-2} + a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2})] = 0$$

$$\gamma_{za}(0) = E(a_t \tilde{Z}_t) = E[a_t(\phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})] = \sigma_a^2$$

$$\text{para } j = 0$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \gamma_{za}(0) - \theta_1 \gamma_{za}(-1)$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \gamma_{za}(0) - \theta_1 [\sigma_a^2 (\phi_1 - \theta_1)]$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_0 + \sigma_a^2 - \sigma_a^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{za}(-1) &= E(a_t \tilde{Z}_{t+1}) = E[a_t(\phi_1 \tilde{Z}_t + a_{t+1} - \theta_1 a_t)] = \phi_1 E(a_t \tilde{Z}_t) - \theta_1 E(a_t^2) \\ &= \theta_1 \sigma_a^2 - \theta_1 \sigma_a^2 = \sigma_a^2 (\phi_1 - \theta_1) \end{aligned}$$

$$\gamma_{za}(0) = E(a_t \tilde{Z}_t) = \sigma_a^2$$

Temos então que:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \sigma_a^2 \theta_1 (\phi_1 \theta_1) & (1) \\ \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 (\phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2) + \sigma_a^2 - \sigma_a^2 (\phi_1 - \theta_1) \theta_1 \\ &= \phi_1^2 \gamma_0 - \phi_1 \theta_1 \sigma_a^2 + \sigma_a^2 - \sigma_a^2 (\phi_1 - \theta_1) \theta_1 \\ &= \sigma_a^2 \frac{1 - \phi_1 \theta_1 - \phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \theta_1^2} \\ &= \sigma_a^2 \frac{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \theta_1^2} \end{aligned}$$

Por sua vez:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \phi_1 \left[\sigma_a^2 \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}{1 - \phi_1^2} \right] - \theta_1 \sigma_a^2 = \\ &= \sigma_a^2 \frac{[\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - 2\phi_1^2 \theta_1 - \theta_1(1 - \phi_1^2)]}{1 - \phi_1^2} = \\ &= \sigma_a^2 \frac{[\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - 2\phi_1^2 \theta_1 - \theta_1 + \phi_1^2 \theta_1]}{1 - \phi_1^2} = \\ &= \sigma_a^2 \frac{\phi_1 + \phi_1 \theta_1^2 - \phi_1^2 \theta_1 - \theta_1}{1 - \phi_1^2} = \\ &= \sigma_a^2 \frac{[\phi_1 \theta_1 (\theta_1 - \phi_1) - (\theta_1 - \phi_1)]}{1 - \phi_1^2} = \\ &= \sigma_a^2 \frac{[(\theta_1 \phi_1 - 1)(\theta_1 - \phi_1)]}{1 - \phi_1^2} \end{aligned}$$

A fac será dada por:

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}$$

Lembrando que $\gamma_j = \phi_1 \gamma_{j-1} + \gamma_{za}(j) - \theta_1 \gamma_{za}(j-1)$, então:

para $j \geq 2$, $\gamma_{za}(j)$ e $\gamma_{za}(j-1)$ serão iguais a zero. Por isso: $\rho_j = \phi_1 \rho_{j-1}, j \geq 2$.

Nota: os termos de MA entram somente na determinação de ρ_1 . Para $j \geq 2$ há influência apenas da parte AR .

FUNÇÃO DE AUTOCORREÇÃO PARCIAL

Os processos $AR(p)$, $MA(q)$ e $ARMA(p, q)$ apresentam fac com características especiais:

- i) Um processo $AR(p)$ tem fac que decai de acordo com exponenciais e os senóides amortecidos, infinita em extensão;
- ii) Um processo $MA(q)$ tem fac finita, apresentando um corte após o lag q ;
- iii) Um processo $ARMA(p, q)$ tem fac infinita em extensão, a qual decai de acordo com exponenciais e/ou senóides amortecidos, após o lag $(q - p)$;

Essas constatações serão úteis no procedimento de identificação desses modelos. Calcularemos as estimativas das fac, e com base nas estimativas vamos escolher um ou mais modelos que descrevem o processo estocástico.

Outra medida útil no processo de identificação de modelos é a função de autocorrelação parcial (facp).

Notação: Vamos denotar por ϕ_{kj} o j -ésimo coeficiente de um modelo $AR(k)$, e seja ϕ_{kk} o último coeficiente. Sabemos que:

$$\tilde{Z}_t = \phi_{11}\tilde{Z}_{t-1} + a_t \quad AR(1)$$

$$\tilde{Z}_t = \phi_{12}\tilde{Z}_{t-1} + \phi_{22}\tilde{Z}_{t-2} + a_t \text{ AR}(2)$$

$$\tilde{Z}_t = \phi_{13}\tilde{Z}_{t-1} + \phi_{23}\tilde{Z}_{t-2} + \phi_{33}\tilde{Z}_{t-3} + a_t \text{ AR}(3)$$

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, k$$

Obtemos as equações de $Y.W$.

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \dots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ \vdots \\ \rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \dots + \phi_{kk}\rho_0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

Resolvendo sucessivamente *para* $k = 1, 2, \dots$, obtemos:

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

De forma geral:

$$\phi_{kk} = \frac{|\rho_k^*|}{|\rho_k|}$$

Onde ρ_k é a matriz de autocorrelações e ρ_k^* é a matriz ρ_k com a última

coluna substituída pelo valor das autocorrelações.

A quantidade ϕ_{kk} é chamada função de autocorrelação parcial (facp)

Pode-se verificar que: (Box, Jenkins, Reinsel, 1994):

- i) Um processo $AR(p)$ tem $\phi_{kk} \neq 0, para k \leq p$ e $\phi_{kk} = 0, para k > p$;
- ii) Um processo $MA(q)$ tem facp com decaimento exponencial e/ou senóides amortecidas;
- iii) Um processo $ARMA(p, q)$ tem facp que se comporta como a fac de um $ARMA(p, q)$.

É necessário estimar a facp de um processo AR, MA ou $ARIMA$;

Uma possibilidade é estimar, sucessivamente, modelos AR de ordens $p = 1, 2, 3 \dots$ por MQO e tomar as estimativas do último coeficiente de cada ordem.

Outra maneira é substituir nas eq. Y.W. as fac ρ_j por suas estimativas:

$$r_j = \hat{\phi}_{k1}r_{j-1} + \dots + \hat{\phi}_{kk}r_{j-k}, j = 1, \dots, k$$

Resolvendo para $k = 1, 2, \dots$

Pode-se verificar que ϕ_{kk} é igual a correlação parcial entre as variáveis Z_t e Z_{t-k} ajustadas às variáveis intermediárias $Z_{t-1}, \dots, Z_{t-k+1}$

$$\begin{array}{c} Z_{t-1}, \dots, Z_{t-k+1} \\ \hline Z_{t-3} \quad Z_{t-2} \quad Z_{t-1} \quad Z_t \end{array} \quad \text{Ex: } k = 3$$

Ou seja, ϕ_{kk} mede a correlação remanescente entre Z_t e Z_{t-k} depois de eliminada a influência de $Z_{t-1}, \dots, Z_{t-k+1}$. O que sobra da correlação entre duas variáveis, depois de eliminado o efeito das variáveis intermediárias.

Exemplo: a correlação entre os valores ajustados

$$\begin{aligned} & Z_t - \phi_{11}Z_{t-1} \text{ e } Z_{t-2} - \phi_{11}Z_{t-1} \\ \text{Corr}(Z_t - \phi_{11}Z_{t-1}, Z_{t-2} - \phi_{11}Z_{t-1}) &= \\ = \text{Corr}(Z_t - \rho_1 Z_{t-1}, Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1}) &= \\ = \frac{\text{Cov}(Z_t - \rho_1 Z_{t-1}, Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1})}{[(\text{Var}(Z_t - \rho_1 Z_{t-1})\text{Var}(Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1}))^{\frac{1}{2}}]} \end{aligned}$$

1. Cálculo do numerador

$$\begin{aligned} & E[(Z_t - \rho_1 Z_{t-1})(Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1})] \\ &= E(Z_t Z_{t-2}) - \rho_1 E(Z_t Z_{t-1}) - \rho_1 E(Z_{t-1} Z_{t-2}) + \rho_1^2 E(Z_{t-1}^2) \\ &= \gamma_2 - \rho_1 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_1 + \rho_1^2 \gamma_0 = \gamma_2 - 2\rho_1 \gamma_1 + \rho_1^2 \gamma_0 \end{aligned}$$

2. Cálculo do denominador

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_t - \rho_1 Z_{t-1}) &= \gamma_0 - \rho_1^2 \gamma_0 = \gamma_0(1 - \rho_1^2) \\ \text{Var}(Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1}) &= \gamma_0 - \rho_1^2 \gamma_0 = \gamma_0(1 - \rho_1^2) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} & \text{Corr}(Z_t - \rho_1 Z_{t-1}, Z_{t-2} - \rho_1 Z_{t-1}) \\ &= \frac{\gamma_2 - 2\rho_1 \gamma_1 + \rho_1^2 \gamma_0}{\gamma_0(1 - \rho_1^2)} (\div \gamma_0) \\ &= \frac{\rho_2 - 2\rho_1^2 + \rho_1^2}{(1 - \rho_1^2)} \\ &= \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \phi_{22} \end{aligned}$$

Pode-se verificar que sob a suposição de que o processo seja $AR(p)$, as facp estimadas de ordem $p + 1, p + 2, \dots$ são aproximadamente, independentemente distribuídas, com

$$Var(\hat{\phi}_{kk}) \approx \frac{1}{N}, k \geq p + 1$$

Se N for grande, $\hat{\phi}_{kk}$ tem distribuição aproximada normal, possibilitando a construção de I.C. para $\hat{\phi}_{kk}$.

A fac é útil para identificar modelos MA , enquanto que a facp é útil para identificar modelos AR . Para modelos $ARMA$, as duas funções não são muito adequadas para a identificação. Existe a função de autocorrelação estendida para essa finalidade (Tsay e Tiao, 1984).

MODELOS NÃO ESTACIONÁRIOS

Até agora estudamos modelos apropriados para séries estacionárias, ou seja, séries que se desenvolvem no tempo ao redor de uma média constante. Na prática, as séries nem sempre são estacionárias.

Por exemplo, séries econômicas e financeiras são não estacionárias, mas tomando-se diferenças tornam-se estacionárias;

Assim, se Z_t é não estacionária, $W_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B)Z_t = \Delta Z_t$ é estacionária.

Ex: $PIB(A_8)$ e $M - IZV(A_{10})$ são não estacionárias.

Existem diversas formas de não estacionariedade. A condição de estacionariedade requer que $|\phi| < 1$, no modelo $AR(1)$ abaixo:

$$(1 - \phi B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Se $\phi = 1$ obtemos um processo não estacionário:

$$\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_{t-1} + a_t \quad (\text{processo aleatório})$$

Porém $\Delta\tilde{Z}_t = a_t$ é estacionário.

Séries Z_t , tais que, tomando-se um número finito de diferenças, d , tornam-se estacionárias, são chamadas não estacionárias homogêneas, ou ainda, séries que possuem raízes unitárias.

Outras séries não estacionárias, não-explosivas:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_a^2)$$

Esse processo é chamado “trend stationary” (tendência determinística).

i) $E(X_t) = \mu_t = \beta_0 + \beta_1 t$

ii) Tomando-se uma diferença,

$$X_t - X_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t - \beta_0 - \beta_1(t-1) - \varepsilon_{t-1} = \beta_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$(1 - B)X_t = \beta_1 + (1 - B)\varepsilon_t$$

$ARMA(1,1)$, com $\phi = \theta = 1$.

Portanto, este modelo é não estacionário e não invertível;

iii) Se $W_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t = \Delta X_t \rightarrow W_t = \Delta X_t = \beta_1 + \Delta\varepsilon_t$

W_t é um processo $MA(1)$, estacionário, mas não invertível.

iv) Retirando a tendência de X_t temos:

$$Y_t = X_t - \beta_1 t = \beta_0 + \varepsilon_t$$

agora, Y_t é estacionário e invertível.

MODELOS ARIMA

Se $W_t = \Delta^d Z_t$ for estacionária, podemos representar W_t por um modelo $ARMA(p, q)$, ou seja:

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$$

NOTA: Se W_t for uma diferença de Z_t , então diz-se que Z_t é uma integral de W_t . Daí a denominação de modelo autorregressivo integrado de médias móveis, ARIMA:

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t$$

$$\varphi(B) = \phi(B)\Delta^d; \varphi(B) \rightarrow d \text{ raízes} = 1 \text{ e } p \text{ raízes em módulo} > 1$$

Este modelo supõe que a d-ésima diferença de Z_t pode ser representada por um modelo ARIMA, estacionário e invertível de ordem (p, d, q) e escrevemos ARIMA(p, d, q).

No modelo $\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$ todas as raízes de $\phi(B)$ estão fora do círculo unitário. Equivalentemente:

$$\varphi(B)Z_t = \theta(B)a_t$$

Onde $\varphi(B)$ é um operador autorregressivo não estacionário, de ordem $p + d$, com d raízes.

$$\varphi(B) = \phi(B)\Delta^d = \phi(B)(1 - B)^d$$

NOTA: como $\Delta^d Z_t = \Delta^d \tilde{Z}_t$, para $d > 1$, é indiferente escrever $\varphi(B)Z_t$ ou $\varphi(B)\tilde{Z}_t$.

Na maioria dos casos, $d = 1$ ou $d = 2$. Em geral diz-se que X_t é integrado de ordem d se $\Delta^d X_t$ for estacionário, e escrevemos $X_t \sim I(d)$. Se $d = 0$, X_t é estacionário.

Exemplos:

- i) ARIMA(0,1,1): $\Delta Z_t = (1 - \theta B)a_t$
- ii) ARIMA(1,1,1): $(1 - \phi B)\Delta Z_t = (1 - \theta B)a_t$
- iii) ARIMA(p, 0, 0) = AR(p); ARIMA(0,0,q) = MA(q);
- iv) ARIMA(p, 0, q) = ARMA(p, q)

O exemplo i) é um caso importante. Ele também é chamado *IMA(1,1)*:

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

Pode-se demonstrar que Z_t pode ser escrito na forma autorregressiva:

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= a_t - \theta a_{t-1} \\ (1 - B)Z_t &= (1 - \theta B)a_t \\ (1 - \theta B)^{-1}(1 - B)Z_t &= a_t \\ (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \theta^3 B^3 + \dots)(1 - B)Z_t &= a_t \\ (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \theta^3 B^3 - B - \theta B^2 - \theta^2 B^3 - \theta^3 B^4 - \dots)Z_t &= a_t \\ (1 - B(1 - \theta) - B^2 \theta(1 - \theta) - B^3 \theta^2(1 - \theta) - \dots)Z_t &= a_t \\ Z_t - (1 - \theta)Z_{t-1} - \theta(1 - \theta)Z_{t-2} - \theta^2(1 - \theta)Z_{t-3} - \dots &= a_t \\ Z_t &= (1 - \theta)Z_{t-1} + \theta(1 - \theta)Z_{t-2} + \theta^2(1 - \theta)Z_{t-3} + \dots + a_t \end{aligned}$$

fazendo $\lambda = 1 - \theta$, então:

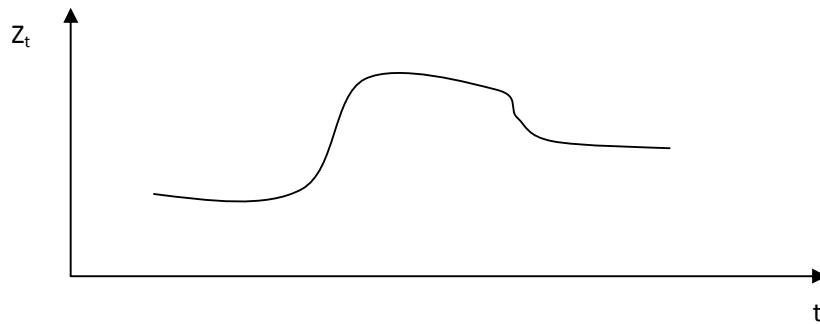
$$Z_t = \lambda Z_{t-1} + \lambda(1 - \lambda)Z_{t-2} + \lambda(1 - \lambda)^2 Z_{t-3} + \dots + a_t$$

Z_t é dado em termos de seu passado através de uma ponderação exponencial

Do cap.4 → ses. (4.15)

Os modelos ARIMA são adequados para séries que representam um comportamento não estacionário homogêneo. Por exemplo:

- i. Séries não-estacionárias quanto ao nível: oscilam ao redor de um nível médio durante algum tempo e depois saltam para outro nível temporário. Para torná-las estacionárias é suficiente tomar uma diferença. Ex: séries econômicas.



- ii. Séries não estacionárias quanto á inclinação: oscilam numa direção por algum tempo e depois mudam para outra direção temporária. Para torna-las estacionárias é necessário tomar a segunda diferença.

FORMAS DO MODELO ARIMA

- i) Em termos de valores prévios de Z_t e do valor atual e prévio de a_t ;
- ii) Em termos de valor atual e prévios de a_t ;

iii) Em termos de valores prévios de Z_t e do valor atual de a_t ;

Forma de equação de diferenças (útil para calcular previsões)

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \dots + \varphi_{p+d} Z_{t-p-d} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d}$$

Forma de choques aleatórios (útil para calcular a variância dos erros de previsão)

$$Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \psi(B) a_t$$

$$Z_t = \psi(B) a_t$$

$$\varphi(B) Z_t = \varphi(B) \psi(B) a_t$$

Lembrando que:

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t$$

$$\underbrace{\phi(B) \Delta^d}_{\varphi(B)} Z_t = \theta(B) a_t$$

$$\varphi(B) Z_t = \theta(B) a_t \tag{1}$$

Assim:

$$\varphi(B) Z_t = \underbrace{\varphi(B) \psi(B) a_t}_{\theta(B)}$$

$$\theta(B) = \varphi(B) \psi(B)$$

Logo, os pesos ψ_j do processo Z_t podem ser obtidos identificando-se

coeficientes de $B, B^2, \dots (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d})(1 + \psi_1 B + \psi_2 B + \dots) = 1 -$

$$\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

Agrupar polinômios em B , depois em B^2 , etc.

Exemplo: considere o processo $IMA(1,1)$

$$(1 - B)Z_t = (1 - \theta B)a_t$$

$$\varphi(B) = 1 - B; \theta(B) = 1 - \theta B$$

nota: não há parte autorregressiva.

$$(1 - B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1 - \theta B$$

$$(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) - (B + \psi_1 B^2 + \psi_2 B^3 + \dots) = 1 - \theta B$$

$$1 - (1 - \psi_1)B \dots = 1 - \theta B$$

$$1 - \psi_1 = \theta$$

$$\psi_1 = 1 - \theta$$

De forma geral:

$$\psi_j = 1 - \theta, j = 1, 2, \dots$$

De modo que:

$$Z_t = a_t + (1 - \theta)a_{t-1} + (1 - \theta)a_{t-2} + \dots$$

Note que $\sum \psi_j = \infty$, por isso o caráter não estacionário de Z_t . Reescrevendo Z_t :

$$Z_t = a_t + (1 - \theta) \sum_{j=1}^{\infty} a_{t-j} = a_t + \lambda S a_{t-1}, \lambda = 1 - \theta$$

Onde S é o operador soma.

Forma invertida (autorregressivo infinito)

Lembrando que:

$$Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \dots = \psi(B)a_t$$

$$\psi(B)^{-1}Z_t = a_t$$

$$\underbrace{(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)}_{\pi(B)} Z_t = a_t$$

$$\pi(B)$$

$$\pi(B)Z_t = (1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j) Z_t = a_t$$

Segue que:

$$\pi(B)Z_t = a_t$$

$$\theta(B)\pi(B)Z_t = \theta(B)a_t$$

$$\theta(B)\pi(B)Z_t = \theta(B)a_t = \varphi(B)Z_t$$

$$\varphi(B) = \theta(B)\pi(B)$$

Portanto, os pesos π_j podem ser obtidos da utilização acima, conhecendo-se os operadores $\varphi(B)$ e $\theta(B)$.

Exemplo: $ARIMA(1,1,1)$

$$\underbrace{(1 - \phi B)(1 - B)}_{\varphi(B)} Z_t = \underbrace{(1 - \theta B)}_{\theta(B)} a_t$$

$$\varphi(B)$$

$$\theta(B)$$

$$\varphi(B) = (1 - \phi B)(1 - B) = 1 - B - \phi B + \phi B^2 = 1 - (1 + \phi)B + \phi B^2$$

$$\theta(B) = 1 - \theta B.$$

Retomando $\varphi(B) = \theta(B)\pi(B)$, temos:

$$\varphi(B) = \theta(B)\pi(B)$$

$$1 - (1 + \phi)B + \phi B^2 = (1 - \theta B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)$$

$$1 - (1 + \phi)B + \phi B^2 = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) - (\theta B - \theta \pi_1 B^2 - \theta \pi_2 B^3 - \dots) =$$

$$= 1 - (\pi_1 + \theta)B - (\pi_2 + \theta \pi_1)B^2 - \dots$$

Cálculo de π_1 :

$$1 + \phi = \pi_1 + \theta$$

$$\pi_1 = (1 - \theta) + \phi$$

Cálculo de π_2 :

$$\phi = -(\pi_2 + \theta\pi_1)$$

$$\phi = -\pi_2 + \theta(\phi + 1 - \theta)$$

$$\phi = -\pi_2 + \phi\theta + \theta - \theta^2$$

$$\pi_2 = \phi\theta + \theta - \theta^2 - \phi$$

$$\pi_2 = \theta(1 - \theta) - \phi(1 - \theta)$$

$$\pi_2 = (\theta - \phi)(1 - \theta)$$

.

.

.

$$\pi_j = (\theta - \phi)(1 - \theta)\theta^{j-2}, j \geq 3$$

TERMO CONSTANTE NO MODELO

No modelo *ARIMA* (p, d, q) dado por $\phi(B)W_t = \theta(B)a_t$ um termo constante foi omitido, implicando que $E(W_t) = \mu_\omega = 0$. Este modelo é conhecido como modelo de tendência estocástica. Este processo é não estacionário e muda de nível e/ou inclinação com o tempo. GRÁFICO 5

A não estacionariedade (tendência) é caracterizada pela existência de zeros de $\phi(B)$ sobre o círculo unitário. GRÁFICO 6

Existe também a tendência determinística, que muitas séries podem apresentar. Podemos ter, de forma geral:

$$Z_t = \sum_{j=0}^m \beta_j t^j + \frac{\theta(B)}{\phi(B)\Delta^d} \cdot a_t$$

Ou seja, Z_t é a soma de um polinômio de grau $\underline{m}$ e de um processo $ARIMA(p, d, q)$.

De outra forma:

$$Z_t = T_t + Y_t$$

Onde Y_t segue um modelo $ARIMA(p, d, q)$, isto é, $\phi(B)\Delta^d Y_t = \theta(B)a_t$. Segue que Z_t é não estacionário se $m > 0$ e/ou $d > 0$.

Tomando-se d diferenças, temos:

$$\Delta^d Z_t = \begin{cases} \theta_0 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, & \text{se } m = d \\ \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, & \text{se } m < d \end{cases}$$

Onde $\theta_0 = \beta_d d!$, obtendo-se então uma série estacionária.

Vamos verificar 3 casos:

- $m = d = 0$:

$$Z_t = \beta_0 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (Z_t \text{ é estacionária})$$

- $m = d = 1$:

$$\begin{aligned} Z_t - Z_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1-B)} a_t - \beta_0 - \beta_1(t-1) - \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1-B)} a_{t-1} \\ &= \beta_1 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1-B)} (a_t - a_{t-1}) \\ &= \beta_1 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1-B)} (1-B)a_t \end{aligned}$$

$$= \beta_1 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

- $m = d = 2$:

Lembrando que:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta Z_t &= \Delta(Z_t - Z_{t-1}) = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \\ &= \underbrace{(1 - 2B + B^2)} Z_t \\ &= \Delta^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} a_t - \\ &- 2 \left[\beta_0 + \beta_1(t-1) + \beta_2(t-1)^2 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} a_{t-1} \right] + \beta_0 + \beta_1(t-2) + \\ &+ \beta_2(t-2)^2 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} a_{t-2} = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 - \\ &- 2\beta_0 - 2\beta_1 t + 2\beta_1 + 2\beta_2 t^2 + 4\beta_2 t - 2\beta_2 + \beta_0 + \beta_1 t - 2\beta_1 + \beta_2 t^2 - 4\beta_2 t + 4\beta_2 \\ &+ \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} a_t - 2 \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} a_{t-1} \\ &+ \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} a_{t-2} = \\ &= 2\beta_2 \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} (a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2}) \\ &= 2\beta_2 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)(1 - 2B + B^2)} (1 - 2B + B^2) a_t = 2\beta_2 + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t\end{aligned}$$

De forma geral para $m = d(> 0)$, temos:

$$\Delta^d Z_t = \underbrace{\beta_d d!}_{\theta_0} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

Isso significa que podemos incluir uma tendência polinomial determinística de grau d no modelo, bastando acrescentar uma constante θ_0 :

$$\varphi(B)Z_t = \theta_0 + \underbrace{\theta(B)}_{\varphi(B)\psi(B)} a_t$$

No caso $m > d$, teremos um modelo não estacionário. Se tomarmos m diferenças obteremos um processo estacionário, mas não invertível.

Se $\theta_0 \neq 0$, obtemos:

$$E(W_t) = \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 \dots - \phi_p}$$

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)a_t + \theta_0$$

$$\phi(B)W_t = \theta(B)a_t + \theta_0$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)W_t = \theta(B)a_t + \theta_0$$

$$E(w_t - \phi_1 w_{t-1} - \phi_2 w_{t-2} - \dots - \phi_p w_{t-p}) = E(\theta(B)a_t) + \theta_0$$

$$\mu_\omega - \phi_1 \mu_\omega - \phi_2 \mu_\omega - \dots - \phi_p \mu_\omega = \theta_0$$

$$\mu_\omega(1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) = \theta_0$$

$$\mu_\omega = E(W_t) = \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p}$$

e, se $\tilde{W}_t = W_t - E(W_t)$, teremos $\phi(B)\tilde{W}_t = \theta(B)a_t$.

Daqui em diante vamos supor que, $d > 0, \mu_\omega = 0$ e, portanto, $\theta_0 = 0$.