

PEF3208

Aula 10

8 maio

PROF.
NAKAO

CARACTERÍSTICAS DAS FIGURAS PLANAS

22 maio TENSÕES NORMAIS

29 maio APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

5 junho APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

19 junho TENSÕES DE CISALHAMENTO



PEF – 3208 – Fundamentos da Mecânica das Estruturas

Apresentação original: Prof. Dr. Rodrigo Provasi

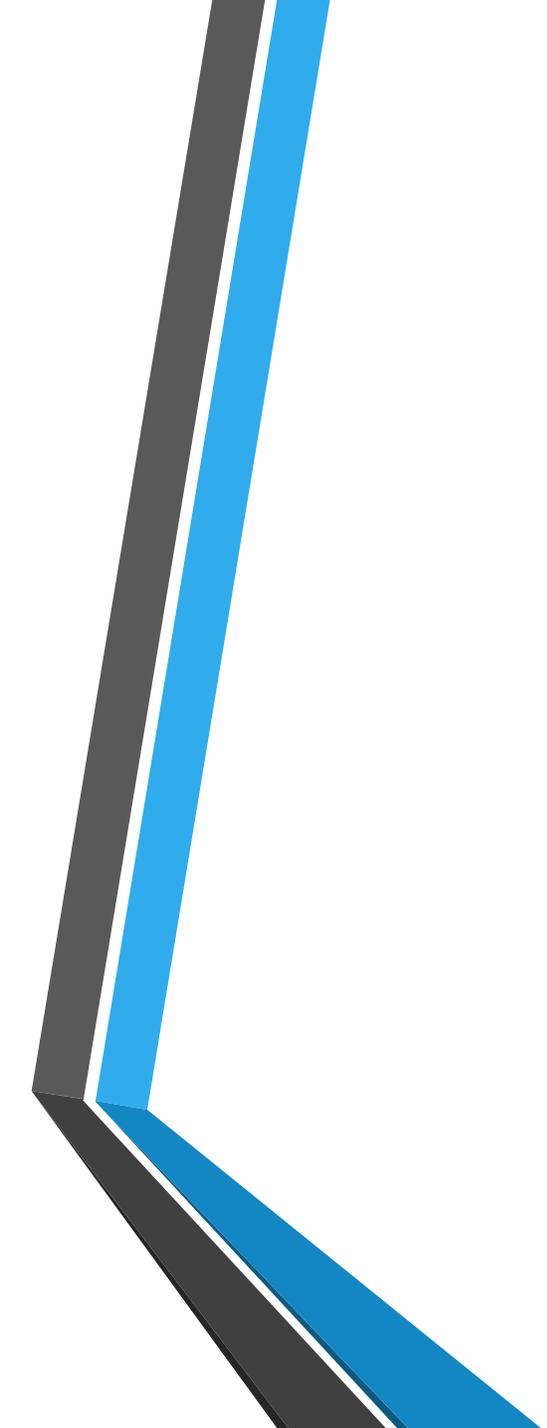
e-mail: provasi@usp.br

Algumas inserções: Prof. Martin P. Schwark

e-mail: schwark@usp.br

Prof. Osvaldo Nakao

e-mail: nakao@usp.br



Figuras Planas

Introdução

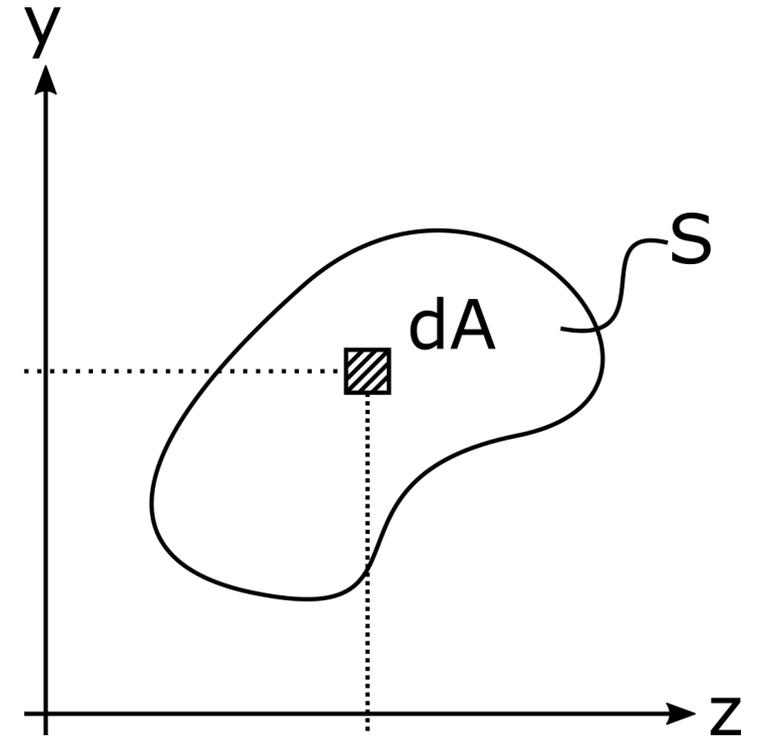
- Porque estudarmos as propriedades das figuras planas?
 - As tensões podem ser escritas em função do esforço solicitante e de alguma propriedade da seção transversal
 - Essas podem ser áreas e momentos de inércia de áreas

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = \frac{M}{I_{z0}} y \quad \tau = \frac{T}{J} r$$

Definições

- Para uma figura plana qualquer, definimos:
- Área da figura S :

$$A = \int_S dA$$

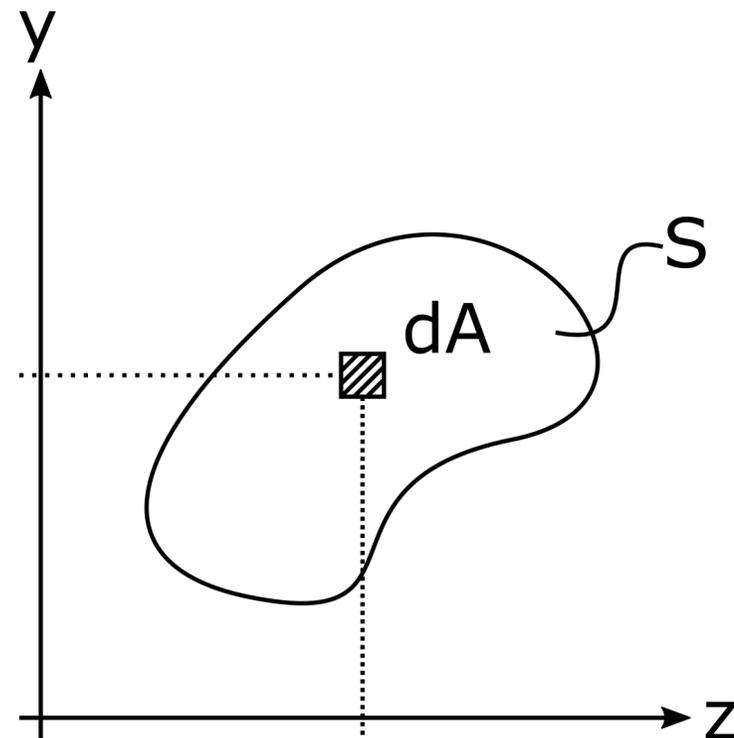


Definições

- Momento estático de S :

$$M_z = \int_S y \, dA, \text{ em relação a } z$$

$$M_y = \int_S z \, dA, \text{ em relação a } y$$

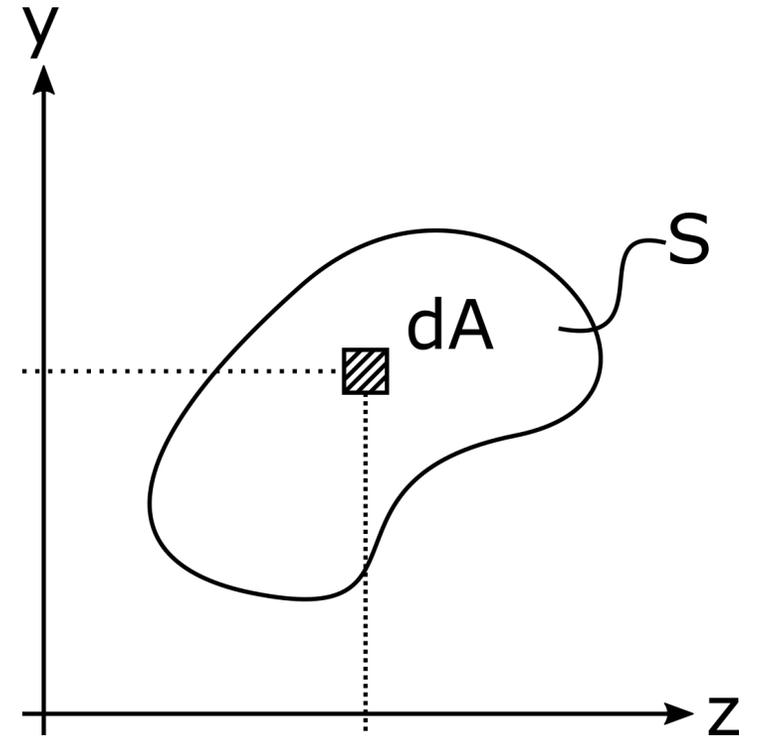


Definições

- Momento de inércia de S :

$$I_z = \int_S y^2 dA, \text{ em relação a } z$$

$$I_y = \int_S z^2 dA, \text{ em relação a } y$$

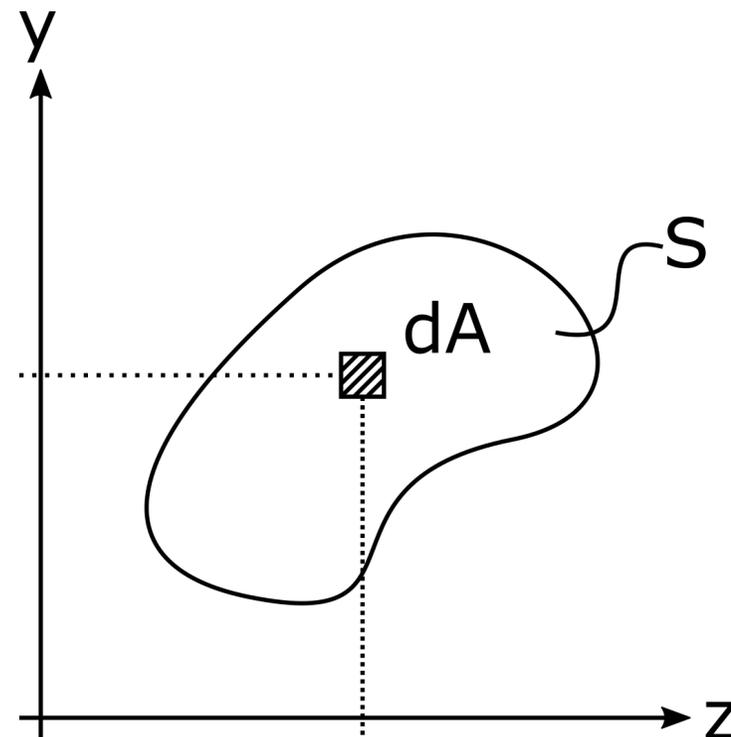


Definições

- Momento polar de inércia de S :

$$J = \int_S r^2 dA$$

onde r é a posição radial da área infinitesimal dA ,
ou seja $r^2 = y^2 + z^2$.



Definições

- Momento estático de S :

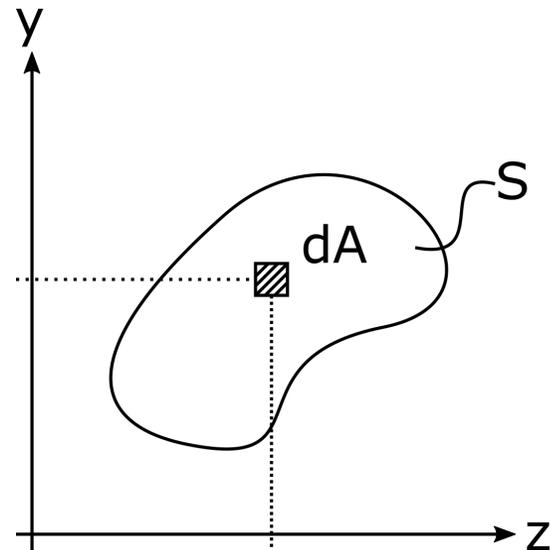
$$M_z = \int_S y \, dA, \text{ em relação a } z$$

$$M_y = \int_S z \, dA, \text{ em relação a } y$$

- Momento de inércia de S :

$$I_z = \int_S y^2 \, dA, \text{ em relação a } z$$

$$I_y = \int_S z^2 \, dA, \text{ em relação a } y$$

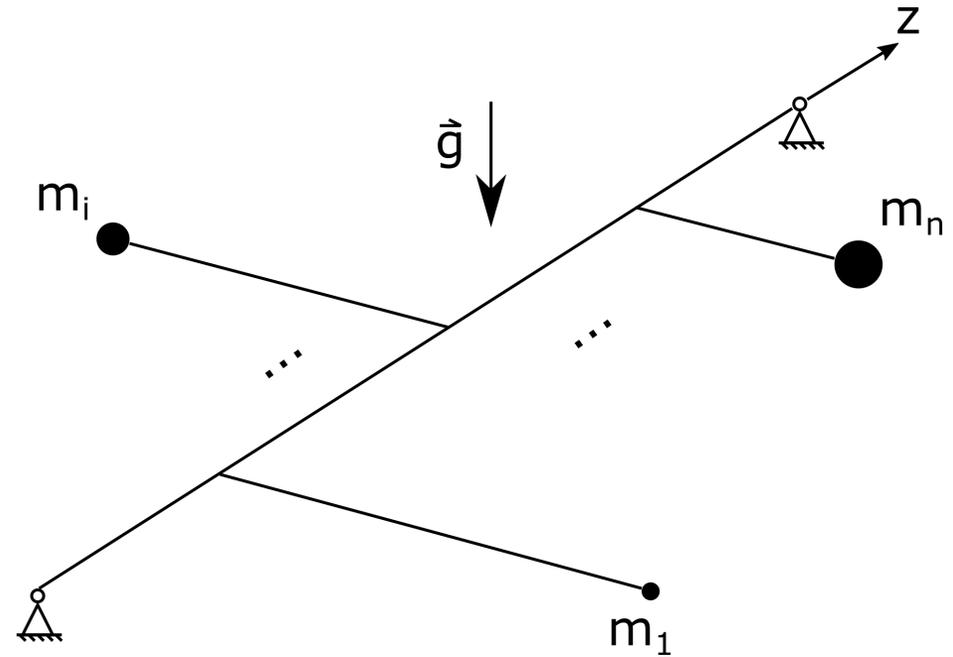


Propriedades do Momento Estático

- Considere o problema da figura.
- Para haver equilíbrio ao redor de z , temos:

$$\sum_i m_i \mathbf{g} d_i = \mathbf{0} \rightarrow \sum_i m_i d_i = 0$$

Importante: d_i tem sinal!



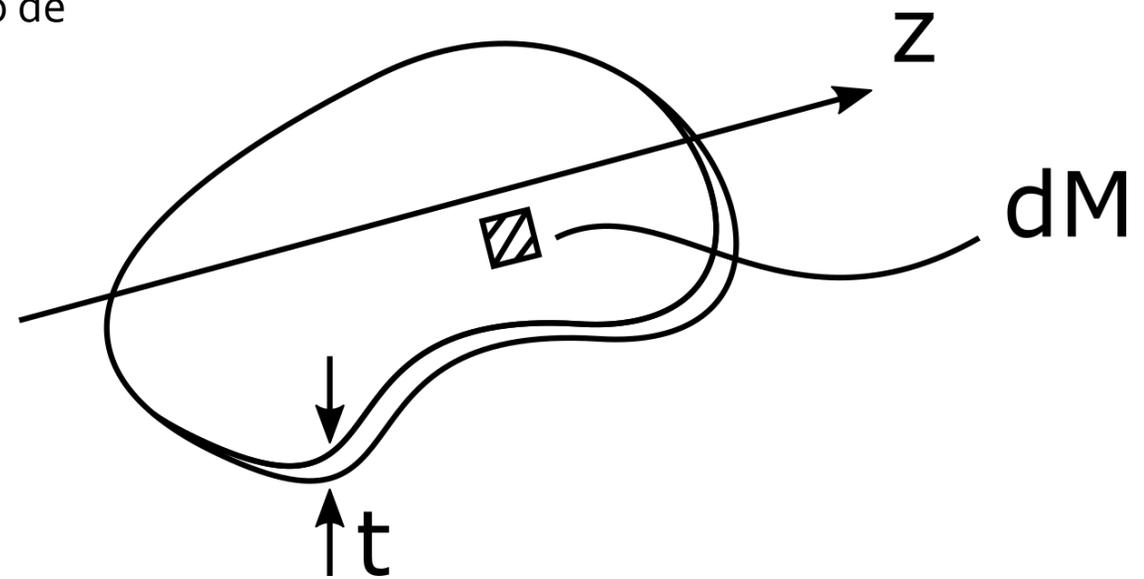
Propriedades do Momento Estático

- Se estendermos o mesmo conceito para um sólido de densidade γ e espessura t constante:

$$\int_S y \, dm = \int_S y \, \gamma \, t \, dA = 0$$

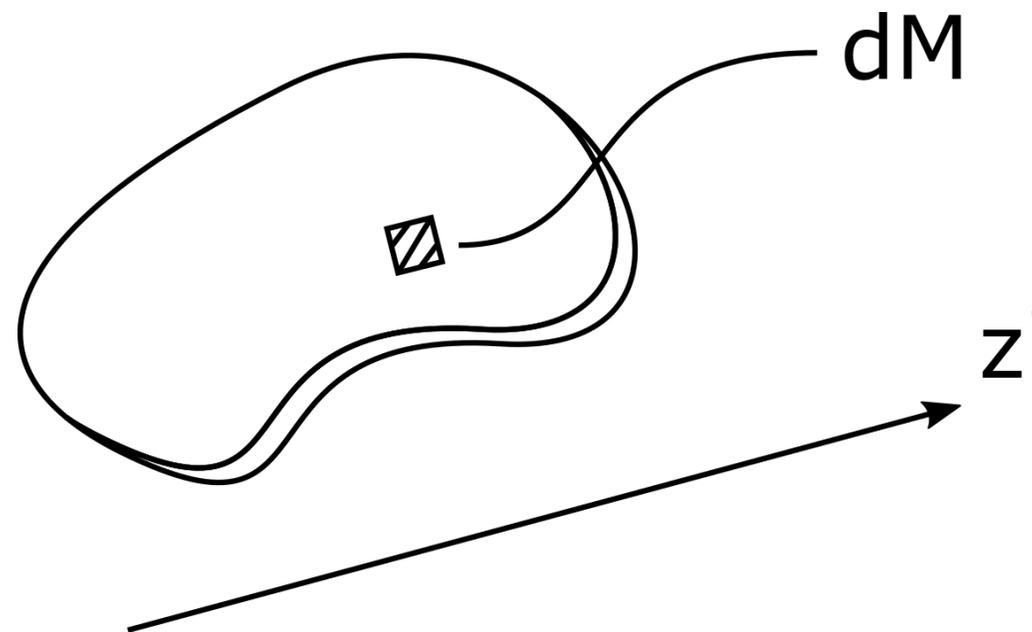
$$\gamma \, t \int_S y \, dA = \gamma \, t \, M_z = 0$$

Logo, para haver equilíbrio: $M_z = 0$

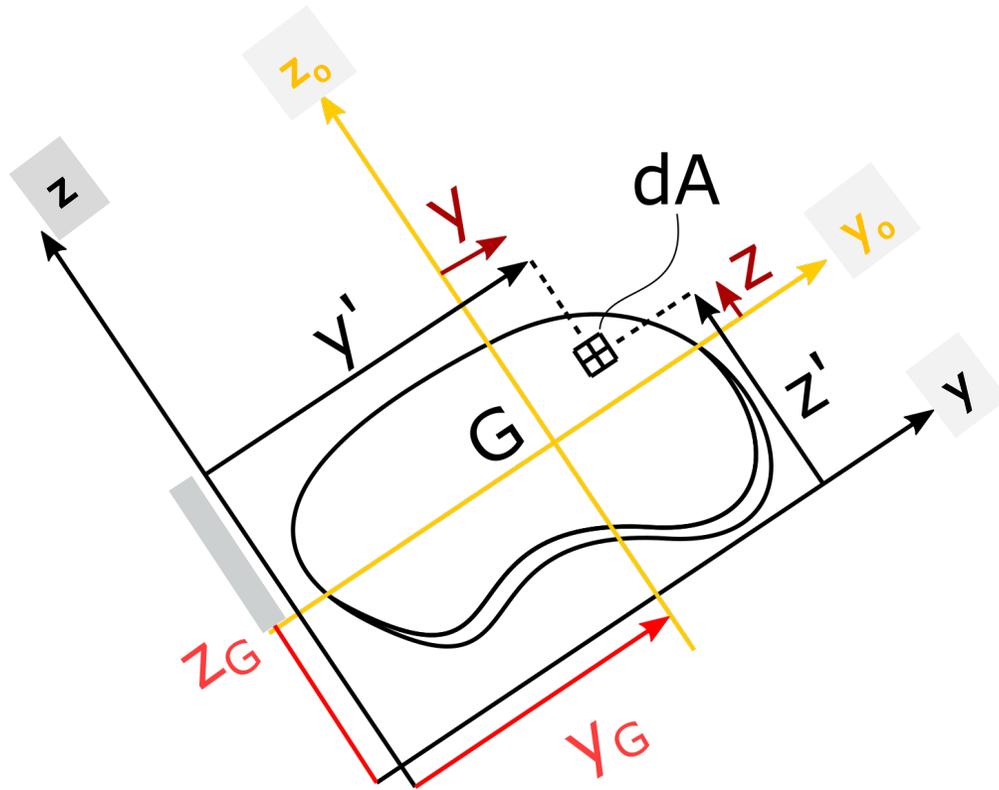


Propriedades do Momento Estático

- Agora, não é todo o eixo que apresenta a propriedade anteriormente descrita.
- É fácil ver na figura que $M_{z'} \neq 0$



Baricentro de uma figura plana

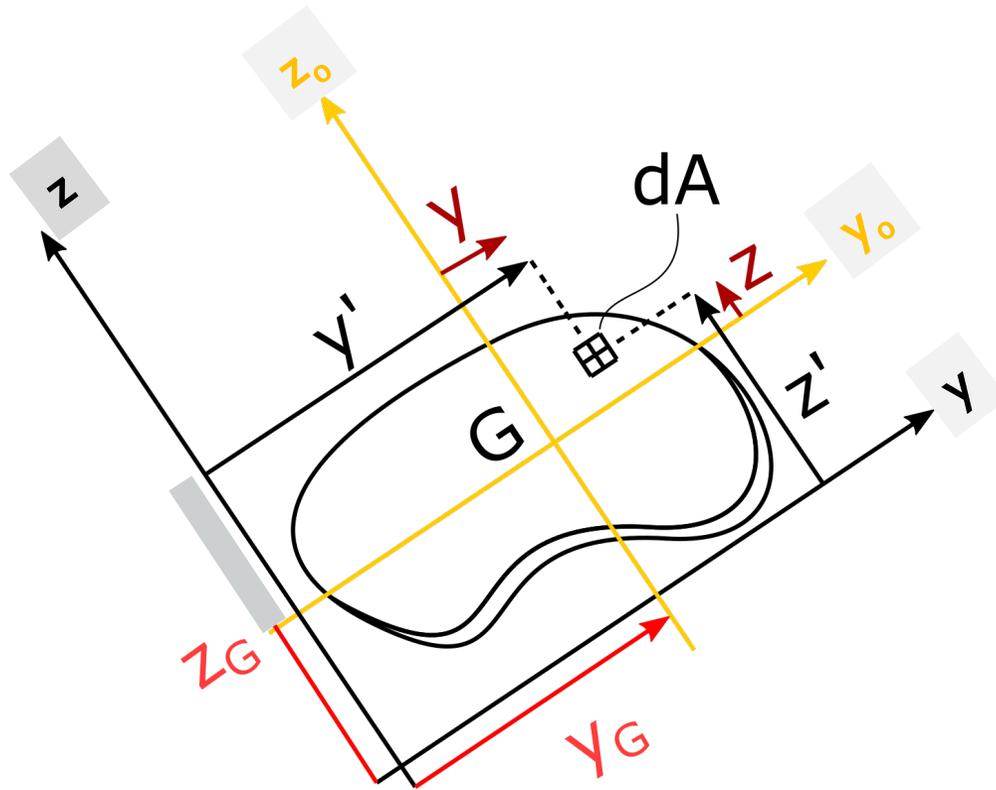


- O baricentro (G) é o centro de massa da figura.
- Por ele passam dois eixos principais que satisfazem:

$$M_{s,z_0} = \int_S y dA = 0$$

$$M_{s,y_0} = \int_S z dA = 0$$

Baricentro de uma figura plana



- Observando a figura:

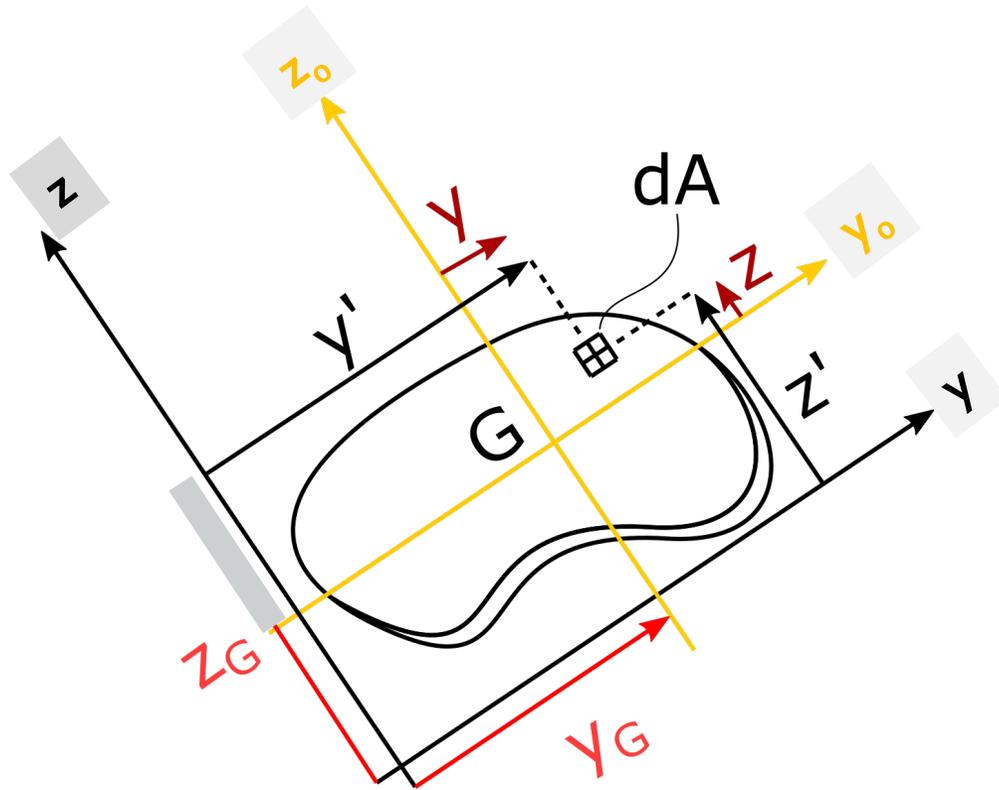
$$y' = y + y_G$$

- Assim, o momento estático em relação ao eixo z pode ser escrito como:

$$M_{S,z} = \int_S y' dA = \int_S (y + y_G) dA = \int_S y dA + \int_S y_G dA$$

$$M_{S,z} = M_{S,z_0} + y_G \int_S dA = y_G A$$

Baricentro de uma figura plana



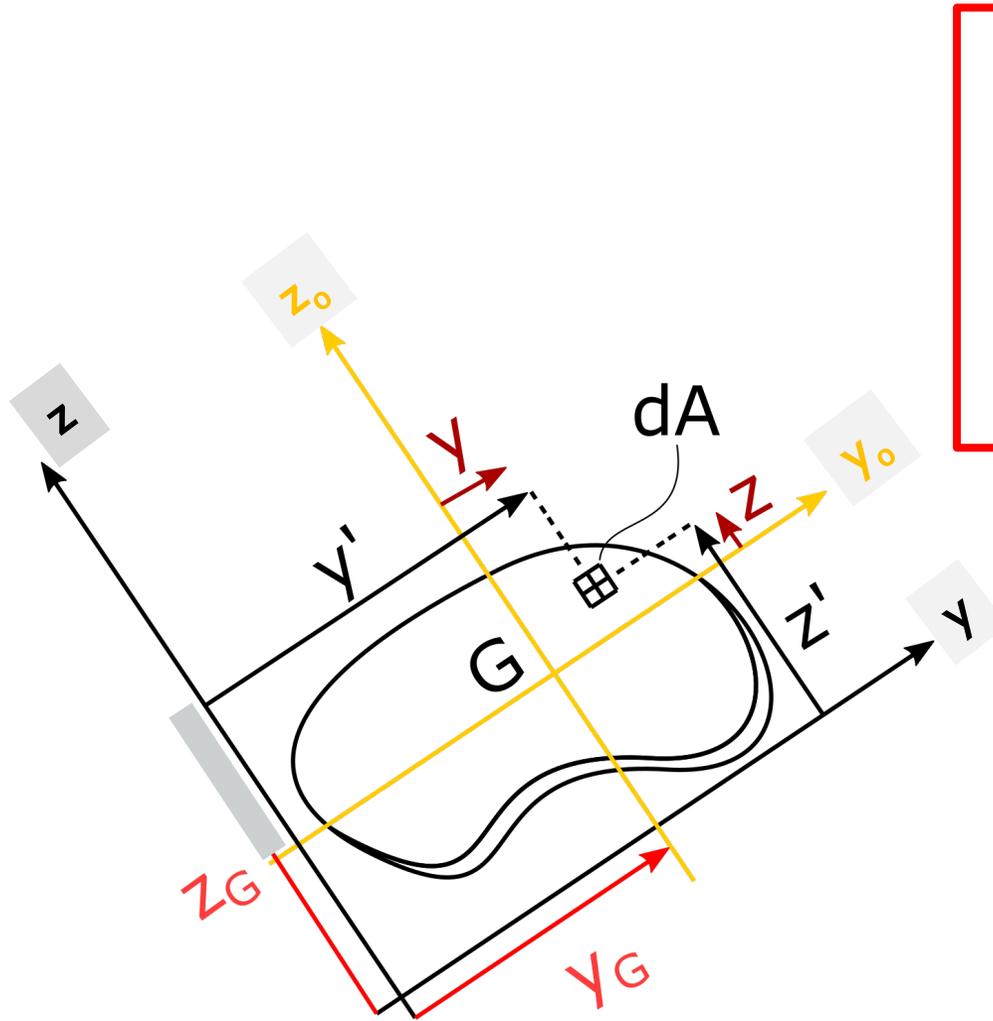
- Logo:

$$y_G = \frac{M_{S,z}}{A}$$

- Analogamente:

$$z_G = \frac{M_{S,y}}{A}$$

Baricentro de uma figura plana



$$y_G = \frac{M_{S,z}}{A}$$

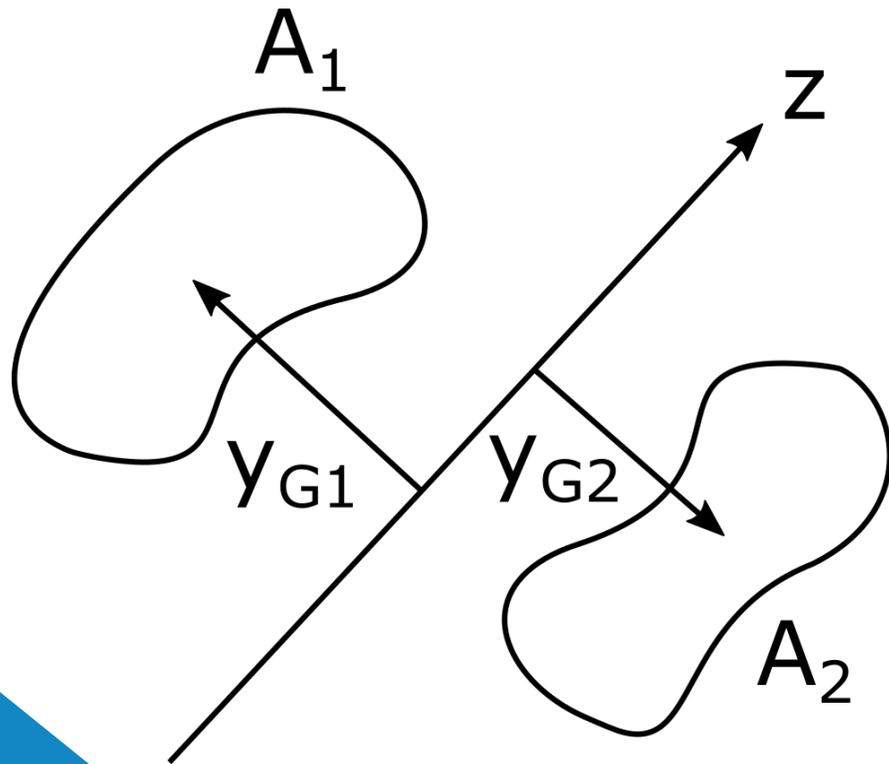
$$z_G = \frac{M_{S,y}}{A}$$

- Momento estático de S:

$$M_{S,z} = \int_S y \, dA, \text{ em relação a } z$$

$$M_{S,y} = \int_S z \, dA, \text{ em relação a } y$$

Baricentro de figuras compostas



- Para determinar o baricentro de figuras compostas:

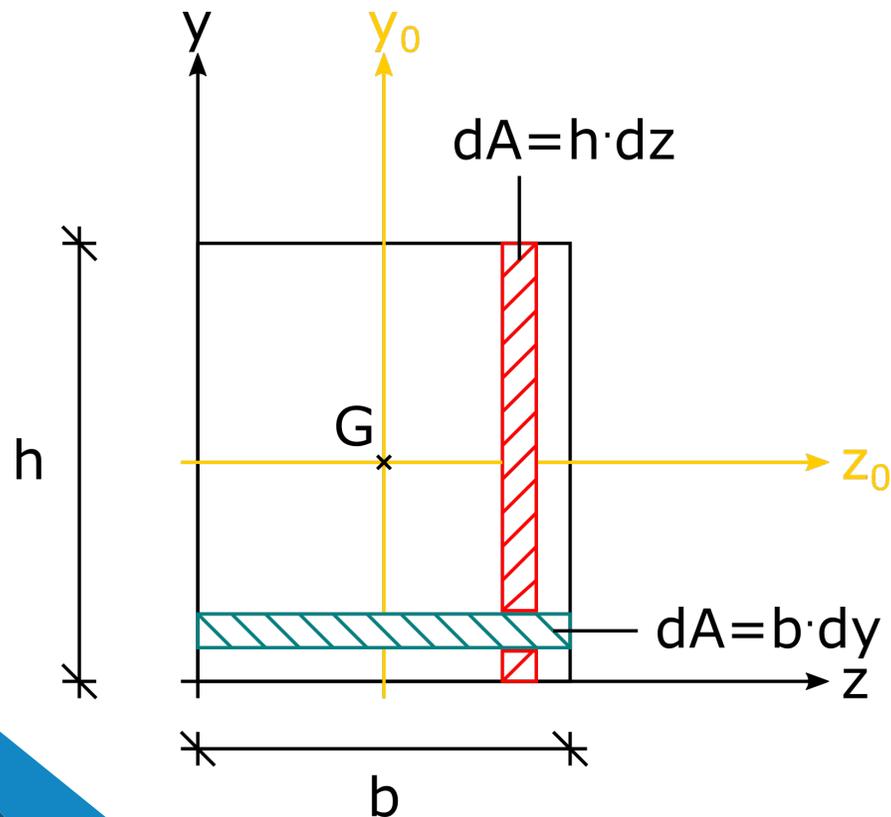
$$M_{s,z}^{total} = \sum_{i=1}^n y_{Gi} A_i = y_G A$$

- Logo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}^{total}}{A}$$

com $A = \sum A_i$.

Exemplo: Retângulo



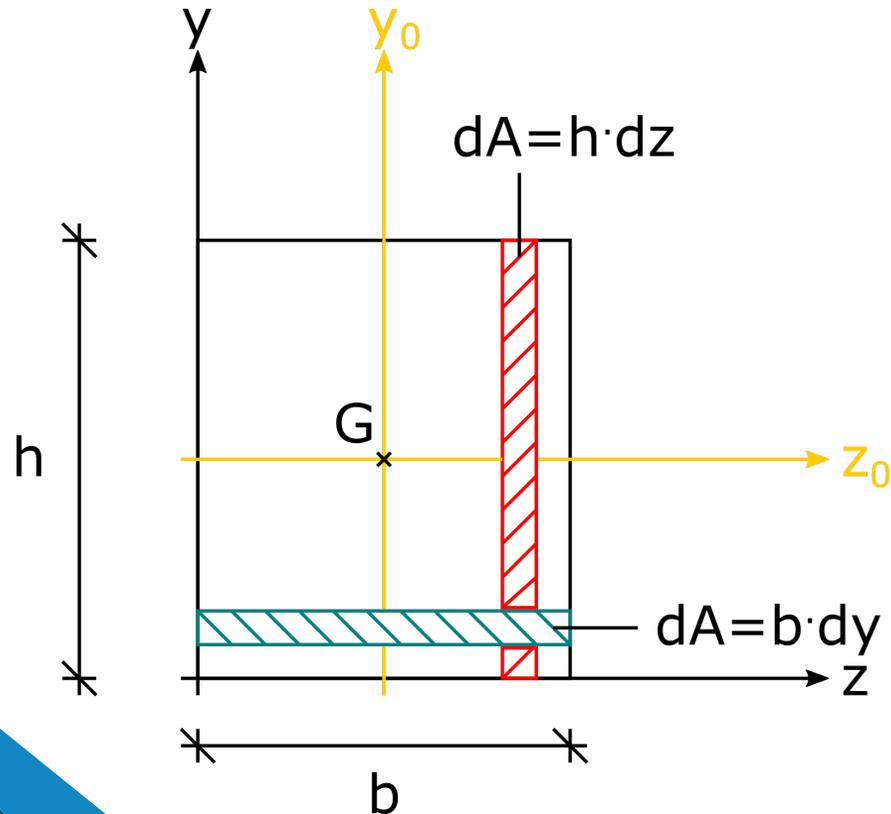
- Vamos fazer os cálculos para determinar o baricentro do retângulo:

$$z_G = \frac{M_{s,y}}{A}, A = b h$$

$$M_{s,y} = \int_S z dA = \int_0^b z h dz = h \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^b = \frac{h b^2}{2}$$

$$z_G = \frac{\frac{h b^2}{2}}{b h} = \frac{b}{2}$$

Exemplo: Retângulo



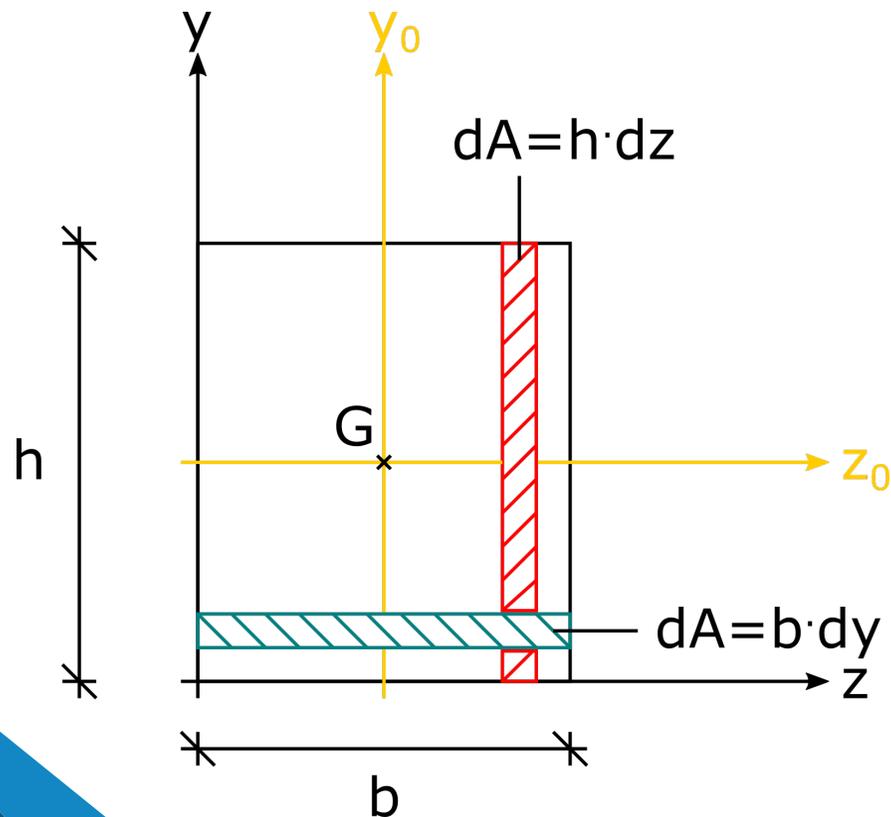
- Agora, para a posição y_G :

$$y_G = \frac{M_{S,z}}{A}, A = b h$$

$$M_{S,z} = \int_S y dA = \int_0^h y b dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b h^2}{2}$$

$$y_G = \frac{\frac{b h^2}{2}}{b h} = \frac{h}{2}$$

Exemplo: Retângulo



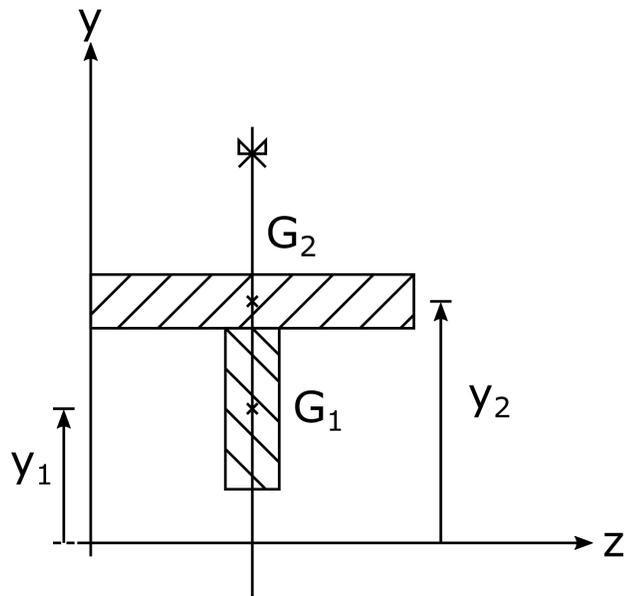
- Para mostrar que o eixo z_0 é o eixo no qual o momento estático é zero:

$$M_{S,z_0} = \int_S y dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y b dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

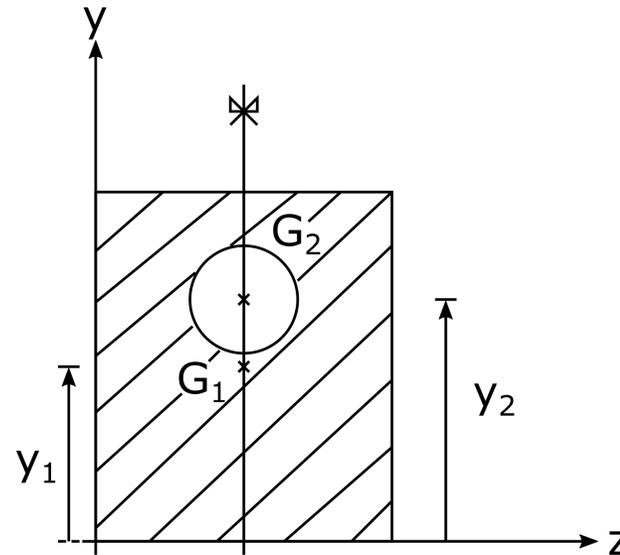
$$M_{S,z_0} = b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{h}{2} \right)^2 \right] = 0$$

Baricentro

- Nota importante: o baricentro **sempre** está sobre os eixos de simetria da área!

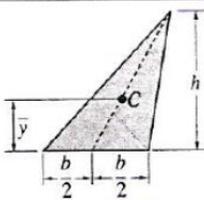
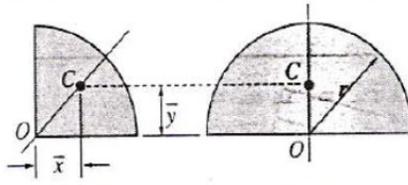
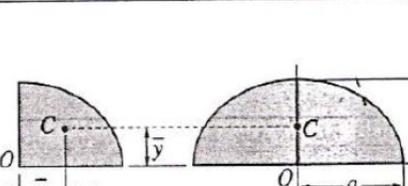
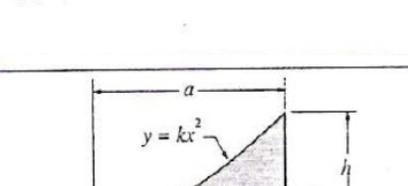
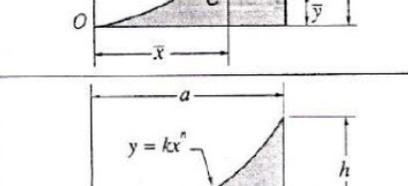
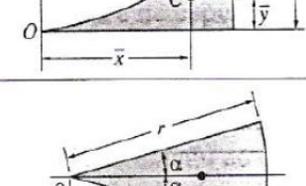


$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$



$$y_g = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

Centróides de formas comuns de superfícies

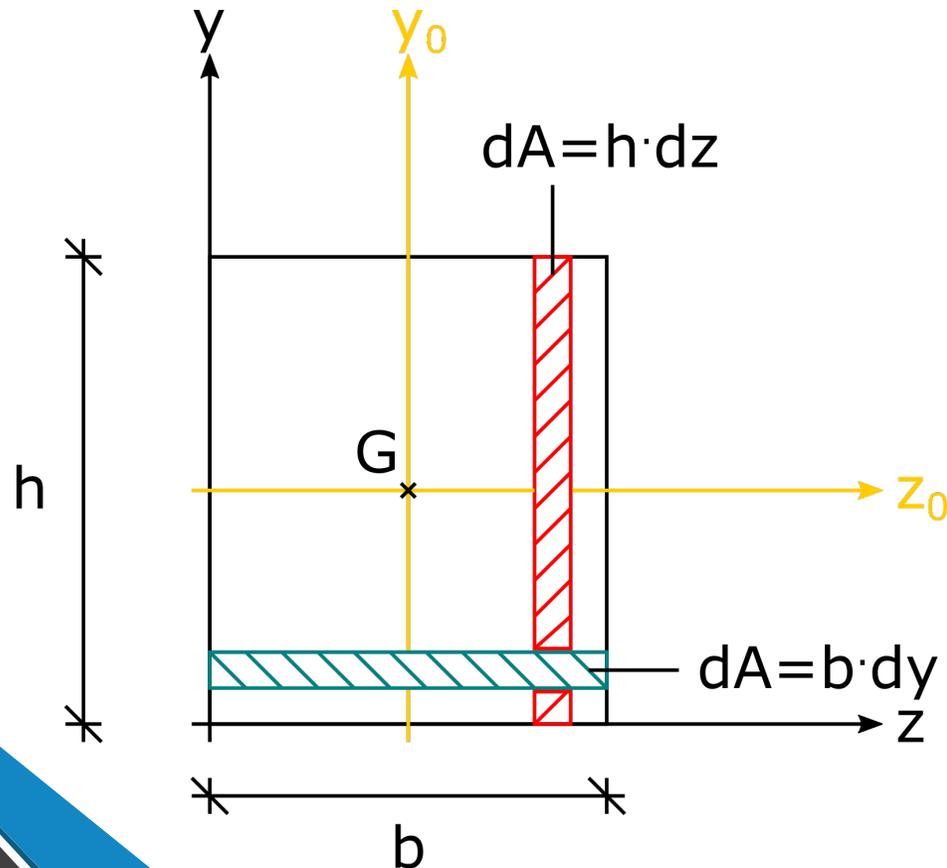
Forma de Superfície		\bar{x}	\bar{y}	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau.		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau n.		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Obs: Baricentro = Centróide

Momentos de Inércia

- Os momentos de inércia são importantes para a flexão → Determinam a rigidez a flexão (com o módulo de elasticidade do material determinam quão rígido uma barra é em relação à Flexão)

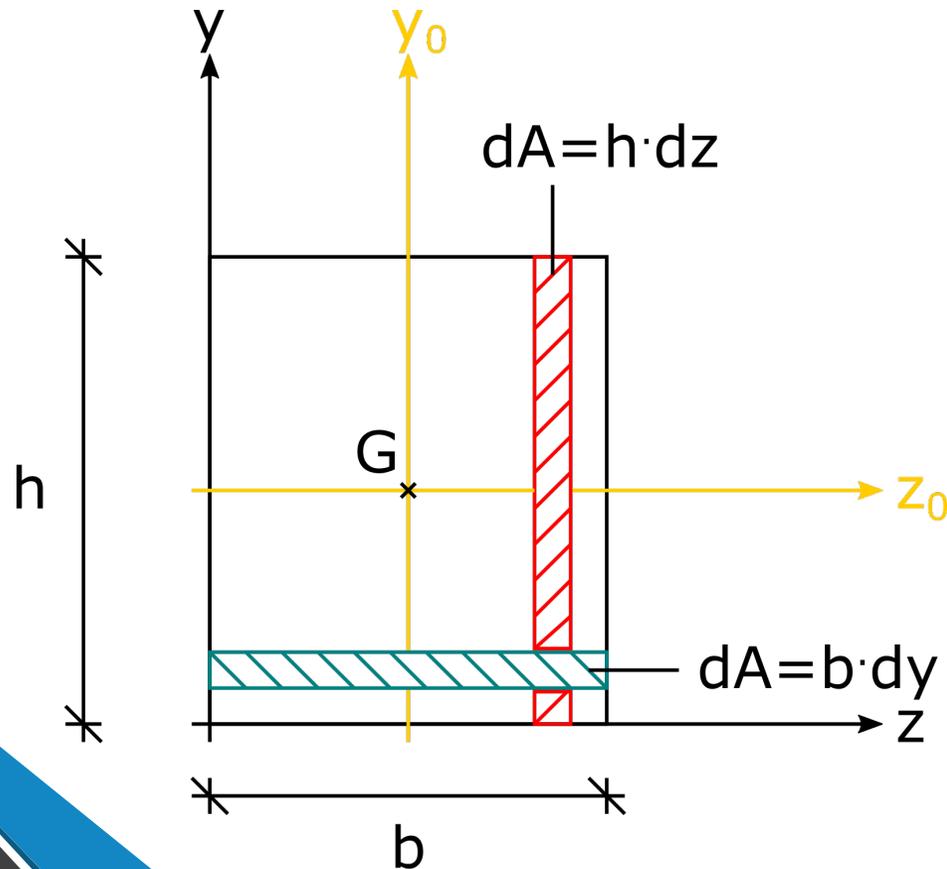
Momento de inércia: retângulo



- Para o retângulo que vimos anteriormente, vamos calcular os momentos de inércia em relação aos eixos y e z .
- Para o eixo z :

$$I_z = \int_S y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{b h^3}{3}$$

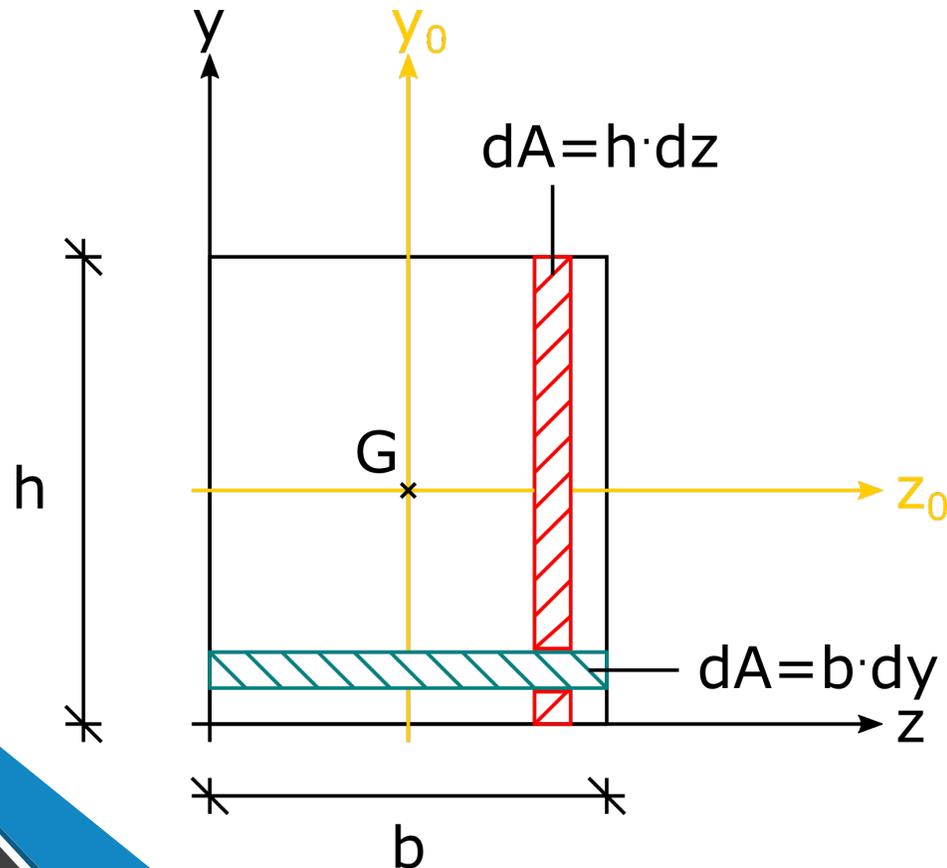
Momento de inércia: retângulo



- Para o eixo y:

$$I_y = \int_S z^2 dA = \int_0^b z^2 h dz = h \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^b = \frac{h b^3}{3}$$

Momento de inércia: retângulo

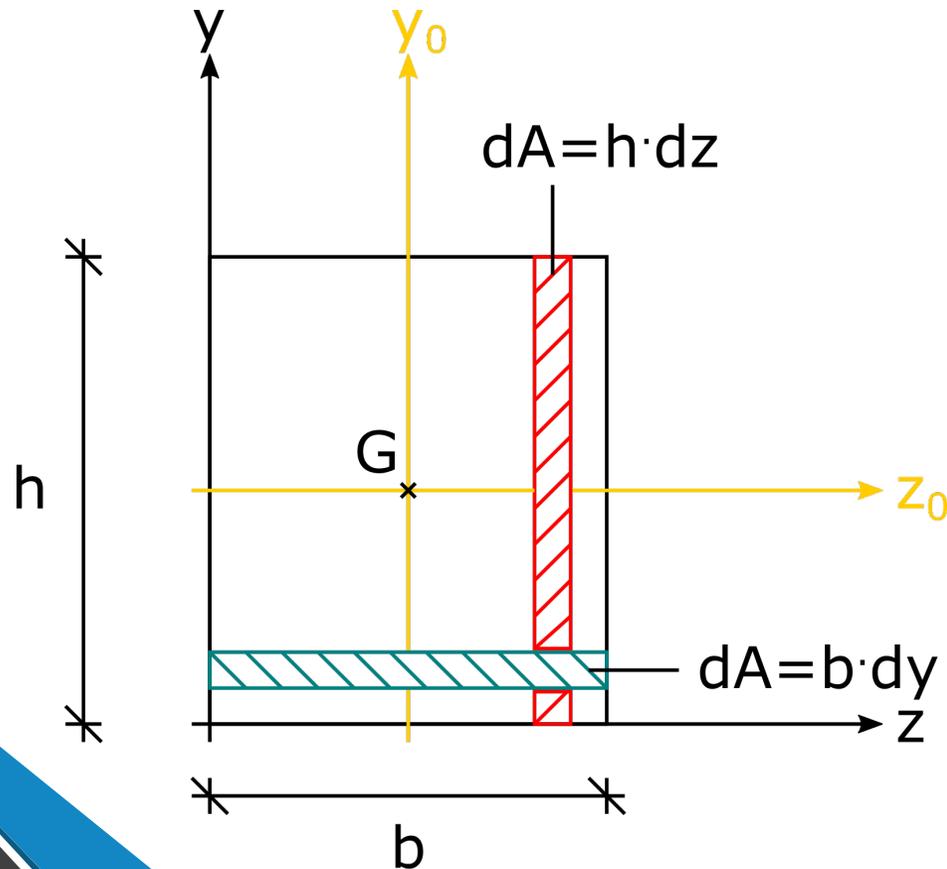


- Vamos repetir o procedimento para os eixos y_0 e z_0 .
- Para o eixo z_0 :

$$I_{z_0} = \int_S y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_{z_0} = b \left[\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b h^3}{12}$$

Momento de inércia: retângulo

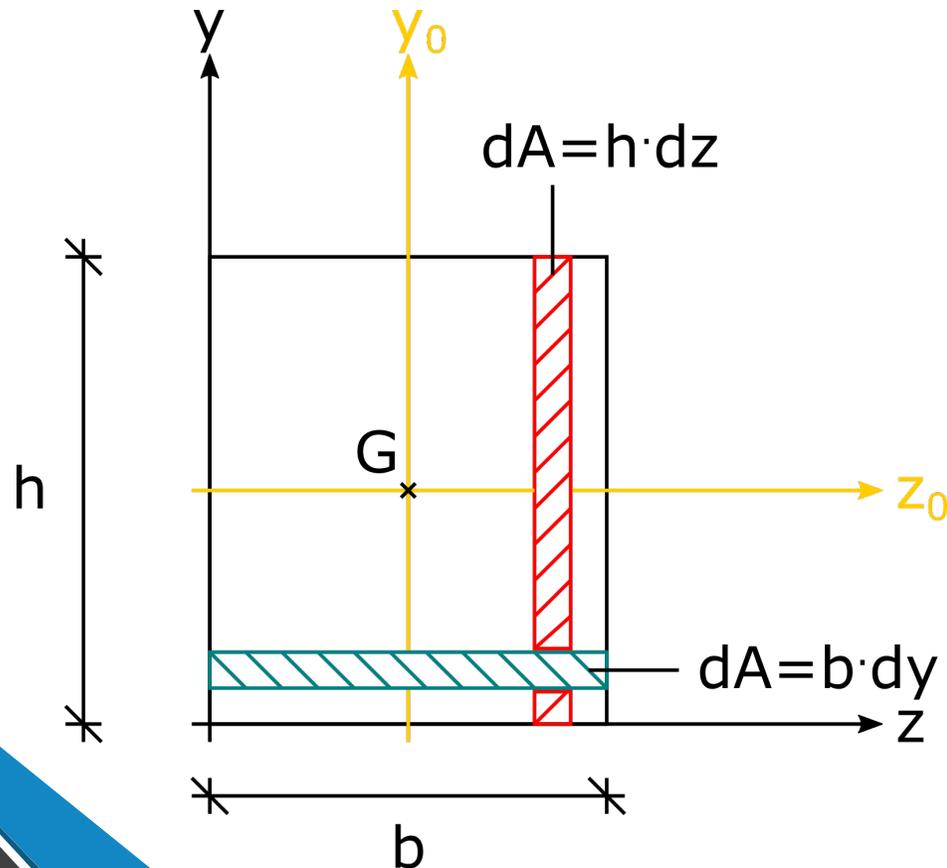


- Para o eixo y_0 :

$$I_{y_0} = \int_S z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

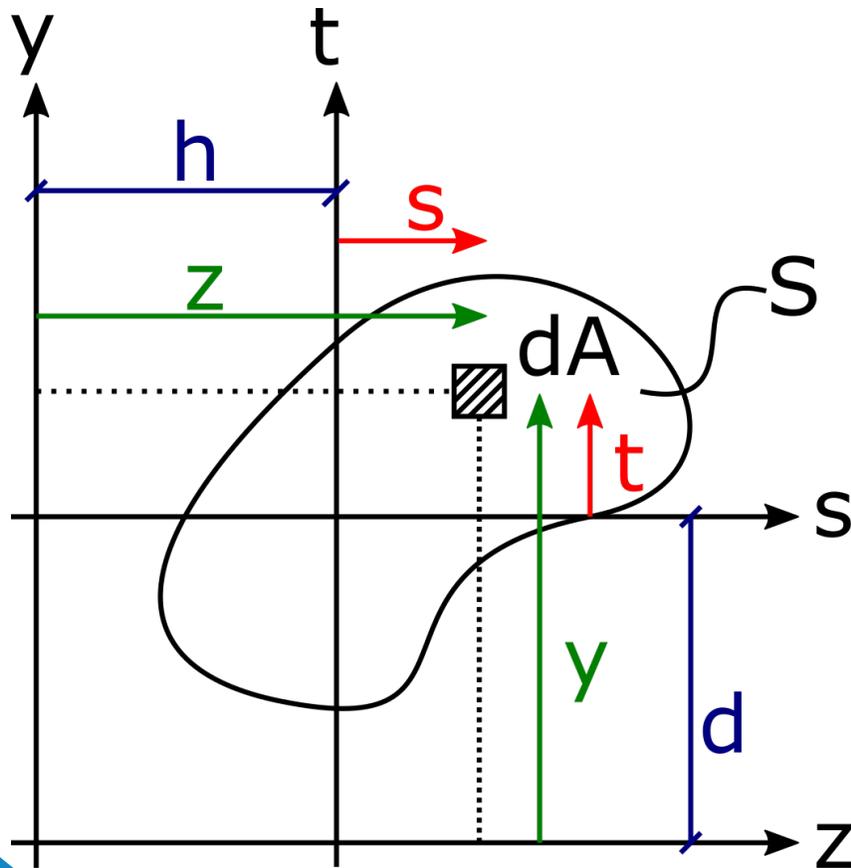
$$I_{y_0} = h \left[\frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right] = \frac{h b^3}{12}$$

Momento de inércia: retângulo



- Como pode ser visto, os momentos de inércia em relação aos eixos que passam pelo baricentro não são nulos, porém são mínimos!
- Como relacionar os momentos de inércia dos dois sistemas?

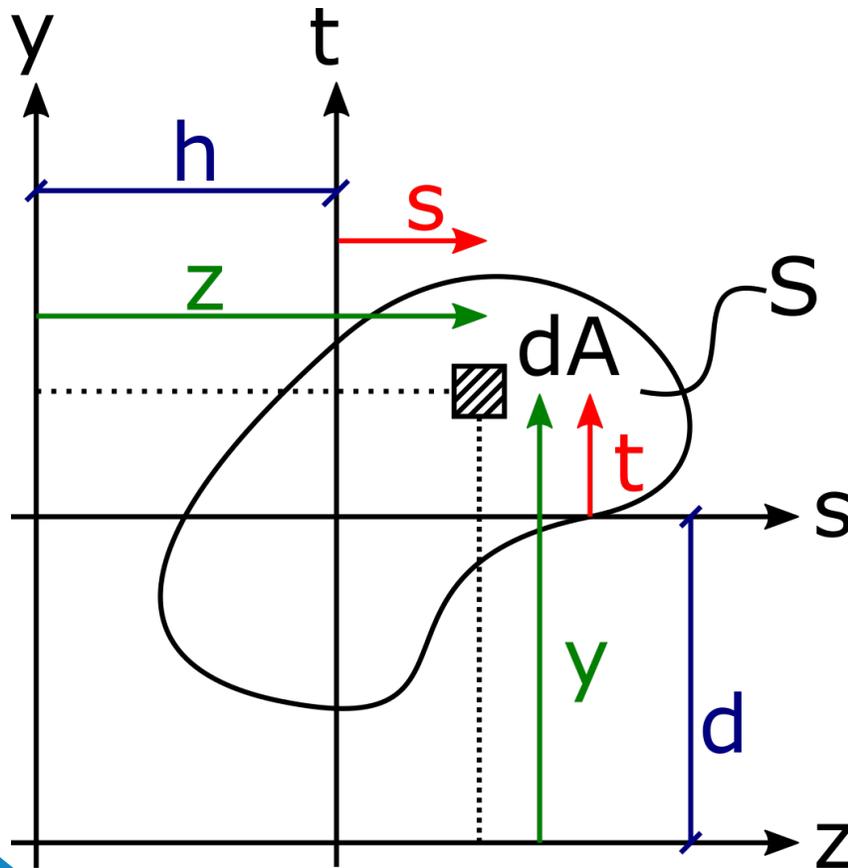
Teorema de Steiner



- Vamos analisar a relação entre os eixos z e s . Podemos escrever a relação entre as distâncias medidas entre a área infinitesimal e os eixos como:

$$y = t + d$$

Teorema de Steiner



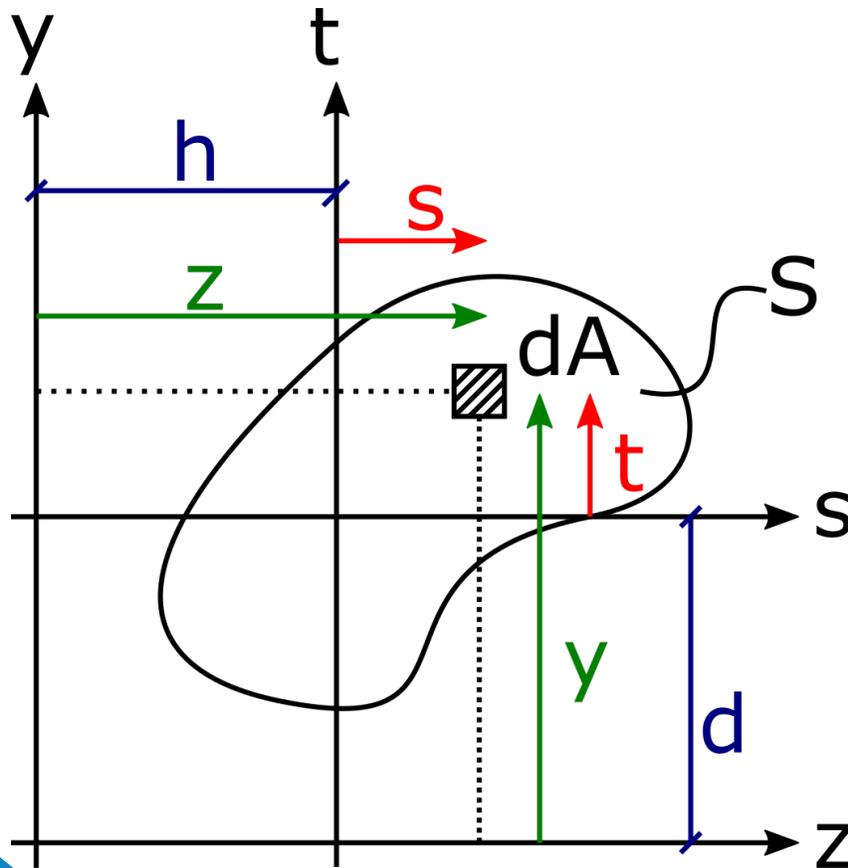
- Assim, podemos escrever o momento de inércia em relação ao eixo z como:

$$I_z = \int_S y^2 dA = \int_S (t + d)^2 dA = \int_S (t^2 + 2td + d^2) dA$$

$$I_z = \int_S t^2 dA + 2d \int_S t dA + d^2 \int_S dA$$

$$I_z = I_S + 2d M_{S,S} + d^2 A$$

Teorema de Steiner



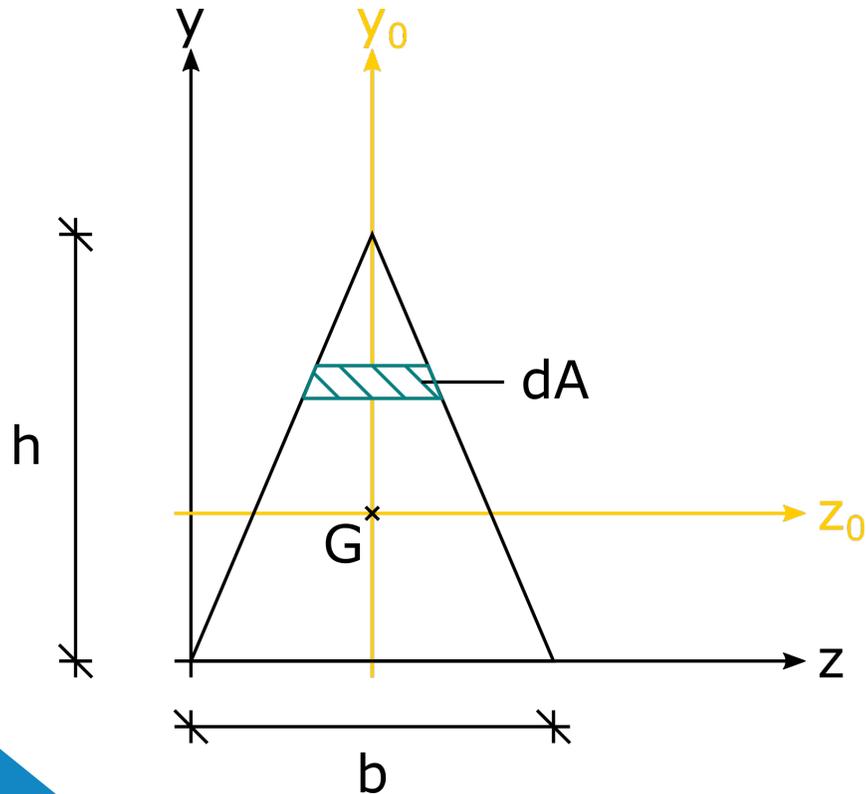
- Se o eixo s coincidir com o eixo que passa pelo baricentro z_0 (ou seja, $M_{z_0} = 0$):

$$I_z = I_{z_0} + d^2 A$$

- Se a figura é composta, é possível obter o baricentro da figura composta transportando todos os momentos de inércia para o eixo do baricentro da figura composta:

$$I_{z_0} = \sum_{i=1}^n (I_{z_0,i} + d_i^2 A_i)$$

Momento de inércia de um triângulo

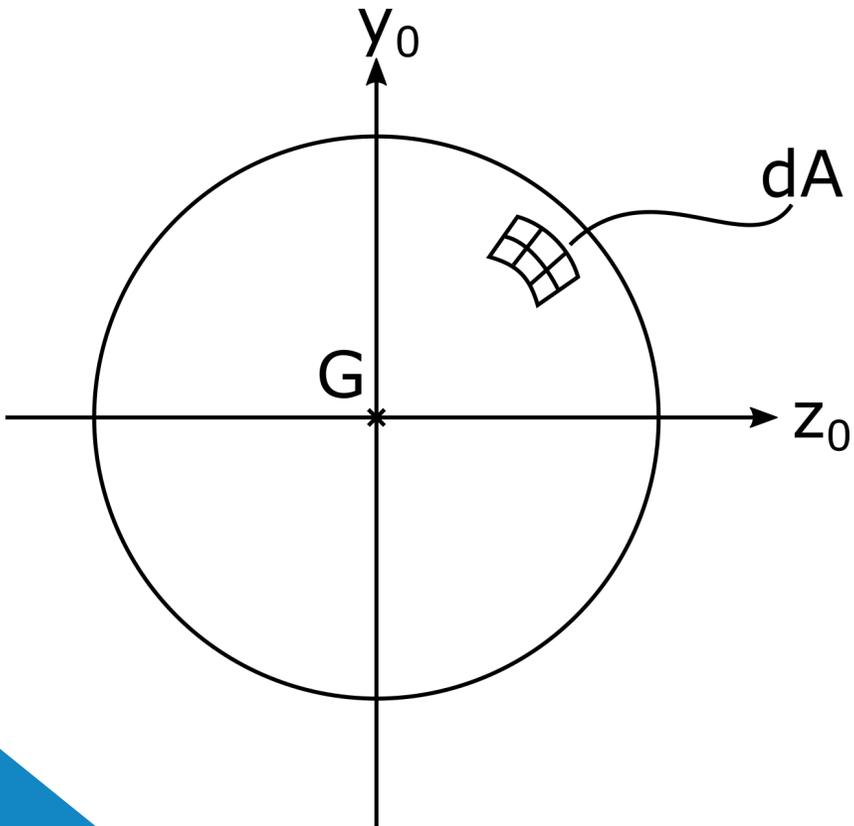


- É possível demonstrar que:

$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_{z_0} = \frac{b h^3}{36}$$

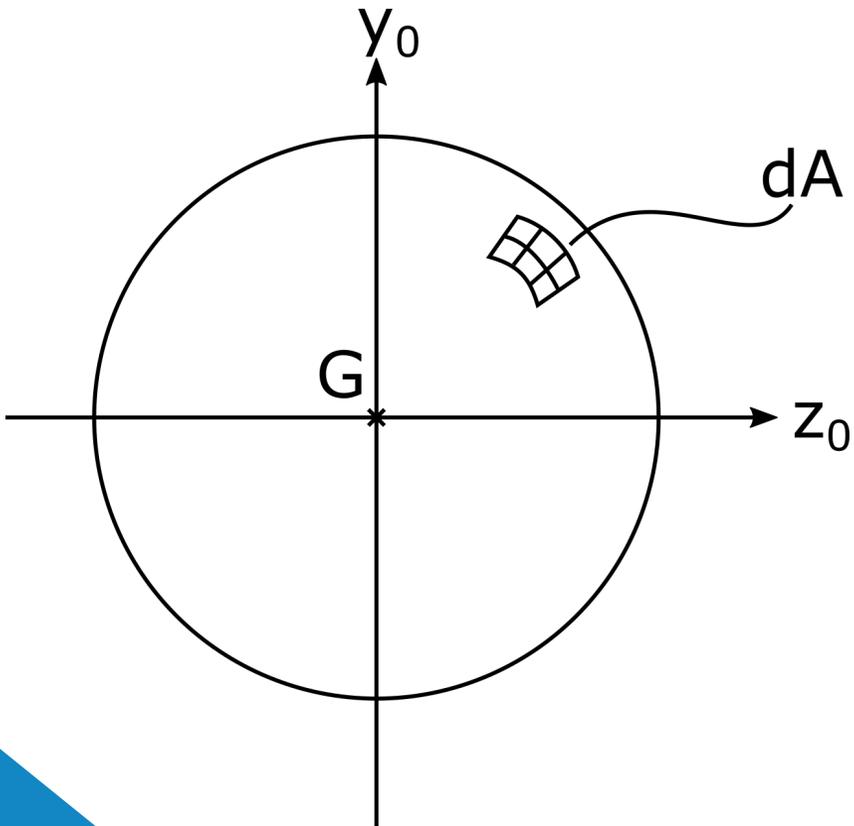
Momento de inércia de um círculo



- É possível demonstrar que:

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

Momento Polar de Inércia



- Para calcular o momento polar de inércia vamos utilizar um círculo. Assim:

$$J = \int_S r^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta$$

$$J = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

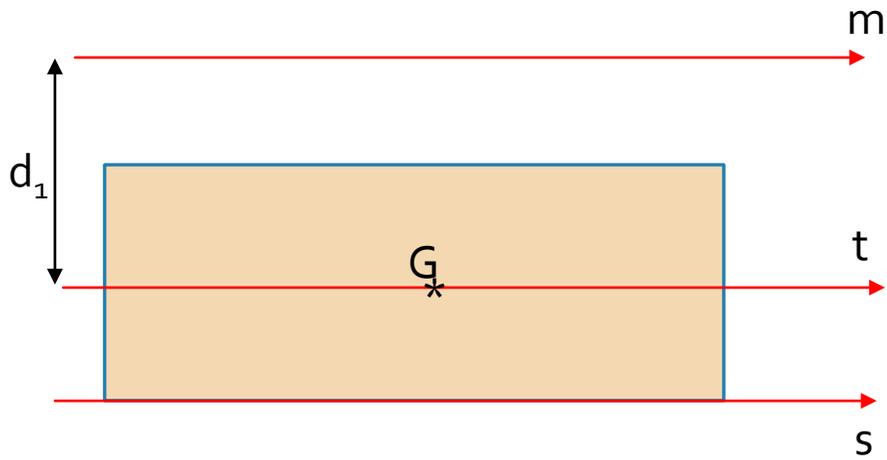
Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Teorema de Steiner

$$I_z = I_{z_0} + d^2 A$$

Retângulo		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$
Triângulo		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$
Círculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$
Semicírculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$

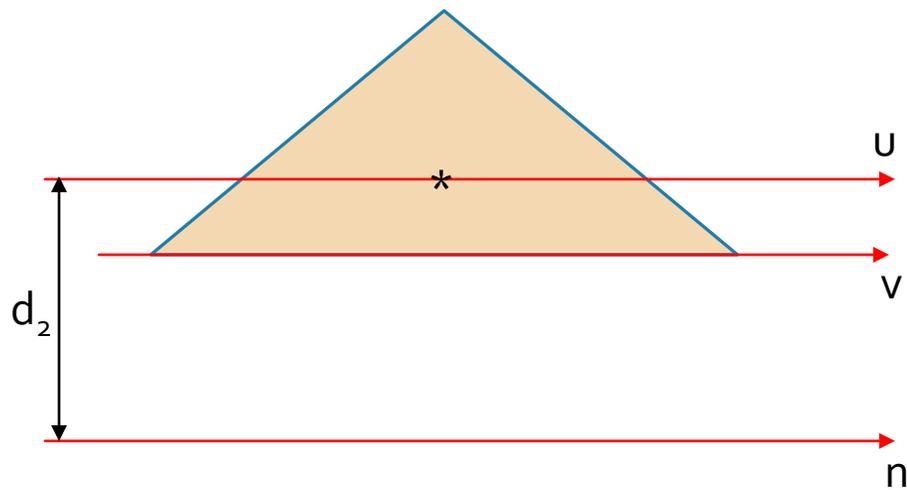
Quadrante		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{16}$
Elipse		$I_z = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4}$ $I_z = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4}$



$$I_t = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_s = \frac{b h^3}{3}$$

$$I_m = I_t + d_1^2 \cdot A$$



$$I_u = \frac{b h^3}{36}$$

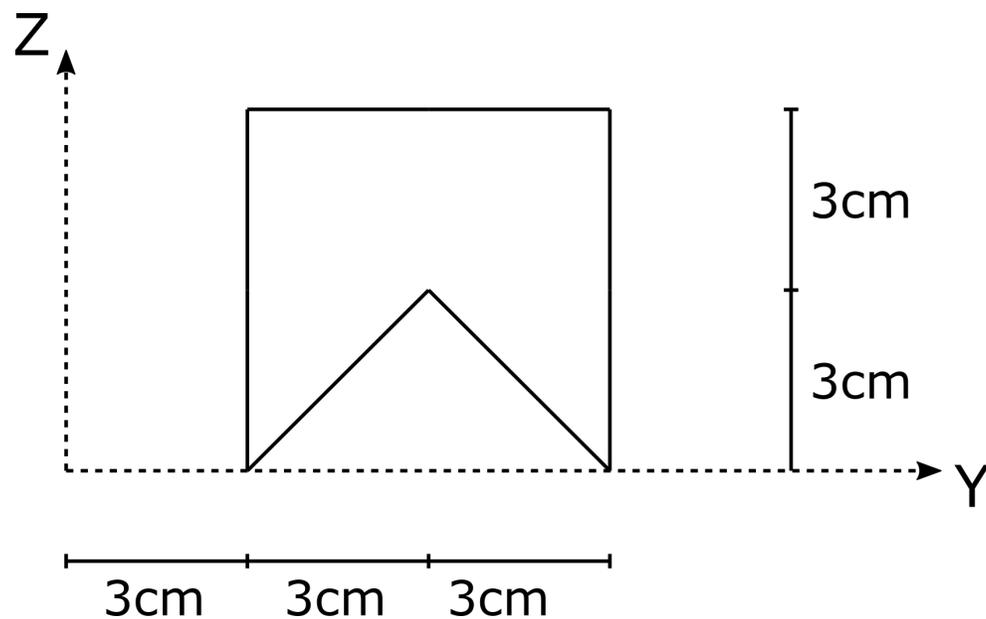
$$I_v = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_n = I_u + d_2^2 \cdot A$$

Exemplo: Prova P2 / 2019

1ª Questão: Considere a figura plana dada (pentágono) e determine:

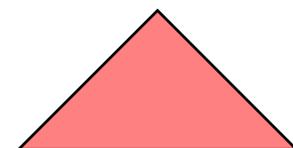
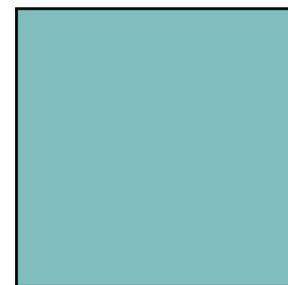
- A) O centro de gravidade G em relação aos eixos Y e Z dados;
- B) O momento de inércia em torno do **eixo vertical** que passa por G .



Exemplo: Prova P2 / 2019

Para o cálculo do item A) precisamos dividir a figura em áreas mais simples para o cálculo:

Considerando as figuras ao lado, podemos construir uma tabela com os valores e posições dos baricentros das figuras em relação aos eixos dados.



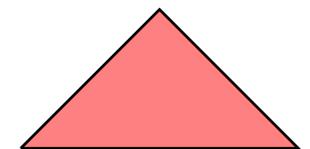
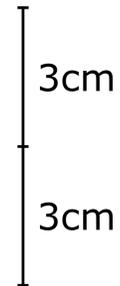
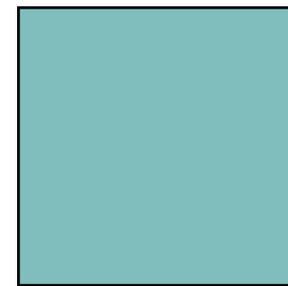
Exemplo: Prova P2 / 2019

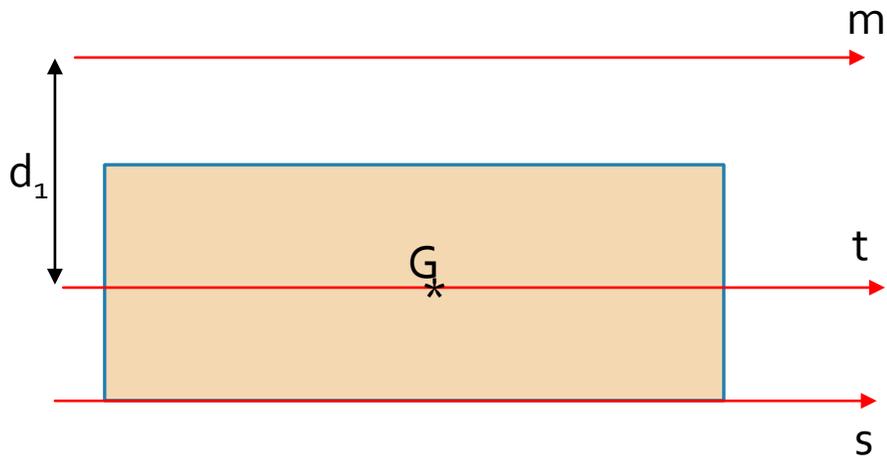
Área	y_G	z_G	A
I - Quadrado	6	3	36
II - Triângulo	6	1	9

$$y_G = \frac{y_I A_I + y_{II} A_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{6 \cdot 36 - 6 \cdot 9}{36 - 9} = 6 \text{ cm}$$

Está sobre o eixo de simetria

$$z_G = \frac{z_I A_I + z_{II} A_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{3 \cdot 36 - 1 \cdot 9}{36 - 9} = \frac{99}{27} = 3,67 \text{ cm}$$

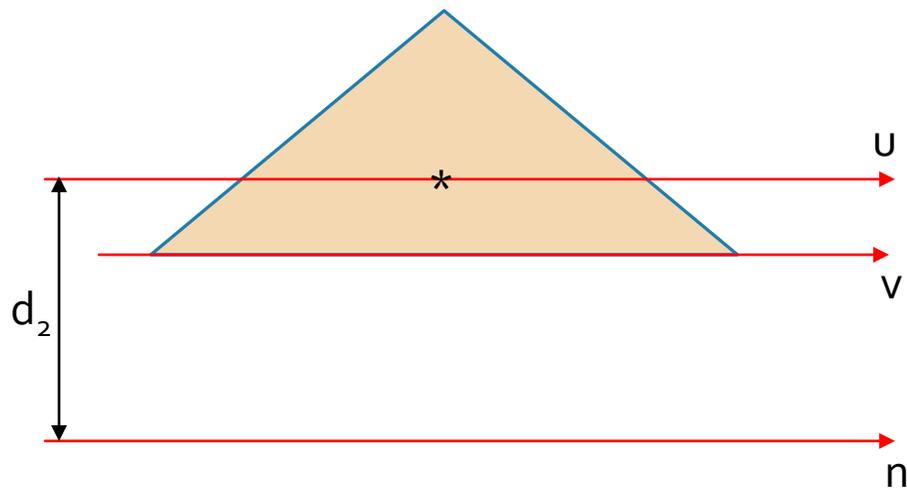




$$I_t = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_s = \frac{b h^3}{3}$$

$$I_m = I_t + d_1^2 \cdot A$$



$$I_u = \frac{b h^3}{36}$$

$$I_v = \frac{b h^3}{12}$$

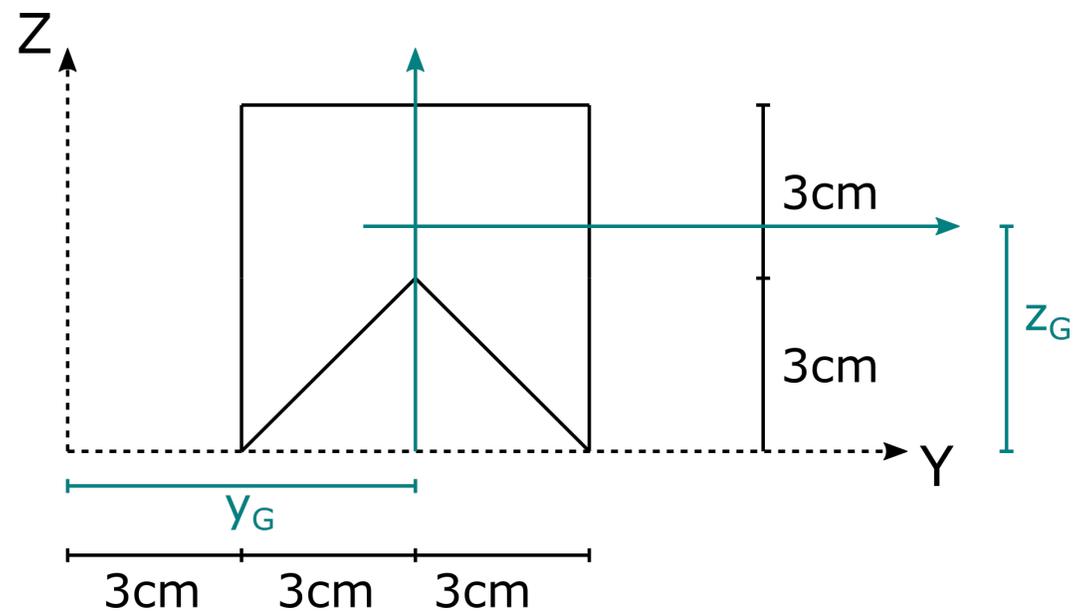
$$I_n = I_u + d_2^2 \cdot A$$

Exemplo: Prova P2 / 2019

Sendo assim:

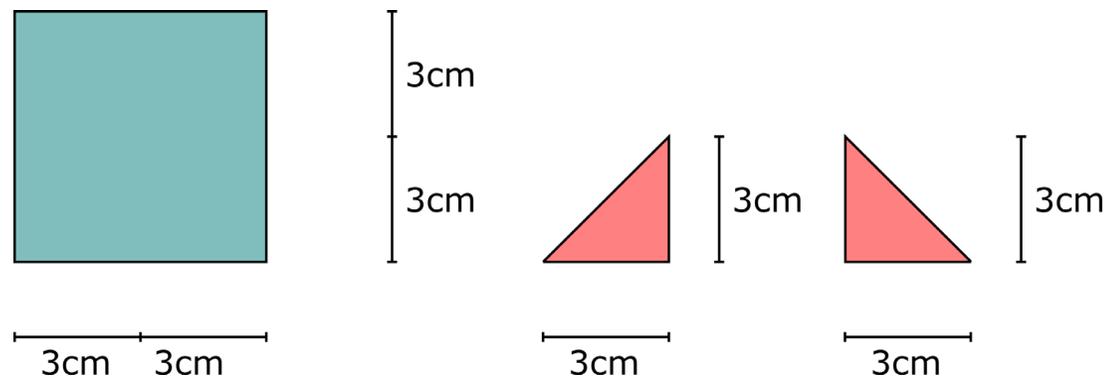
A) As coordenadas do baricentro G são $(6; 3,67)$.

Já para o item B, precisamos redividir as áreas com o triângulos cuja base esteja paralela ao eixo z .

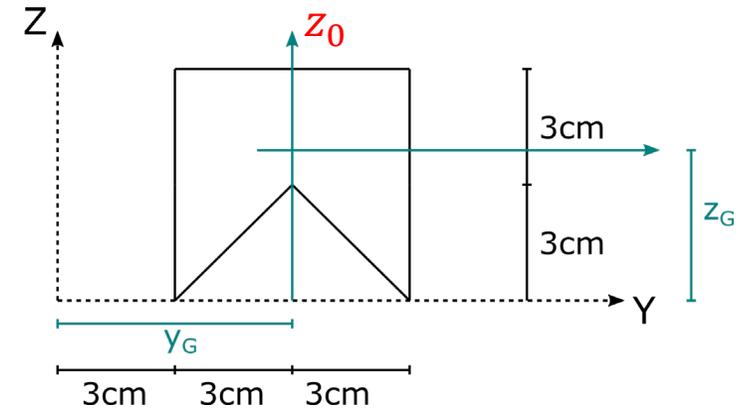


Exemplo: Prova P2 / 2019

Já para o item B, precisamos redividir as áreas com o triângulos cuja base esteja paralela ao eixo z.



Exemplo: Prova P2 / 2019

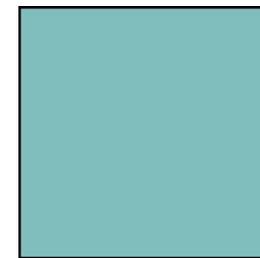


Dessa forma:

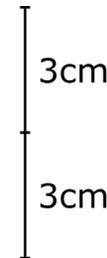
$$I_{z0} = I_{z0}^{quad} - 2I_{z0}^{tri}$$

$$I_{z0} = \left(\frac{6 \cdot 6^3}{12} \right) - 2 \left(\frac{3 \cdot 3^3}{36} + 1^2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \right)$$

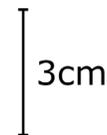
$$I_{z0} = 108 - 2(2,25 + 4,5) = 94,5 \text{ cm}^4$$



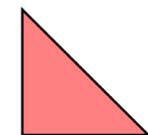
3cm 3cm



3cm



3cm

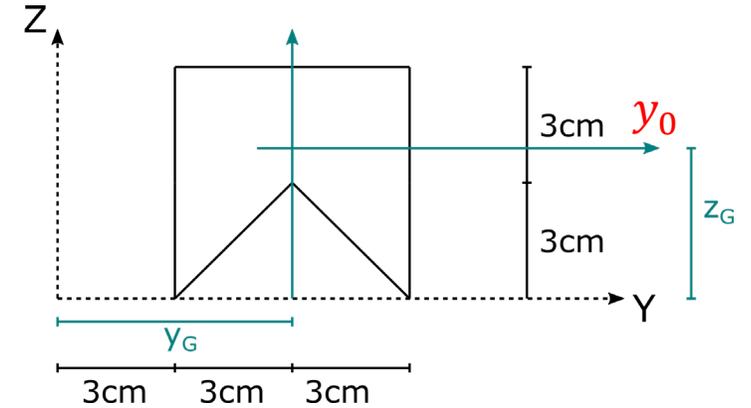


3cm



3cm

Exemplo: Prova P2 / 2019

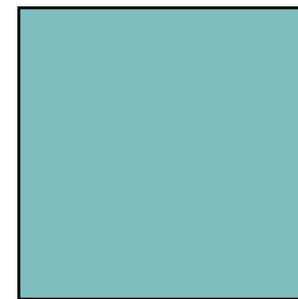


Apesar de não ser pedido no exercício, vamos calcular o momento de inércia na outra direção:

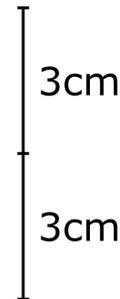
$$I_{y0} = I_{y0}^{quad} - I_{z0}^{tri}$$

$$I_{y0} = \left(\frac{6 \cdot 6^3}{12} + |3 - 3,67|^2 \cdot 36 \right) - \left(\frac{6 \cdot 3^3}{36} + |1 - 3,67|^2 \cdot 9 \right)$$

$$I_{y0} = (108 + 16) - (4,5 + 64) = 55,5 \text{ cm}^4$$

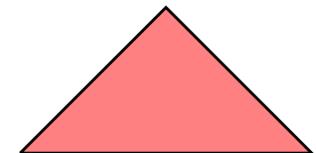


3cm 3cm



3cm

3cm



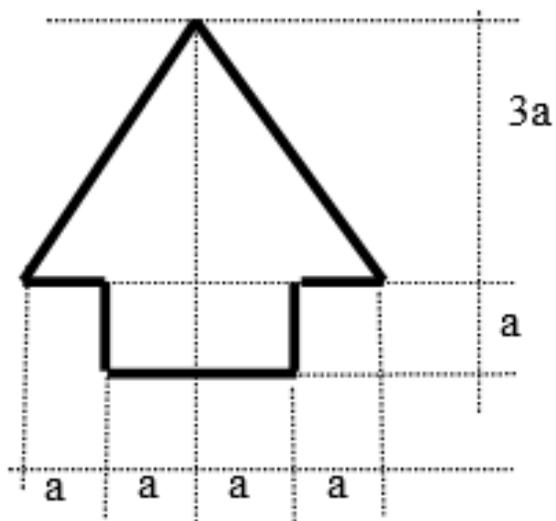
3cm

3cm 3cm

Questão B da SUB 2019

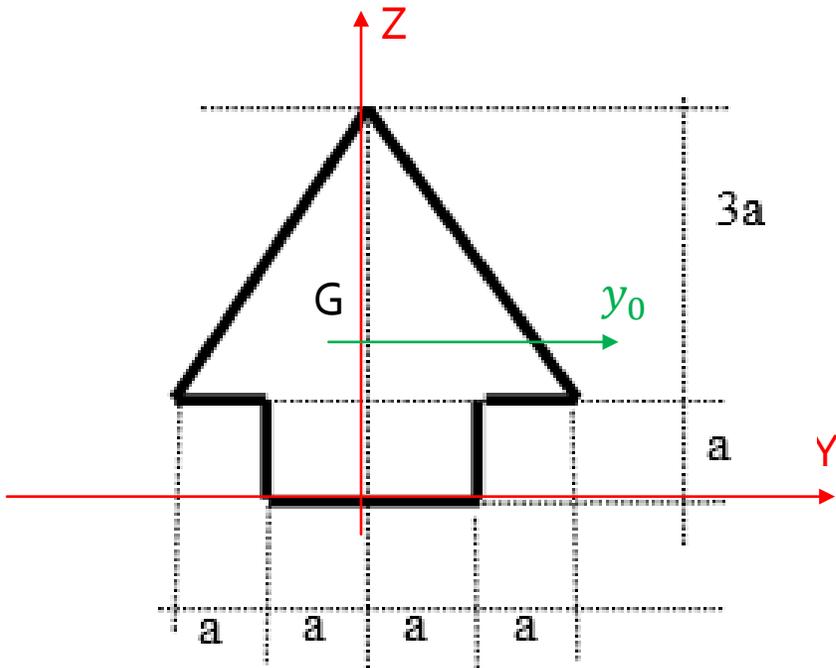
Questão B (3 pontos): Para a seção transversal da figura, determine:

- a posição de centro de gravidade G , fornecendo coordenadas e indicando os eixos de referência;
- o momento de inércia em relação ao eixo horizontal passando por G .



Questão B (3 pontos): Para a seção transversal da figura, determine:

- a posição de centro de gravidade G, fornecendo coordenadas e indicando os eixos de referência;
- o momento de inércia em relação ao eixo horizontal passando por G.



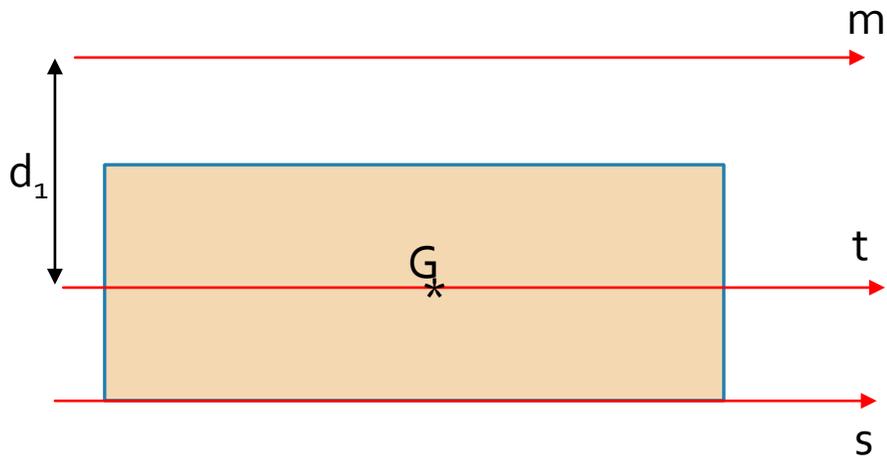
$$a) Y_G = 0$$

$$Z_G = \frac{\frac{4a \cdot 3a}{2} \cdot 2a + 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{4a \cdot 3a}{2} + 2a \cdot a} = \frac{13a}{8} = 1,625a$$

$$b) I_{y_0} = \left[\left(\frac{2a \cdot a^3}{12} \right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{13a}{8} \right)^2 \cdot (2a \cdot a) \right] +$$

$$+ \left(\frac{4a \cdot (3a)^3}{36} \right) + \left(2a - \frac{13a}{8} \right)^2 \cdot \left(\frac{4a \cdot 3a}{2} \right)$$

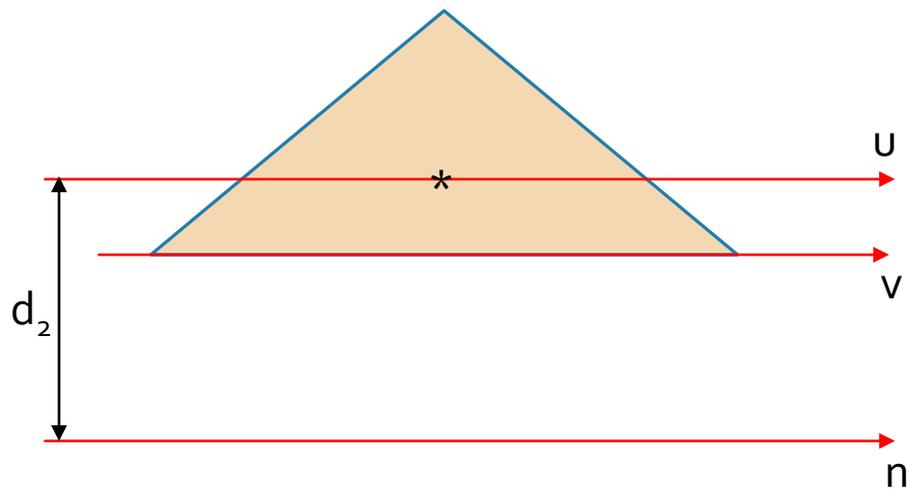
$$I_{y_0} = \frac{157 \cdot a^4}{24} = 6,542a^4$$



$$I_t = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_s = \frac{b h^3}{3}$$

$$I_m = I_t + d_1^2 \cdot A$$



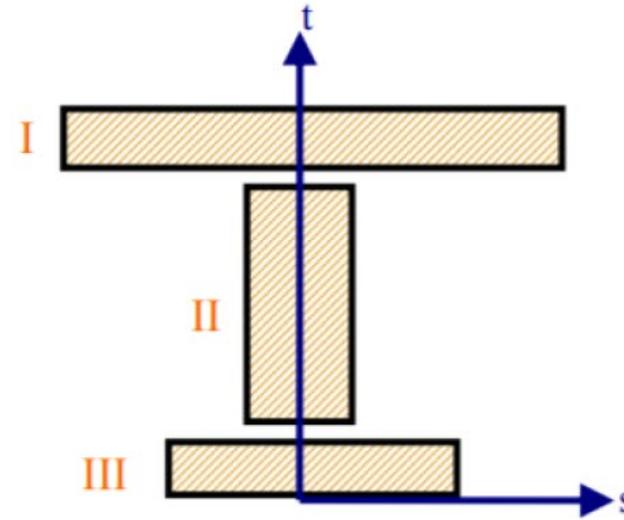
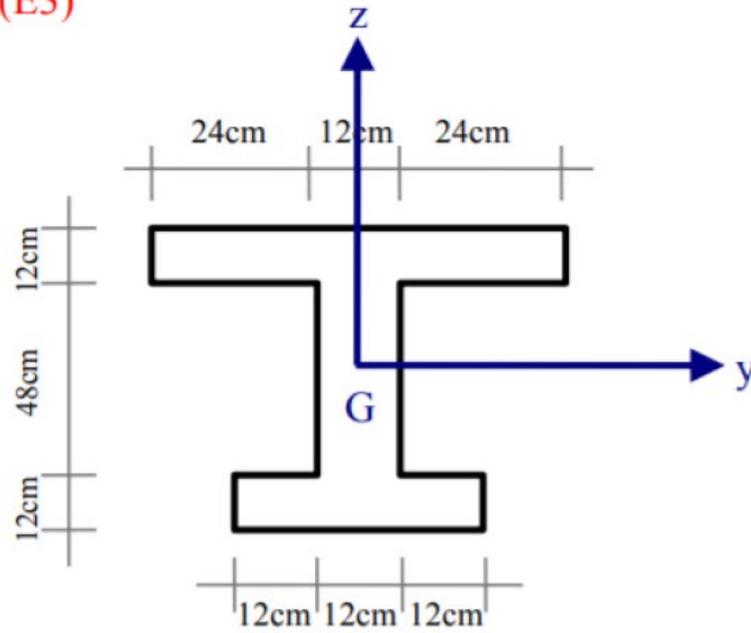
$$I_u = \frac{b h^3}{36}$$

$$I_v = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_n = I_u + d_2^2 \cdot A$$

Calcule os Momentos de Inércia em relação aos seus eixos principais de inércia.

(E3)

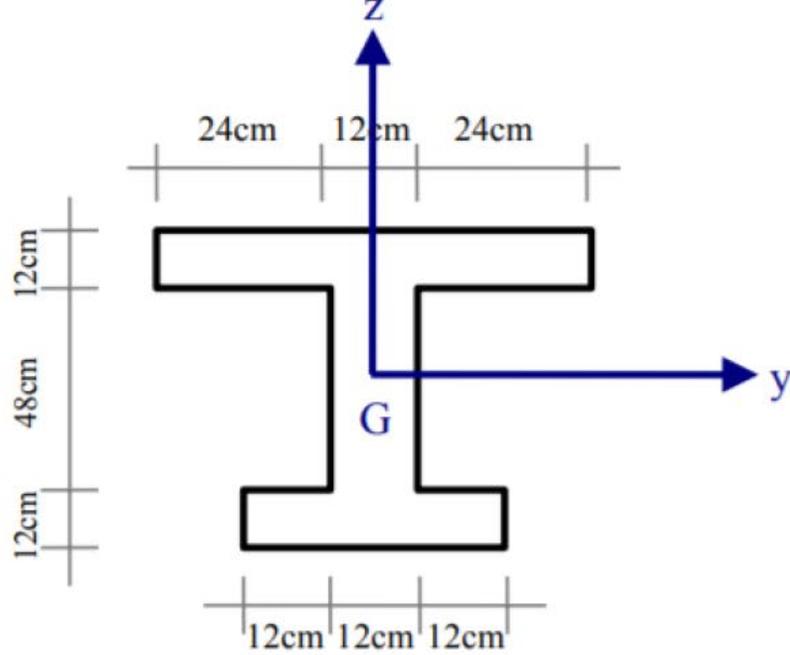


1) Calculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 0$ Pois Ot é um eixo de simetria da peça.

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} + A_{II} \cdot t_{CGII} + A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I + A_{II} + A_{III}}$$

$$t_{CG} = \frac{60 \cdot 12 \cdot 66 + 12 \cdot 48 \cdot 36 + 36 \cdot 12 \cdot 6}{60 \cdot 12 + 12 \cdot 48 + 36 \cdot 12} \rightarrow t_{CG} = 41 \text{ cm}$$



2) Momento de Inércia em relação ao eixo Oy.

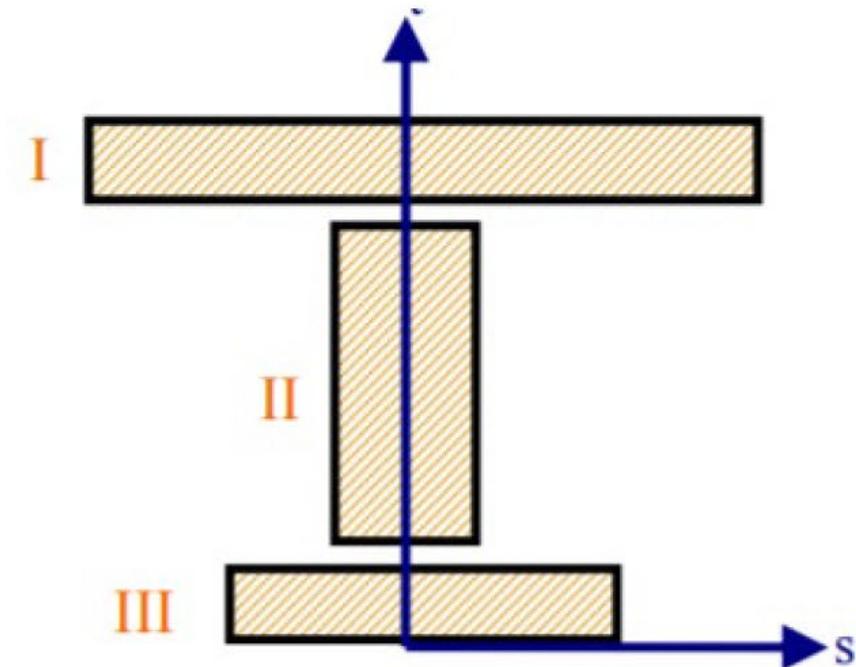
$$I_y = I_{Iy} + I_{IIy} + I_{IIIy}$$

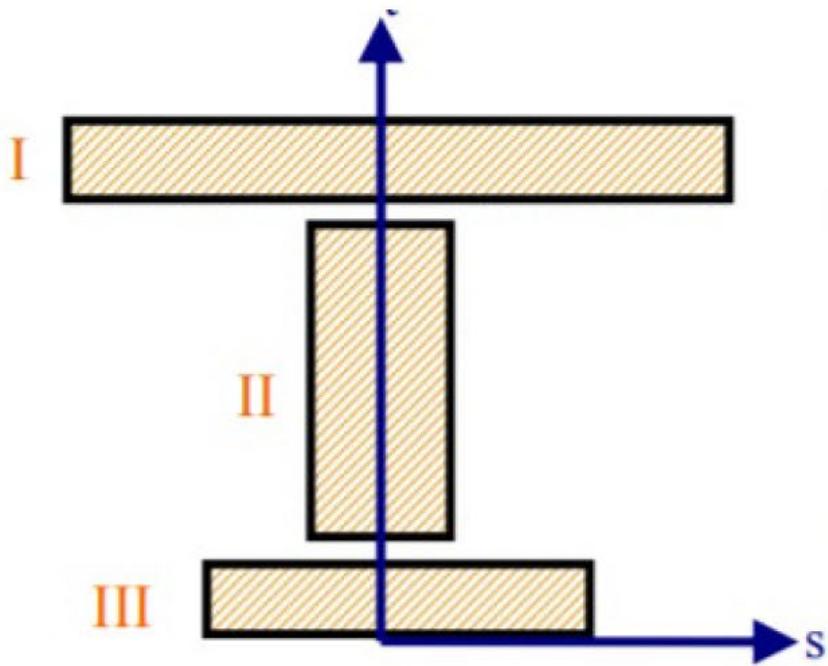
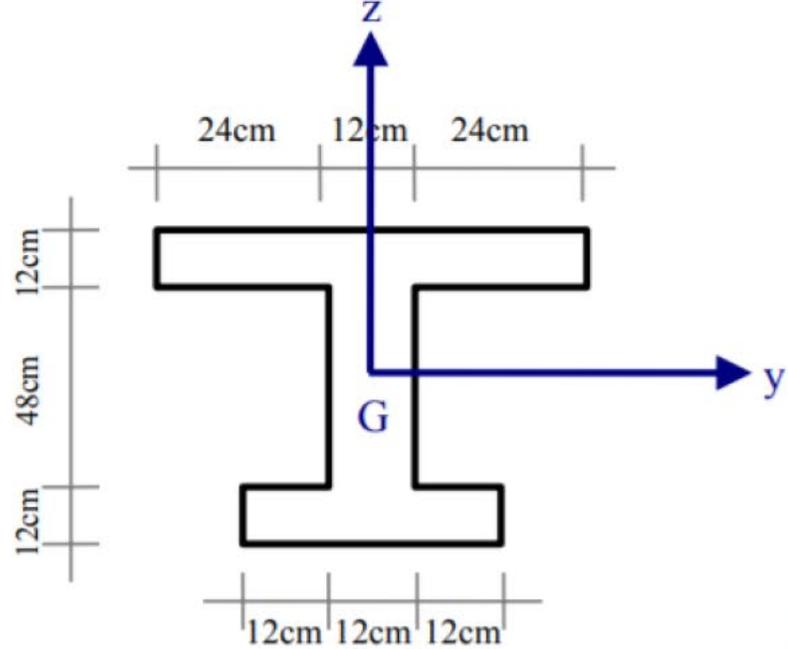
$$I_{Iy} = I_{Is} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iy} = \frac{60 \cdot 12^3}{12} + 60 \cdot 12 \cdot (66 - 41)^2 = 458\,640 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIy} = I_{IIs} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIy} = \frac{12 \cdot 48^3}{12} + 12 \cdot 48 \cdot (36 - 41)^2 = 124\,992 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIy} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIy} = \frac{36 \cdot 12^3}{12} + 36 \cdot 12 \cdot (6 - 41)^2 = 534\,384 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 458\,640 + 124\,992 + 534\,384 = 1\,118\,016 \text{ (cm}^4\text{)}$$





3) Momento de Inércia em relação ao eixo Oz.

$$I_z = I_{Iz} + I_{IIz} + I_{IIIz}$$

$$I_{Iz} = I_{It} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iz} = \frac{12 \cdot 60^3}{12} = 216\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIz} = I_{IIt} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIz} = \frac{48 \cdot 12^3}{12} = 6\,912 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIz} = I_{IIIt} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIz} = \frac{12 \cdot 36^3}{12} = 46\,656 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 216\,000 + 6\,912 + 46\,656 = 269\,568 \text{ (cm}^4\text{)}$$

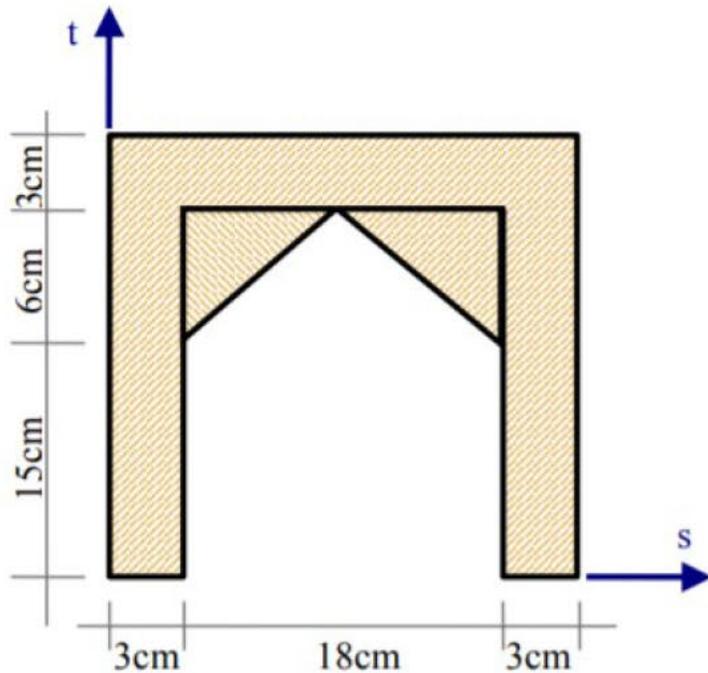
4) Conclusão: a peça é mais estável em torno do eixo Oy.

(E5) Para a seção transversal da figura abaixo, determine:

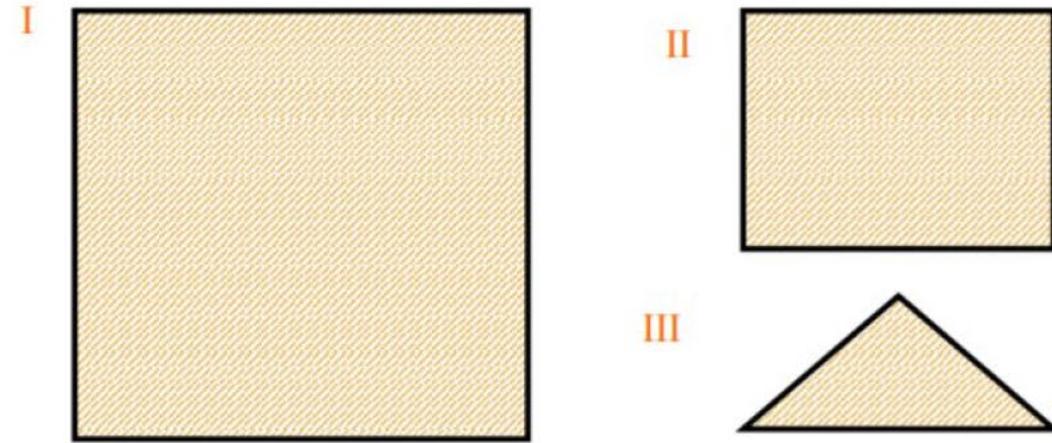
a) A posição do centro de gravidade (fornecer as coordenadas e indicar os eixos de referência).

b) Os momentos principais (centrais) de inércia.

c) As direções dos eixos principais (centrais) de inércia.



Decompondo a peça em 3 partes temos:



1) Cálculo da Área.

$$A = A_I - A_{II} - A_{III} \rightarrow A = 24 \cdot 24 - 18 \cdot 15 - \frac{18 \cdot 6}{2} \rightarrow A = 252 \text{ cm}^2$$

2) Cálculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 12 \text{ cm}$ Pois um eixo perpendicular a Os em 12 cm divide a peça simetricamente.

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} - A_{II} \cdot t_{CGII} - A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I - A_{II} - A_{III}}$$

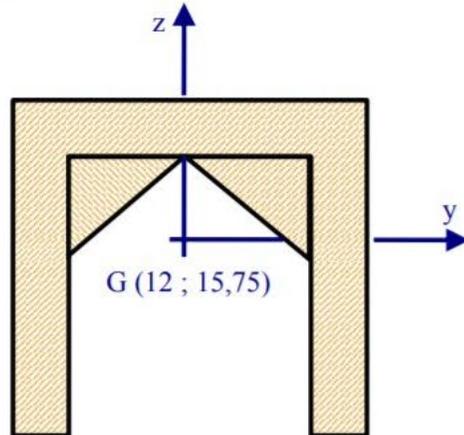
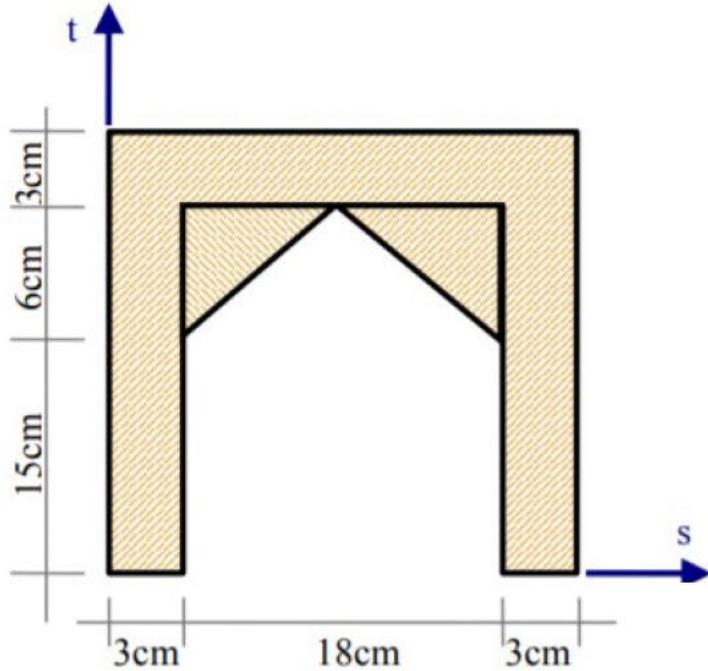
$$t_{CG} = \frac{24 \cdot 24 \cdot 12 - 18 \cdot 15 \cdot 7,5 - \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot 17}{252} \rightarrow t_{CG} = 15,75 \text{ cm}$$

(E5) Para a seção transversal da figura abaixo, determine:

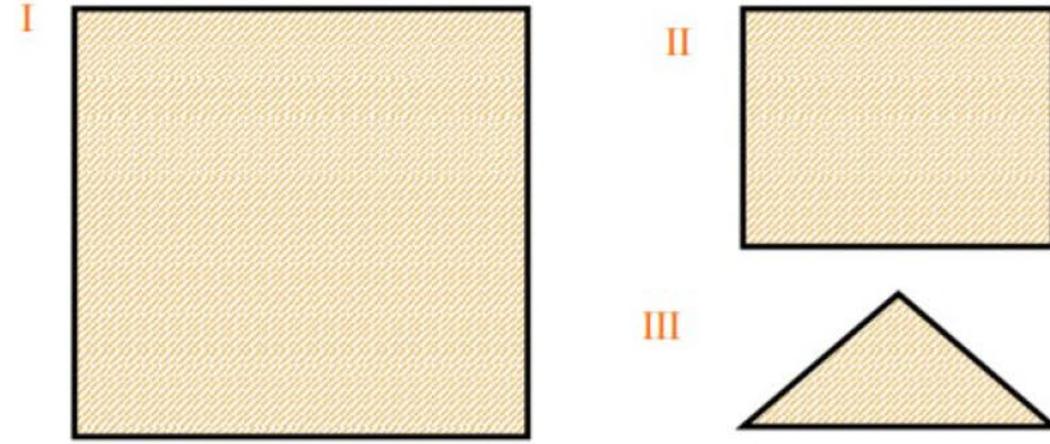
a) A posição do centro de gravidade (fornecer as coordenadas e indicar os eixos de referência).

b) Os momentos principais (centrais) de inércia.

c) As direções dos eixos principais (centrais) de inércia.



Decompondo a peça em 3 partes temos:



1) Cálculo da Área.

$$A = A_I - A_{II} - A_{III} \rightarrow A = 24 \cdot 24 - 18 \cdot 15 - \frac{18 \cdot 6}{2} \rightarrow A = 252 \text{ cm}^2$$

2) Cálculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 12 \text{ cm}$ Pois um eixo perpendicular a Os em 12 cm divide a peça simetricamente

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} - A_{II} \cdot t_{CGII} - A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I - A_{II} - A_{III}}$$

$$t_{CG} = \frac{24 \cdot 24 \cdot 12 - 18 \cdot 15 \cdot 7,5 - \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot 17}{252} \rightarrow t_{CG} = 15,75 \text{ cm}$$

3) Momento de Inércia em relação ao eixo Oy.

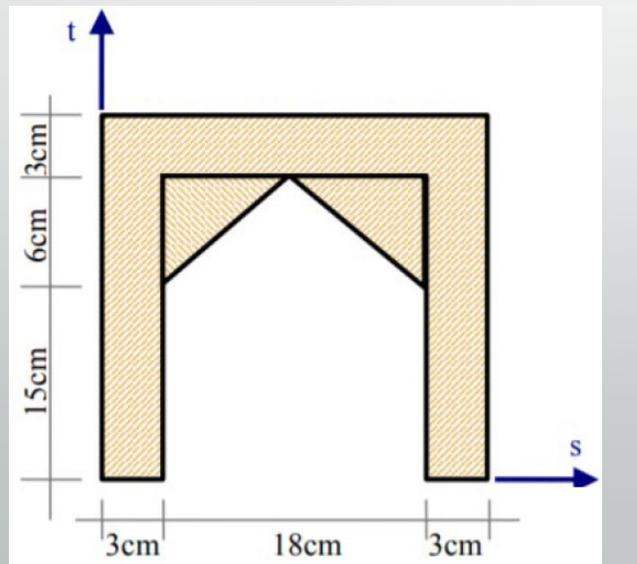
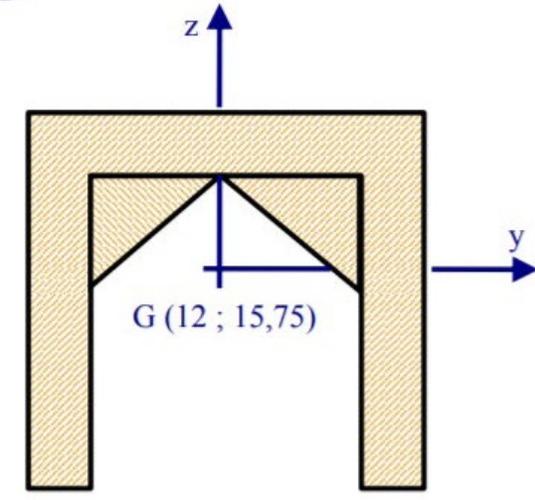
$$I_y = I_{Iy} - I_{IIy} - I_{IIIy}$$

$$I_{Iy} = I_{Is} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iy} = \frac{24 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 24 \cdot (12 - 15,75)^2 = 35\,748 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIy} = I_{IIs} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIy} = \frac{18 \cdot 15^3}{12} + 18 \cdot 15 \cdot (7,5 - 15,75)^2 = 23\,439 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIy} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIy} = \frac{18 \cdot 6^3}{36} + \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot (17 - 15,75)^2 = 192 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 35\,748 - 23\,439 - 192 = 12\,116 \text{ (cm}^4\text{)}$$



4) Momento de Inércia em relação ao eixo Oz.

$$I_z = I_{Iz} - I_{IIz} - I_{IIIz}$$

$$I_{Iz} = I_{It} + A_I \cdot 0^2 \rightarrow I_{Iz} = \frac{24 \cdot 24^3}{12} = 27\,648 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIz} = I_{IIIt} + A_{II} \cdot 0^2 \rightarrow I_{IIz} = \frac{15 \cdot 18^3}{12} = 7\,290 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIz} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIz} = 2 \cdot \left(\frac{6.9^3}{36} + \frac{6.9}{2} \cdot 3^2 \right) = 729 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 27\,648 - 7\,290 - 729 = 19\,629 \text{ (cm}^4\text{)}$$

5) Conclusão: a peça é mais estável em torno do eixo Oz.