Circuitos Trifásicos

Prof. Josemir C. Santos

Circuitos Trifásicos - Aula 1

1.1 - Definições básicas

- **Sistema trifásico - por que são usados sistemas 3ϕ ?**
  - **Economia de fios**
- **Sistemas trifásicos simétricos e assimétricos**
- **Cargas equilibradas e desequilibradas**

1.2 - Seqüência de fases

1.3 - Operador α

1.4 - Ligação Estrela

- **Grandezas de fase e de linha e a relação entre elas**

Circuitos Trifásicos - Aula 1

Define-se como "sistema de tensões trifásico e simétrico" (a 3 fases) um sistema de tensões do tipo:

$$e_1 = E_M \cos \omega t = \Re e\left[E_M e^{j\omega t}\right]$$

$$e_2 = E_M \cos(\omega t - 2\pi/3) = \Re e\left[E_M e^{-j2\pi/3} e^{j\omega t}\right]$$

$$e_3 = E_M \cos(\omega t - 4\pi/3) = E_M \cos(\omega t + 2\pi/3) = \Re e\left[E_M e^{j2\pi/3} e^{j\omega t}\right]$$

E, pelos fasores, tem-se:

$$\dot{E}_1 = E + j\,0 = E\,\underline{|0^\circ}$$

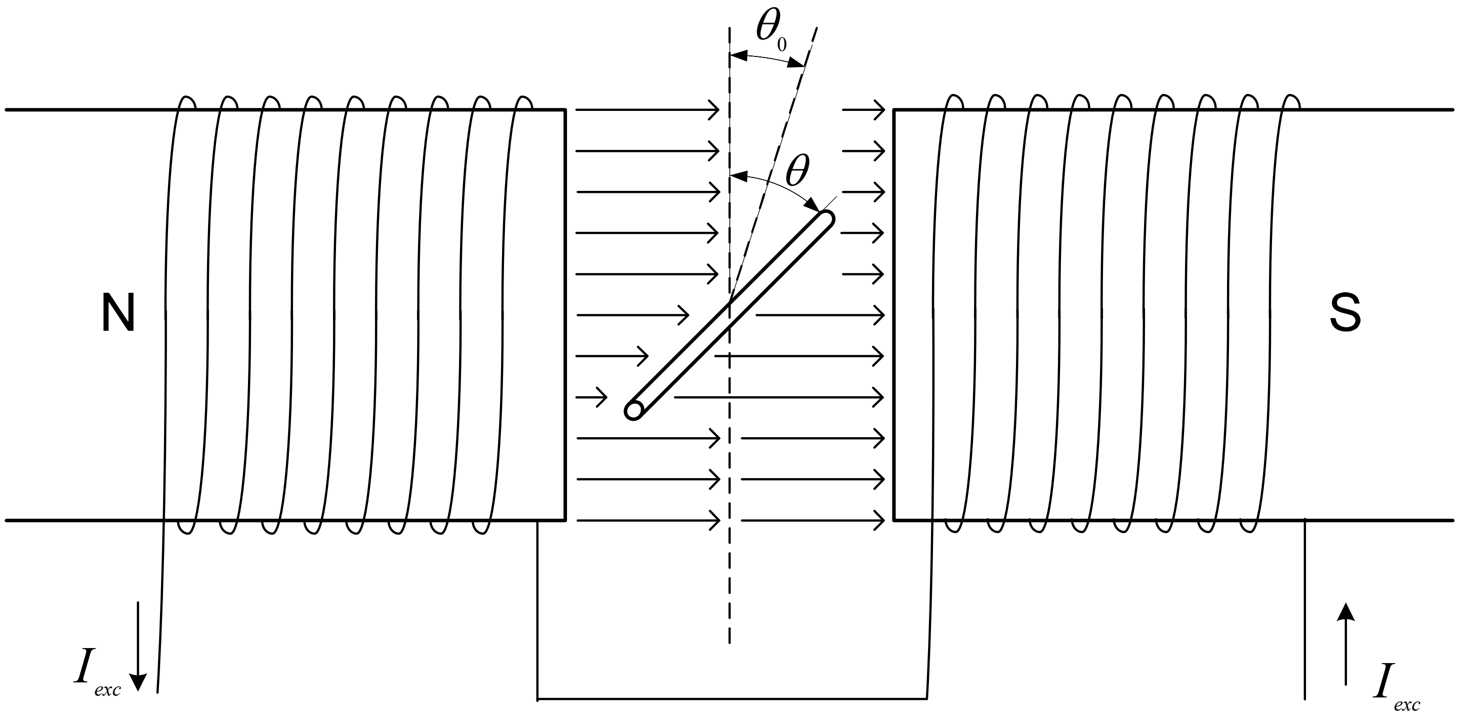
$$\dot{E}_2 = E\left[\cos(-2\pi/3) + j\,sen(-2\pi/3)\right] = E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E\,\underline{|-120^\circ}$$

$$\dot{E}_3 = E\left[\cos(+2\pi/3) + j\,sen(+2\pi/3)\right] = E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = E\,\underline{|120^\circ}$$

em que $E = E_M/\sqrt{2}$ representa o valor eficaz da tensão.

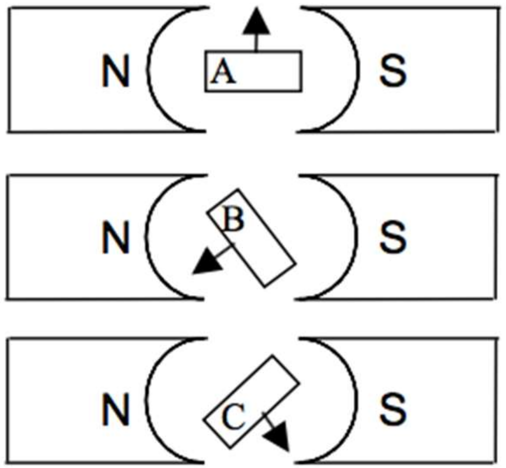
Geração de um Sistema 3F

Gerador de Corrente Alternada Elementar

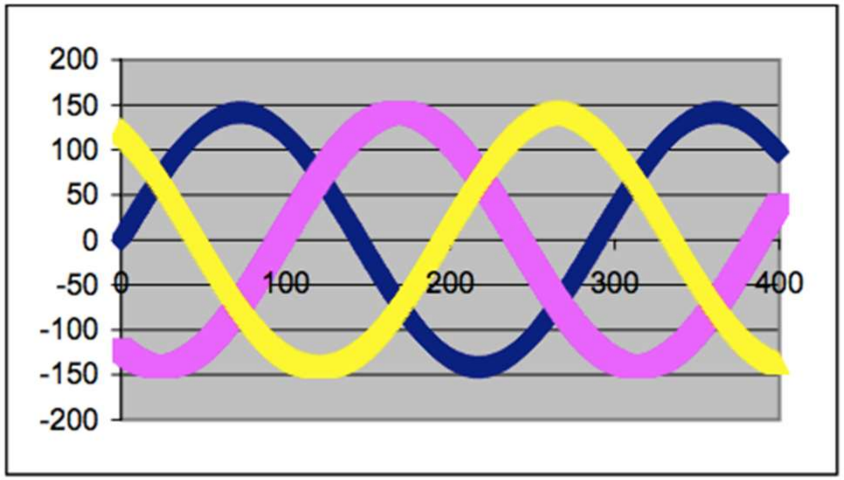


$$e = E_M \cos(\omega t + \theta),$$

Geração de um Sistema 3F



(a) - Bobinas do gerador



(b) - Valores instantâneos das tensões

Seqüência de Fases

Define-se, para um sistema polifásico simétrico:

seqüência de fase :

ordem pela qual as tensões das fases passam pelo seu valor máximo.

Por exemplo, no sistema trifásico da Figura. 4.1, a seqüência de fase é *A*-*B*-*C*.

- uma alteração cíclica não altera a seqüência de fase
- seqüência *A*-*B*-*C* é a mesma que *B*-*C*-*A* e que *C*-*A*-*B*.

À seqüência ***A-B-C*** : "***seqüência direta***" ou "***seqüência positiva***", e à seqüência *A*-*C*-*B*, que coincide com *C*-*B*-*A* e *B*-*A*-*C*, dá-se o nome de "***seqüência inversa***" ou "***seqüência negativa***".

Exemplo

Um sistema trifásico simétrico tem seqüência de fase negativa, *B-A-C*, e $\dot{V}_C = 220\,\underline{|40^\circ}\ V$. Determinar as tensões $\dot{V}_A$ e $\dot{V}_B$.

Solução: Sendo a seqüência de fase *B-A-C*, a primeira tensão a passar pelo valor máximo será v_B, a qual será seguida, na ordem, por v_A e v_C . Portanto, deverá ser:

$$v_B = V_M\, cos(\omega t + \theta)\ ,\quad v_A = V_M\, cos(\omega t + \theta - 2\pi/3)\ ,\quad v_C = V_M\, cos(\omega t + \theta - 4\pi/3)$$

em que θ representa o ângulo inicial ou a rotação de fase em relação à origem. No instante $t=0$, tem-se:

$$v_B = V_M\, cos\,\theta\ ,\quad v_A = V_M\, cos(\theta - 2\pi/3)\ ,\quad v_C = V_M\, cos(\theta - 4\pi/3)$$

Sendo $V = V_M/\sqrt{2}$, fasorialmente tem-se:

$$\dot{V}_B = V\,\underline{|\theta}\ ,\quad \dot{V}_A = V\,\underline{|\theta - 2\pi/3}\ ,\quad \dot{V}_C = V\,\underline{|\theta - 4\pi/3}$$

Por outro lado, sendo dado $\dot{V}_C = 220\,\underline{|40^\circ}\ V$, resulta

$$V = 220\ V \quad ; \quad \theta + 120^\circ = 40^\circ \text{ ou } \theta = -80^\circ\ ,$$

e portanto $\quad \dot{V}_B = 220\,\underline{|-80^\circ}\ V\ ,\quad \dot{V}_A = 220\,\underline{|-200^\circ}\ V\ ,\quad \dot{V}_C = 220\,\underline{|40^\circ}\ V$

Operador α

⇒ Nos sistema 3ϕ, há uma rotação de fase de 120° entre suas grandezas;

⇒ podemos pensar num operador que, aplicado a um fasor, realize tal rotação de fase.

⇒ Assim, define-se o operador α :número complexo de módulo unitário e argumento 120° , quando aplicado a um fasor qualquer, transforma-o em outro de mesmo módulo e adiantado de 120° .

$$\alpha = 1\,\underline{|120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⇒ Potenciação de α:

$$\alpha^1 = \alpha = 1\,\underline{|120^\circ}$$

$$\alpha^2 = \alpha\,.\,\alpha = 1\,\underline{|120^\circ}\,.\,1\,\underline{|120^\circ} = 1\,\underline{|-120^\circ}$$

$$\alpha^3 = \alpha^2\,.\,\alpha = 1\,\underline{|-120^\circ}\,.\,1\,\underline{|120^\circ} = 1\,\underline{|0^\circ}$$

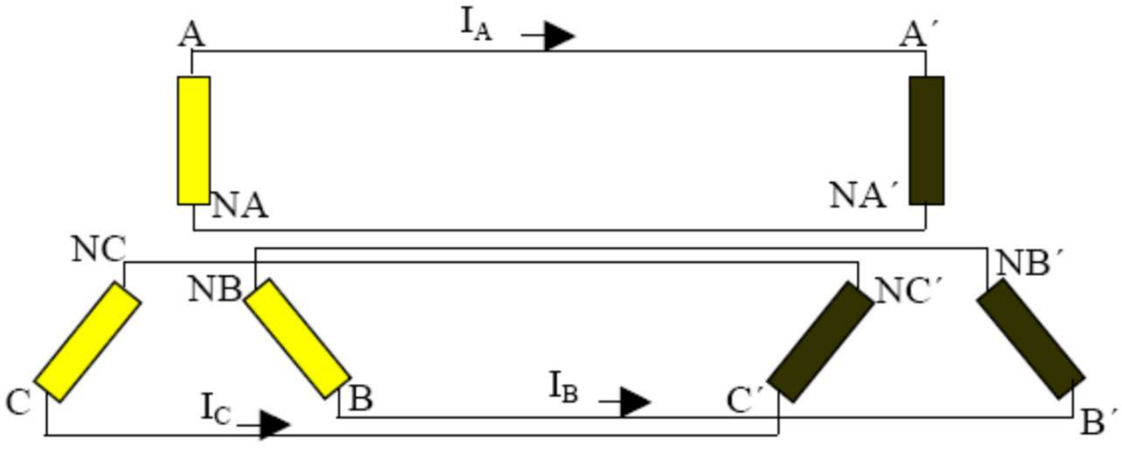
$$\alpha^4 = \alpha^3\,.\,\alpha = 1\,\underline{|0^\circ}\,.\,1\,\underline{|120^\circ} = 1\,\underline{|120^\circ}$$

⇒ Além disso:

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 1\,\underline{|0^\circ} + 1\,\underline{|120^\circ} + 1\,\underline{|-120^\circ} = 0$$

Ligação em Estrela

Alimentando, a partir dos terminais das três bobinas do gerador, três impedâncias quaisquer, $Z = Z\underline{|\phi} = R + jX$, iguais entre si (carga equilibrada)



Forma os, nos quais circularão as correntes:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_{AN_A}}{\overline{Z}} = \frac{E + 0j}{Z\underline{|\varphi}} = \frac{E}{Z}\underline{|-\varphi}$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_{BN_B}}{\overline{Z}} = \frac{E\underline{|-120^\circ}}{Z\underline{|\varphi}} = \frac{E}{Z}\underline{|-120^\circ - \varphi}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_{CN_C}}{\overline{Z}} = \frac{E\underline{|+120^\circ}}{Z|\varphi} = \frac{E}{Z}\underline{|+120^\circ - \varphi}$$

Ou seja, correntes de mesmo valor eficaz e defasadas entre si de $2\pi/3rad$ (ou 120^o) .

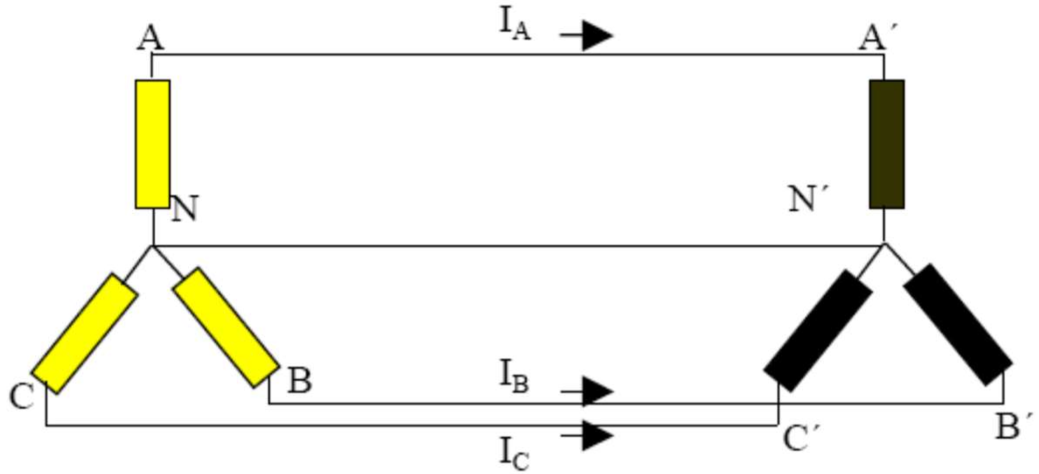
Ligação em Estrela

- circuitos são eletricamente independentes,
- pode-se interligar os pontos N_A, N_B e N_C, designados por N,
- observa-se que os pontos N'_A, N'_B e N'_C estão ao mesmo potencial que o ponto N; logo, podem ser interligados em um único ponto chamado N'.
- A corrente que circula pelo condutor NN' é dada por

$$\dot{I}_{NN'} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

- pois as três correntes aferentes ao nó N' têm o mesmo valor eficaz e estão defasadas entre si de $2\pi/3$ *rad*.
- a mesma conclusão poderia ser obtida, observando que os pontos N e N' estão no mesmo potencial.

Ligação em Estrela



- O condutor que interliga os pontos *N* e *N*´ recebe o nome de *fio neutro* ou *quarto fio*.
- Sendo nula a corrente $I_{NN'}$, o fio neutro pode ser retirado do circuito.
- Essa é uma das grandes vantagens dos sistemas trifásicos. Para a transmissão da mesma potência, são utilizados 3 ou 4 fios, enquanto seriam necessários 6 fios se fossem utilizados 3 circuitos monofásicos (conforme observa-se da Figura. 4.2).

Ligação em Estrela

Ao esquema de ligação assim obtido é dado o nome de circuito trifásico simétrico com gerador ligado em "estrela" (Y) e carga "equilibrada em estrela" (Y), dando-se o nome de "centro-estrela" ao ponto N ou $N´$.

Definem-se:

1. Tensão de fase: tensão medida entre o centro-estrela e qualquer um dos terminais do gerador ou da carga;
2. Tensão de linha: tensão medida entre dois terminais (nenhum deles sendo o "centro estrela") do gerador ou da carga. É a tensão medida entre os condutores que ligam o gerador à carga;
3. Corrente de fase: corrente em cada uma das bobinas do gerador = corrente que percorre cada uma das impedâncias da carga;
4. Corrente de linha: corrente que percorre os condutores que interligam o gerador à carga (exclui-se o neutro).

Ligação em Estrela

As tensões e correntes de linha e de fase num sistema 3ϕ simétrico e equilibrado têm **valores eficazes iguais**, e estão defasadas entre si de $2\pi/3$ *rad*.

Num circuito trifásico com gerador em Y e carga em Y, basta resolver um circuito monofásico constituído por uma das bobinas ligada a uma das impedâncias por um condutor de linha, lembrando que $I_N = 0$.

Em tudo o que se segue, valores de fase são indicados com um índice F e os de linha com índice L ou sem índice algum.

Valores de fase				Valores de linha			
Gerador		Carga		Gerador		Carga	
Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão	Corrente	Tensão
I_{AN}	V_{AN}	$I_{A'N'}$	$V_{A'N'}$	I_A	V_{AB}	I_A	$V_{A'B'}$
I_{BN}	V_{BN}	$I_{B'N'}$	$V_{B'N'}$	I_B	V_{BC}	I_B	$V_{B'C'}$
I_{CN}	V_{CN}	$I_{C'N'}$	$V_{C'N'}$	I_C	V_{CA}	I_C	$V_{C'A'}$

Circuitos Trifásicos - Aula 2

2.1 - Ligação Estrela

- Resolução de circuitos em estrela

Ligação em Estrela

Exemplo 4.2

Uma carga equilibrada ligada em estrela é alimentada por um sistema trifásico simétrico e equilibrado com sequência de fase direta.

Sabendo-se que $\dot{V}_{BN} = 220\underline{|58^\circ}$ (V), pede-se determinar:

(a) as tensões de fase na carga;

(b) as tensões de linha na carga.

Solução:

(a) Tensões de fase na carga

Sendo o trifásico simétrico => $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = 220\ V$

Sendo a sequência de fase direta, tem-se:

fase de V_{CN} = fase de $V_{BN} - 120^\circ = 58^\circ - 120^\circ = -62^\circ$

fase de V_{AN} = fase de $V_{CN} - 120^\circ = -62^\circ - 120^\circ = -182^\circ = 178^\circ$

Finalmente, resulta:

$\dot{V}_{BN} = 220\underline{|58^\circ}$ (V) , $\dot{V}_{CN} = 220\underline{|-62^\circ}$ (V) , $\dot{V}_{AN} = 220\underline{|178^\circ}$ (V)

Ligação em Estrela

Usando matrizes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \\ \dot{V}_{AN} \end{bmatrix} = \dot{V}_{BN} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = 220\,\underline{|58^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\,\underline{|58^\circ} \\ 220\,\underline{|-62^\circ} \\ 220\,\underline{|178^\circ} \end{bmatrix} \; V$$

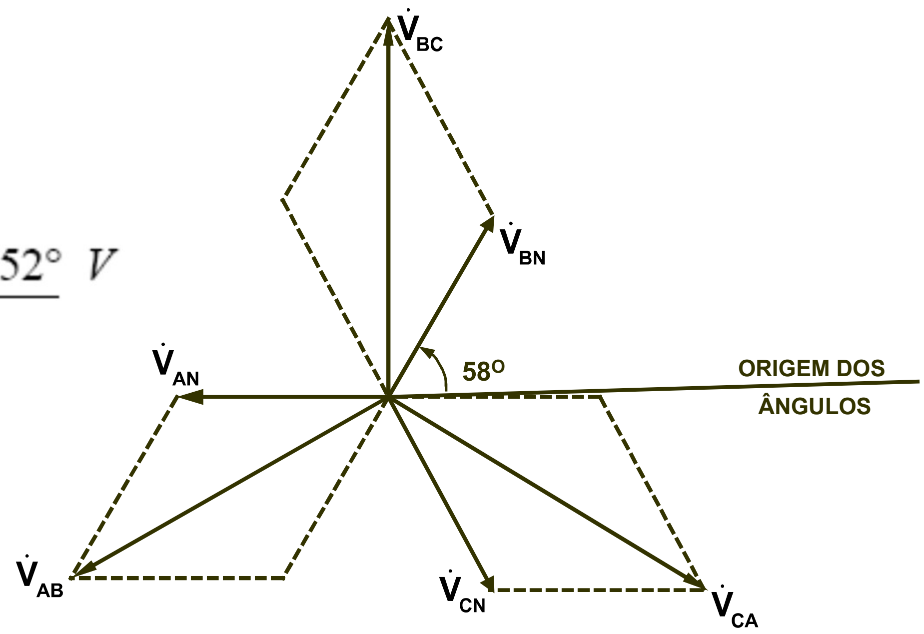
(b) Tensões de linha na carga

De (4.4), resulta:

$$\dot{V}_{AB} = 220\,\underline{|178^\circ}\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 380\,\underline{|208^\circ}\,V = 380\underline{|-152^\circ}\;V$$

$$\dot{V}_{BC} = 220\,\underline{|58^\circ}\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 380\,\underline{|88^\circ}\;V$$

$$\dot{V}_{CA} = 220\,\underline{|-62^\circ}\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 380\,\underline{|-32^\circ}\,V$$



Exemplo 4.3

Resolver o exemplo 4.2 admitindo-se seqüência de fase inversa.

Solução:

(a) Cálculo das tensões de fase na carga

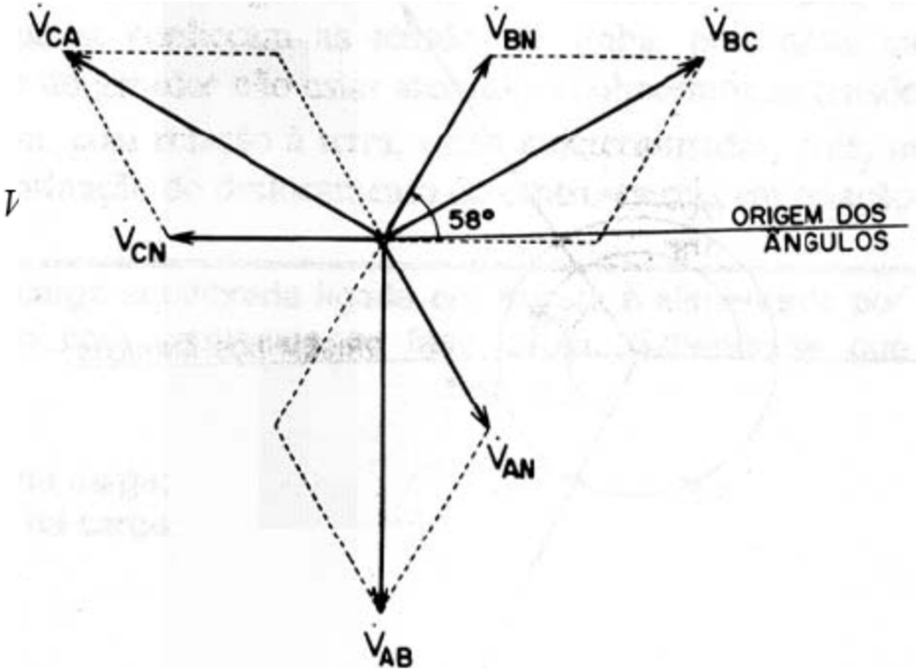
Como no exemplo precedente, os módulos das tensões de fase são todos iguais e valem $220\ V$.

Para a determinação da fase de $\dot{V}_{CN}$ e $\dot{V}_{AN}$ salienta-se que, em sendo a seqüência de fase inversa (*B*-*A*-*C*) o fasor $\dot{V}_{AN}$ está atrasado de 120° em relação ao fasor $\dot{V}_{BN}$, e o fasor $\dot{V}_{CN}$ está atrasado 120° em relação ao $\dot{V}_{AN}$. Logo,

$$\dot{V}_{BN} = 220\,\underline{|58^\circ}\ V$$

$$\dot{V}_{AN} = 220\,\underline{|58^\circ - 120^\circ} = 220\,\underline{|-62^\circ}\ V$$

$$\dot{V}_{CN} = 220\,\underline{|-62^\circ - 120^\circ} = 220\,\underline{|-182^\circ} = 220\,\underline{|178^\circ}\ V$$



(b) Cálculo das tensões de linha na carga

$$\dot{V}_{AB} = 220\,\underline{|-62^\circ}\,\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ} = 380\,\underline{|-92^\circ}\,V$$

$$\dot{V}_{BC} = 220\,\underline{|58^\circ}\,\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ} = 380\,\underline{|28^\circ}\ V$$

$$\dot{V}_{CA} = 220\,\underline{|178^\circ}\,\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ} = 380\,\underline{|148^\circ}\,V$$

Resolução de circuitos em estrela

Assim como em **Circuitos Monofásicos**, pode-se utilizar:

- análises de malhas ou nodal,
- superposição de fontes,
- geradores equivalentes de Thevenin ou Norton, etc.

Porém, o cálculo fica **bastante simplificado** levando-se em conta as **simetrias** existentes nos **trifásicos simétricos** com **carga equilibrada**.

Ex.: Resolver o circuito da Figura. 4.4 => det. as correntes nas três fases.

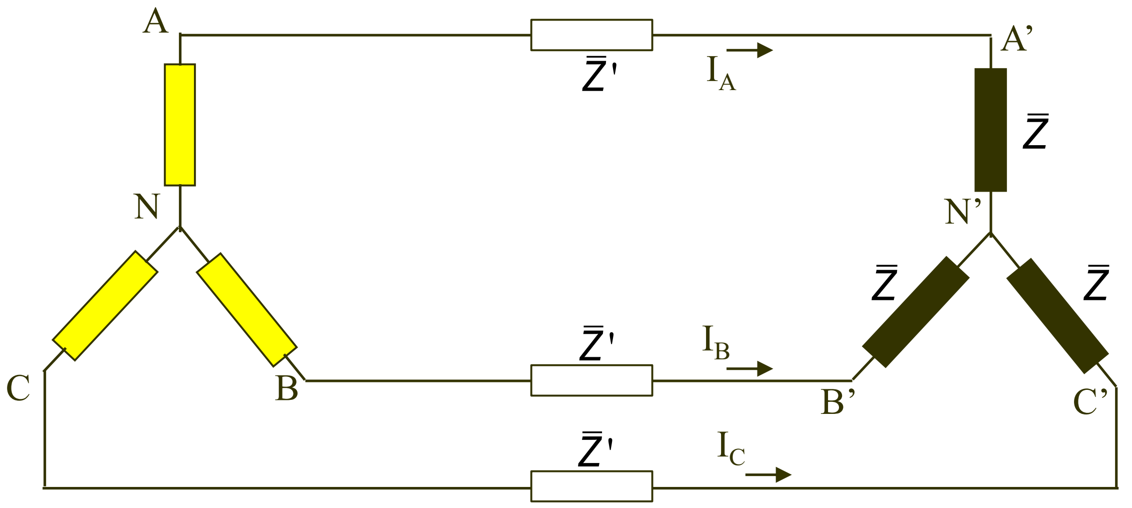
Conhecem-se:

Tensões de fase do gerador (sequência direta) e as impedâncias da carga, Z *e* da linha, Z'

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AN} \\ \dot{V}_{BN} \\ \dot{V}_{CN} \end{bmatrix} = E\,\underline{|\,\theta}\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad \overline{Z} = Z\,\underline{|\,\varphi_1} \quad \text{e} \quad \overline{Z}' = Z'\,\underline{|\,\varphi_2}$$

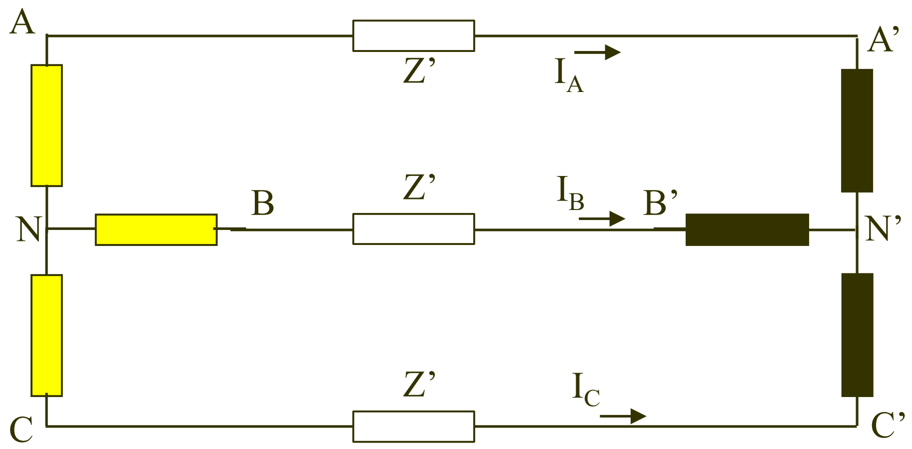
Resolução de circuitos em estrela

Figura 4.4. Circuito trifásico em estrela a 3 fios



≡

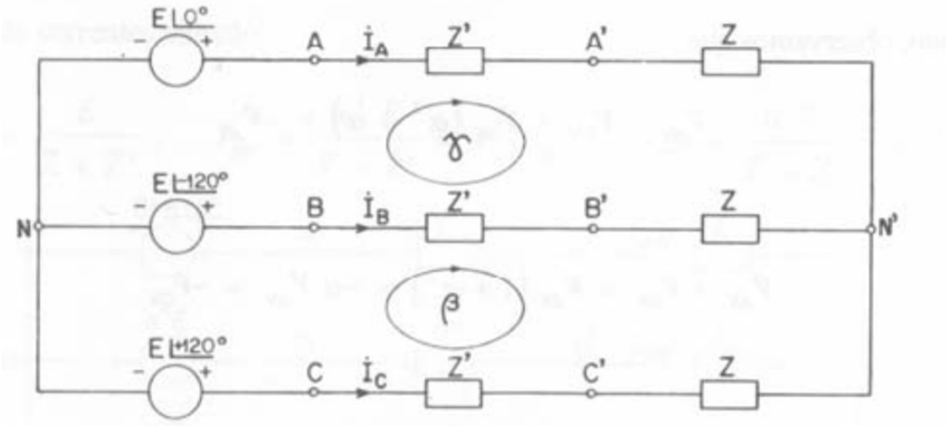
≡



Resolução de circuitos em estrela

Figura 4.4. Circuito trifásico em estrela a 3 fios

Pode-se resolver o circuito usando, por exemplo, análise de malhas, ou melhor, correntes fictícias de Maxwell:



$$\text{Malha } \gamma: E\underline{|0^\circ} - \bar{Z}'.\gamma - \bar{Z}.\gamma - \bar{Z}.\gamma - \bar{Z}'.\gamma - E\underline{|-120^\circ} + \bar{Z}.\beta + \bar{Z}'.\beta =$$

$$= E\underline{|0^\circ} - E\underline{|-120^\circ} - 2.\bar{Z}'.\gamma - 2.\bar{Z}.\gamma + \bar{Z}.\beta + \bar{Z}'.\beta =$$

$$= \sqrt{3}.E\underline{|30^\circ} - 2.\left(\bar{Z}' + \bar{Z}\right).\gamma + \left(\bar{Z}' + \bar{Z}\right).\beta$$

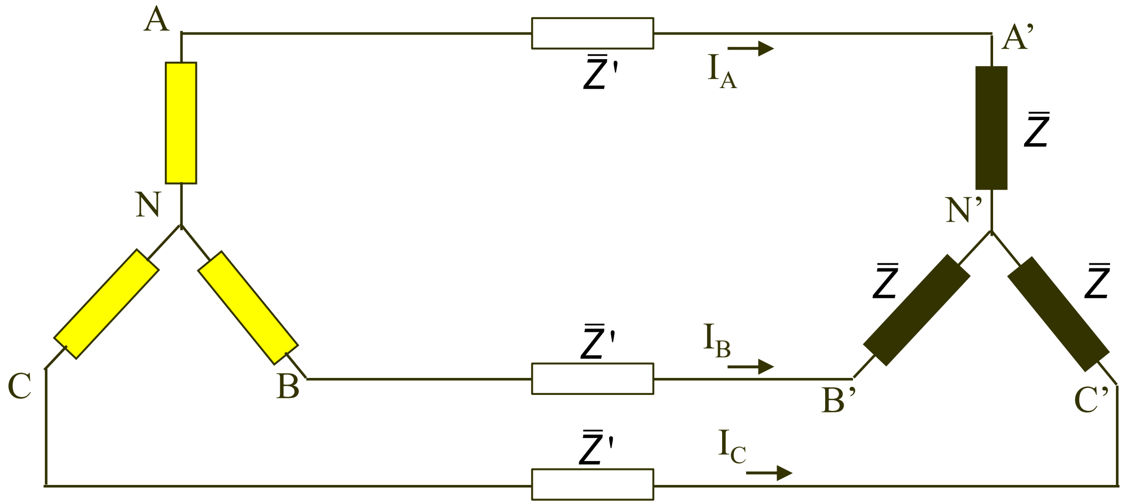
$$\text{Malha } \beta: E\underline{|-120^\circ} - \bar{Z}'.\beta - \bar{Z}.\beta - \bar{Z}.\beta - \bar{Z}'.\beta - E\underline{|120^\circ} + \bar{Z}.\gamma + \bar{Z}'.\gamma =$$

$$= \sqrt{3}.E\underline{|-90^\circ} - 2.\left(\bar{Z}' + \bar{Z}\right).\beta + \left(\bar{Z}' + \bar{Z}\right).\gamma$$

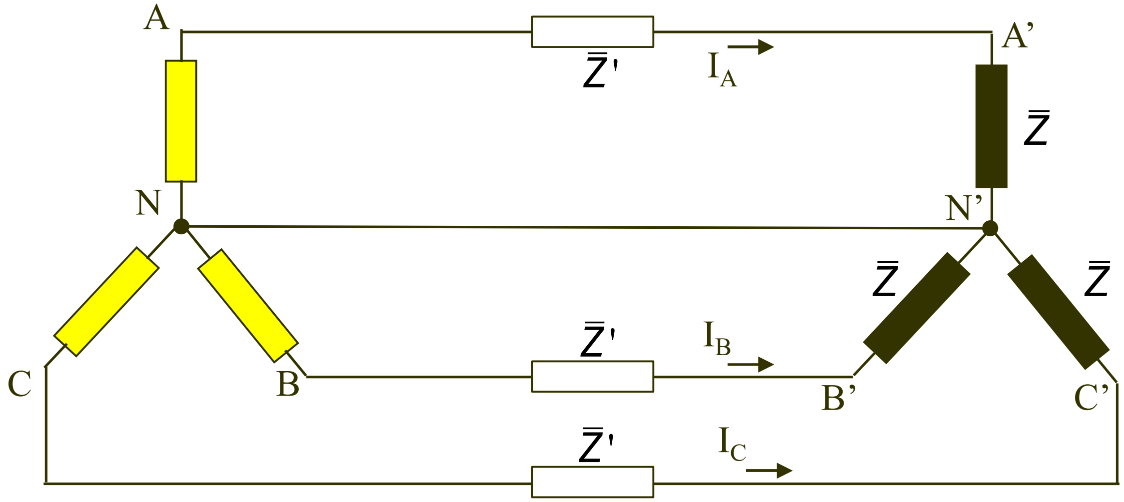
Resolução de circuitos em estrela

OU

Pode-se resolver o circuito, observando que, num sistema trifásico simétrico e equilibrado com carga equilibrada, os pontos N e N' estão ao mesmo potencial, ou seja: $V_{AN} = V_{AN'}$



Pode-se interligá-los por um condutor sem alterar o circuito, dado que nesse condutor não circulará corrente.

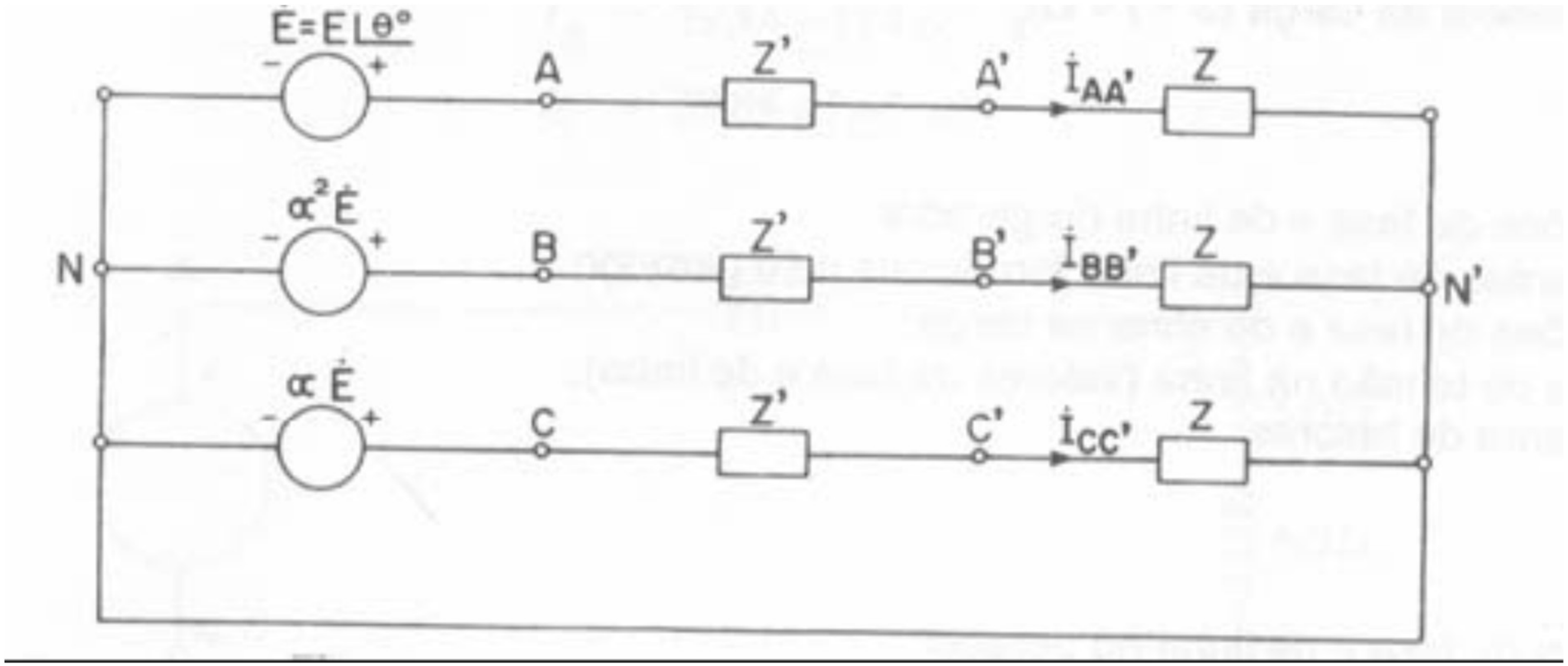


Resolução de circuitos em estrela

Circuito trifásico em estrela a 4 fios

Têm-se três malhas independentes:

$NAA'N'N$, $NBB'N'N$ e $NCC'N'N$



Resolução de circuitos em estrela

As impedâncias das três malhas são iguais: $(Z + Z')$,

e as f.e.m. das malhas valem: E, $\alpha^2 E$, αE

Portanto as três correntes valerão:

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{E}}{\overline{Z} + \overline{Z}'} \;, \qquad \dot{I}_{BB'} = \frac{\alpha^2 \dot{E}}{\overline{Z} + \overline{Z}'} = \alpha^2 \dot{I}_{AA'} \;, \qquad \dot{I}_{CC'} = \frac{\alpha \dot{E}}{\overline{Z} + \overline{Z}'} = \alpha \dot{I}_{AA'}$$

Tudo se passa como se fosse resolvido o circuito monofásico da Figura abaixo, no qual interligam-se os pontos N e N' por um fio de impedância nula (chamado de NEUTRO FICTÍCIO).

Resolução de circuitos em estrela

Exemplo 4.4

Um alternador trifásico alimenta por meio de uma linha equilibrada uma carga trifásica equilibrada.

São conhecidos:

(1) a tensão de linha do alternador (380 V) e a freqüência (60 Hz);

(2) o tipo de ligação do alternador (Y);

(3) o número de fios da linha (3);

(4) a resistência (0,2 Ω) e a reatância indutiva (0,5 Ω) de cada fio da linha;

(5) a impedância da carga ($3 + j\,4\ \Omega$).

Pedem-se:

(a) as tensões de fase e de linha no gerador;

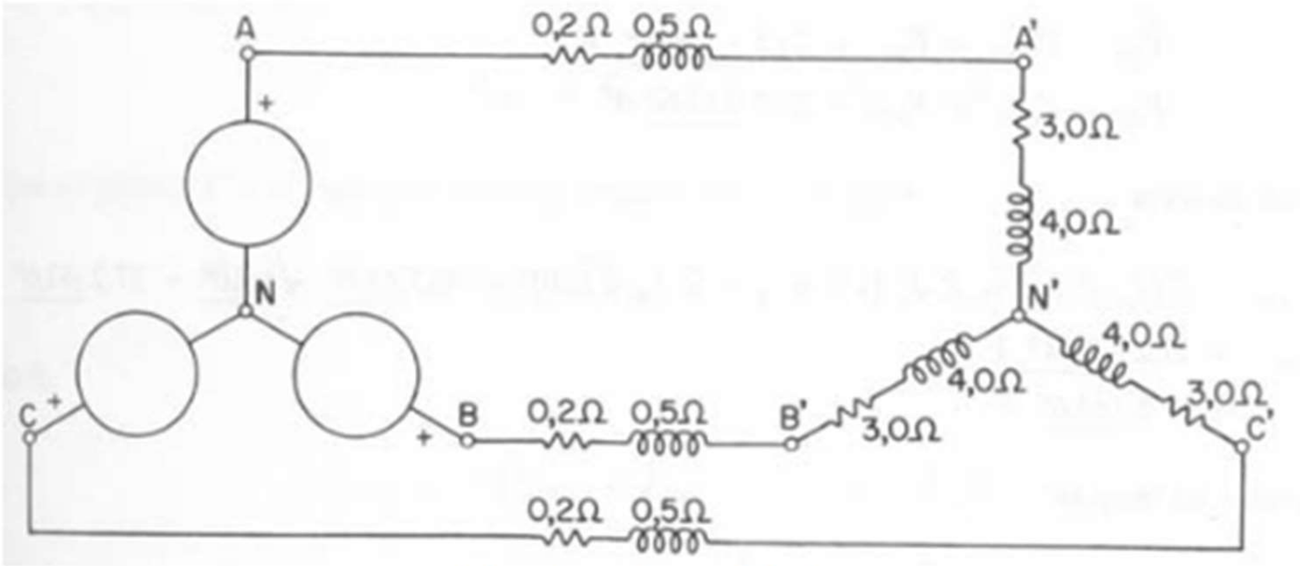
(b) as correntes de fase e de linha fornecidas pelo gerador;

(c) as tensões de fase e de linha na carga;

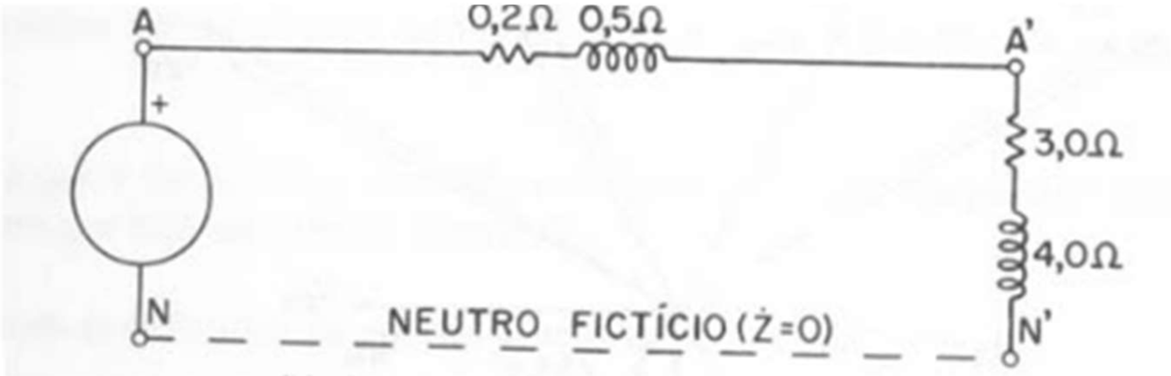
(d) a queda de tensão na linha (valores de fase e de linha);

Resolução de circuitos em estrela

Exemplo 4.4



(a) Circuito trifásico



(b) Circuito monofásico equivalente

Figura 4.7. Determinação do circuito monofásico equivalente.

Resolução de circuitos em estrela

Solução:

(a) Tensões de fase e de linha no gerador

Admitindo-se sequencia de fase *A*-*B*-*C*, e adotando *VAN* com fase inicial nula, resulta

$$\dot{V}_{AN} = 220\,\underline{|0^\circ}\ V$$
$$\dot{V}_{BN} = 220\,\underline{|-120^\circ}\ V$$
$$\dot{V}_{CN} = 220\,\underline{|120^\circ}\ V$$

e portanto

$$\dot{V}_{AB} = \sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\,\dot{V}_{AN} = \sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\,.\,220\,\underline{|0^\circ} = 380\,\underline{|30^\circ}\ V$$
$$\dot{V}_{BC} = \sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\,\dot{V}_{BN} = \sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\,.\,220\,\underline{|-120^\circ} = 380\,\underline{|-90^\circ}\ V$$
$$\dot{V}_{CA} = \sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\,\dot{V}_{CN} = \sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\,.\,220\,\underline{|120^\circ} = 380\,\underline{|150^\circ}\ V$$

Resolução de circuitos em estrela

Solução:

(b) Determinação da intensidade de corrente: utilizar circuito da Figura. 4.7.b, no qual tem-se:

$$\dot{V}_{AN} = \dot{I}_A \left[R + R_C + j\left(X + X_C \right) \right]$$

Isto é:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{V}_{AN}}{R + R_C + j\left(X + X_C \right)} = \frac{220 + j0}{3{,}2 + j4{,}5} = \frac{220 \underline{|0^\circ}}{5{,}52 \underline{|54{,}6^\circ}} = 39{,}84 \underline{|-54{,}6^\circ} \;\; A$$

Logo:

$$\dot{I}_A = 39{,}84 \underline{|-54{,}6^\circ} \;\; A$$
$$\dot{I}_B = 39{,}84 \underline{|-174{,}6^\circ} \;\; A$$
$$\dot{I}_C = 39{,}84 \underline{|65{,}4^\circ} \;\; A$$

Resolução de circuitos em estrela

Solução: (c) Tensão na carga

(i) valores de fase:

$$\dot{V}_{A'N'} = \bar{Z}_C \, \dot{I}_A = 5\underline{|53{,}1°} \,.\, 39{,}84\underline{|-54{,}6°} = 199{,}2\underline{|-1{,}5°}\ V$$

$$\dot{V}_{B'N'} = 199{,}2\underline{|-121{,}5°}\ V$$

$$\dot{V}_{C'N'} = 199{,}2\underline{|-118{,}5°}\ V$$

(ii) valores de linha:

$$\dot{V}_{A'B'} = \sqrt{3}\,\underline{|30°}\,\dot{V}_{A'N'} = \sqrt{3}\,.\,199{,}2\underline{|28{,}5°} = 345\underline{|28{,}5°}\ V$$

$$\dot{V}_{B'C'} = \sqrt{3}\,\underline{|30°}\,\dot{V}_{B'N'} = \sqrt{3}\,.\,199{,}2\underline{|-91{,}5°} = 345\underline{|-91{,}5°}\ V$$

$$\dot{V}_{C'A'} = \sqrt{3}\,\underline{|30°}\,\dot{V}_{C'N'} = \sqrt{3}\,.\,199{,}2\underline{|148{,}5°} = 345\underline{|148{,}5°}\ V$$

Resolução de circuitos em estrela

Solução:

(d) Queda de tensão na linha

(i) valores de fase:

$$\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{A'N'} = \dot{V}_{AA'} = \overline{Z}\,\dot{I}_A = 0{,}54\,\underline{|68{,}2^\circ}\,.\,39{,}84\,\underline{|-54{,}6^\circ} = 21{,}5\,\underline{|13{,}6^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{BN} - \dot{V}_{B'N'} = \dot{V}_{BB'} = 21{,}5\,\underline{|-106{,}4^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{C'N'} = \dot{V}_{CC'} = 21{,}5\,\underline{|133{,}6^\circ}\ \ V$$

(ii)valores de linha:

$$\dot{V}_{AB} - \dot{V}_{A'B'} = \overline{Z}\left(\dot{I}_A - \dot{I}_B\right) = \overline{Z}\,\dot{I}_A\left(1-\alpha^2\right) = \overline{Z}\,\dot{I}_A\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 21{,}5\,\underline{|13{,}6^\circ}\,.\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 37{,}2\,\underline{|43{,}6^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{BC} - \dot{V}_{B'C'} = 37{,}2\,\underline{|-76{,}4^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{CA} - \dot{V}_{C'A'} = 37{,}2\,\underline{|163{,}6^\circ}\ \ V$$

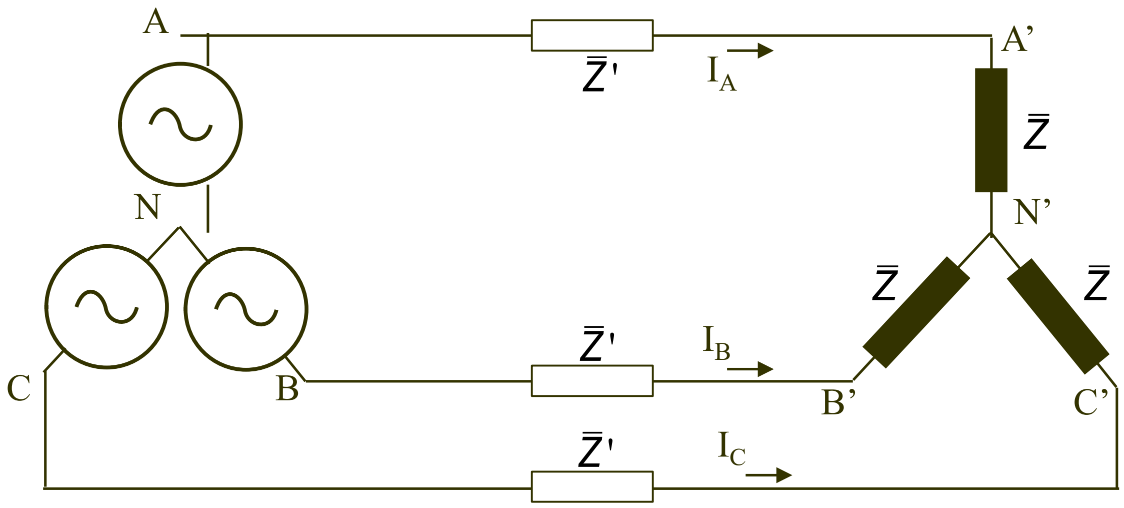
Resolução de circuitos em estrela

Exercício: Um sistema de três fios, trifásico, simétrico, com um valor eficaz da tensão de linha de 195V, tem uma carga equilibrada em Y de $Z_y = 15\underline{|60^o}\ \Omega$. As linhas entre o sistema e a carga têm a impedância de $Z' = 2{,}24\underline{|26{,}57^o}\ \Omega$.

Achar o módulo da tensão de linha na carga.

Resolução de circuitos em estrela

Exercício: Um sistema de três fios, trifásico, simétrico, com um valor eficaz da tensão de linha de 195V.

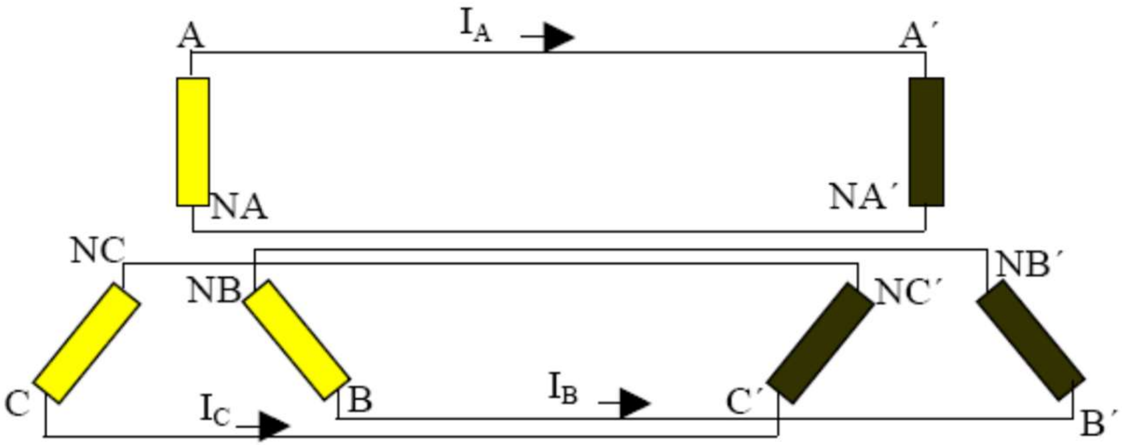


Circuitos Trifásicos - Aula 3

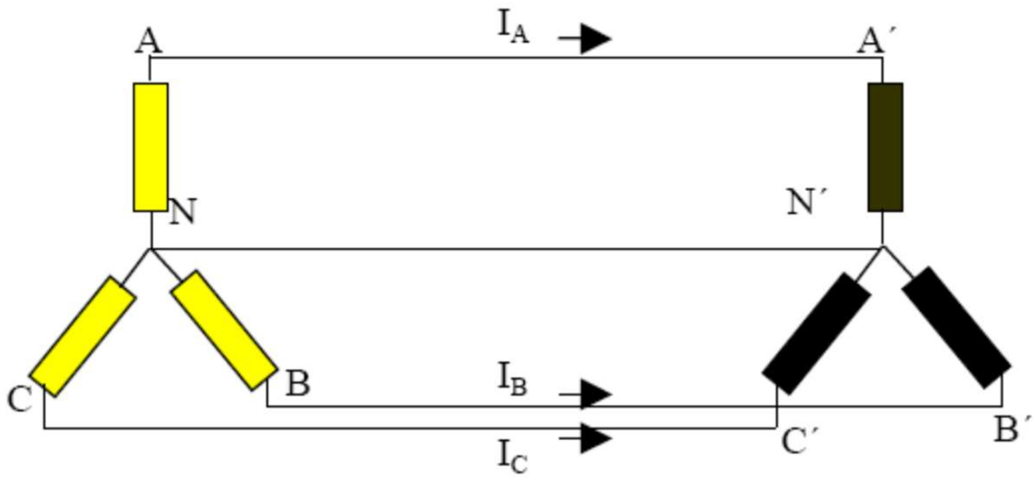
3.1 - Ligação Triângulo

- Grandezas de fase e de linha e a relação entre elas
- Resolução de circuitos em triângulo

Recordação: Ligação Estrela



a) Três circuitos monofásicos



b) Circuito trifásico com gerador e carga em estrela

Ligação Triângulo

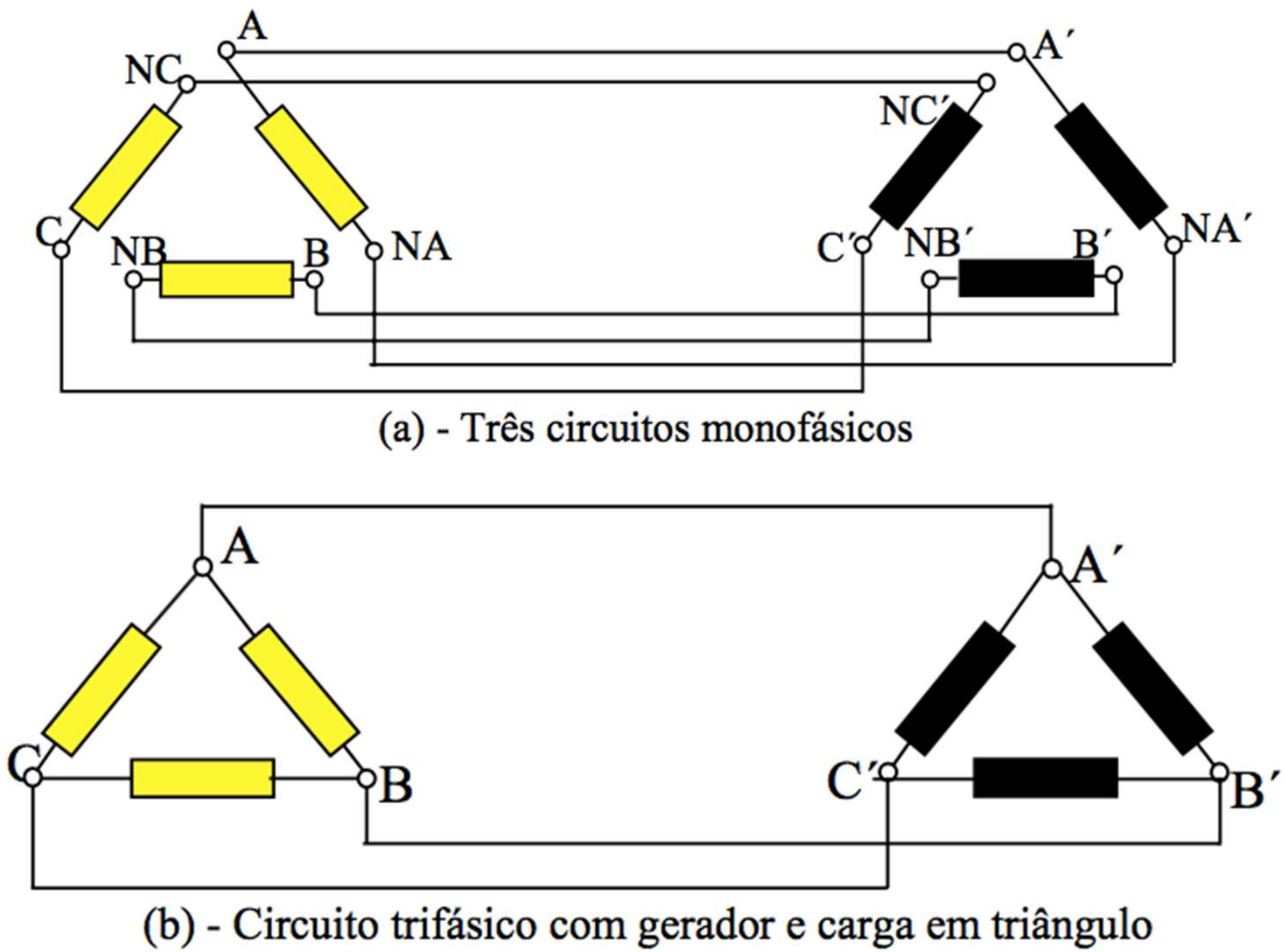
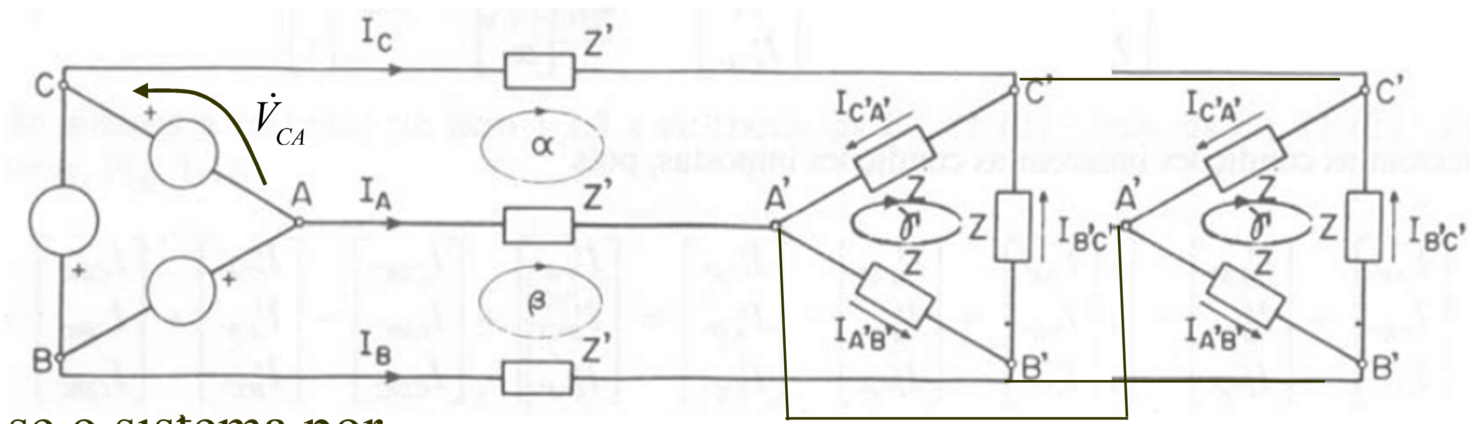


Figura 4.8. Representação da ligação triângulo

Resolução de circuitos em triângulo

Suponha ter que resolver um circuito trifásico simétrico e equilibrado

- que tem um gerador ligado em triângulo
- que alimenta por meio de uma linha de impedância Z' (por fase)
- uma carga com impedância de fase Z , ligada em triângulo



Resolvendo-se o sistema por correntes fictícias de Maxwell, resultam as equações: =====>

$$\dot{V}_{CA} = \left(2\bar{Z}' + \bar{Z}\right)\alpha - \bar{Z}'\beta - \bar{Z}\gamma$$

$$\dot{V}_{AB} = -\bar{Z}'\alpha + \left(2\bar{Z}' + \bar{Z}\right)\beta - \bar{Z}\gamma$$

$$0 = -\bar{Z}\alpha - \bar{Z}\beta + 3\bar{Z}\gamma$$

das quais poderemos determinar os valores de α , β e γ .

... Mas a resolução do sistema é muito trabalhosa ...

Resolução de circuitos em triângulo

Outro caminho: Determinar o valor da corrente $I_{A'B'}$ pela aplicação da lei de Ohm à malha $AA'B'BA$ + simetrias do sistema.

Para sequência + :

$$\dot{I}_{A'B'} = I_F \underline{|0^\circ} \;, \quad \dot{I}_{B'C'} = I_F \underline{|-120^\circ} \;, \quad \dot{I}_{C'A'} = I_F \underline{|120^\circ}$$

$$\dot{V}_{AB} = \dot{I}_A \overline{Z}' + \dot{I}_{A'B'} \overline{Z}' - \dot{I}_B \overline{Z}' = \left(\dot{I}_A - \dot{I}_B\right) \overline{Z}' + \dot{I}_{A'B'} \overline{Z}'$$

Sendo:

$$\dot{I}_A - \dot{I}_B = \sqrt{3}\, I_F \underline{|-30^\circ} - \alpha^2 \sqrt{3}\, I_F \underline{|-30^\circ} = \sqrt{3}\, I_F \underline{|-30^\circ}\left(1 - \alpha^2\right) = \sqrt{3}\, I_F \underline{|-30^\circ}\; \sqrt{3}\, \underline{|30^\circ} = 3\, I_F$$

ou $\dot{I}_A - \dot{I}_B = 3\, I_F$; logo

$$\dot{V}_{AB} = \left(3\, \overline{Z}' + \overline{Z}\right) I_F$$

Adotando-se $\dot{V}_{AB} = V \underline{|\varphi}$, resulta

$$V \cos\varphi = I_F \left(3\, R' + R\right)$$

$$V \operatorname{sen}\varphi = I_F \left(3\, X' + X\right)$$

:. problema proposto => determinar a corrente numa malha cuja f.e.m. vale V_{AB} e cuja impedância é $3Z' + Z$.

Resolução de circuitos em triângulo

E portanto: $$I_F = \frac{V}{\sqrt{(3R' + R)^2 + (3X' + X)^2}} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|}$$

$$\varphi = arc\ tg \frac{3X' + X}{3R' + R}$$

Assim tem-se:

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|}\underline{|0°} \ , \quad \dot{I}_{B'C'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|}\underline{|-120°} \ , \quad \dot{I}_{C'A'} = \frac{V}{|3\bar{Z}' + \bar{Z}|}\underline{|120°}$$

Chega-se ao mesmo resultado muito mais facilmente substituindo a carga ligada em triângulo por outra que lhe seja equivalente, ligada em estrela.

Lembrando a transformação triângulo-estrela, deveremos substituir a carga em triângulo cuja impedância de fase vale Z, por carga em estrela cuja impedância de fase vale $Z / 3$.

Resolução de circuitos em triângulo

TRANSFORMAÇÃO ESTRELA -TRIÂNGULO

a. Determinação da estrela equivalente à um triângulo

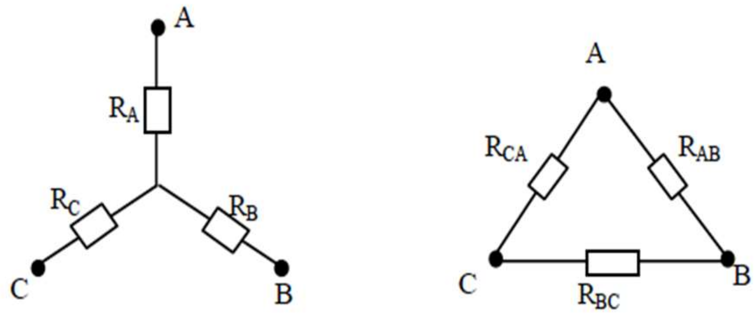


Figura 16 - Transformação Estrela-Triângulo

$$R_A + R_B = \frac{R_{AB}(R_{BC}+R_{CA})}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}}$$

$$R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{AB}+R_{CA})}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}}$$

$$R_C + R_A = \frac{R_{CA}(R_{BC}+R_{AB})}{R_{AB}+R_{BC}+R_{CA}}$$

A resistência medida entre dois terminais quaisquer da estrela, com o terceiro em rodízio deve ser igual à resistência medida entre os dois terminais correspondentes do triângulo. Assim temos:

Resolvendo o sistema de equações resulta:

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A}$$

$$R_{CA} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

No caso de $R_A=R_B=R_C = R_Y$, resulta:

$$R_{AB}=R_{BC}=R_{CA} = \boxed{R_\Delta = 3.R_Y}$$

TRANSFORMAÇÃO ESTRELA -TRIÂNGULO

b. Determinação do triângulo equivalente à uma estrela

Ligando-se em curto dois terminais quaisquer do triângulo e dois terminais correspondentes da estrela, deve-se ter uma condutância entre o terceiro terminal e o curto circuito igual para os dois casos. Assim, obtemos:

$$\left(R_C + \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}\right)^{-1} = \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{CA}}$$

$$\left(R_A + \frac{R_B R_C}{R_B + R_C}\right)^{-1} = \frac{1}{R_{CA}} + \frac{1}{R_{AB}}$$

$$\left(R_B + \frac{R_C R_A}{R_C + R_A}\right)^{-1} = \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{BC}}$$

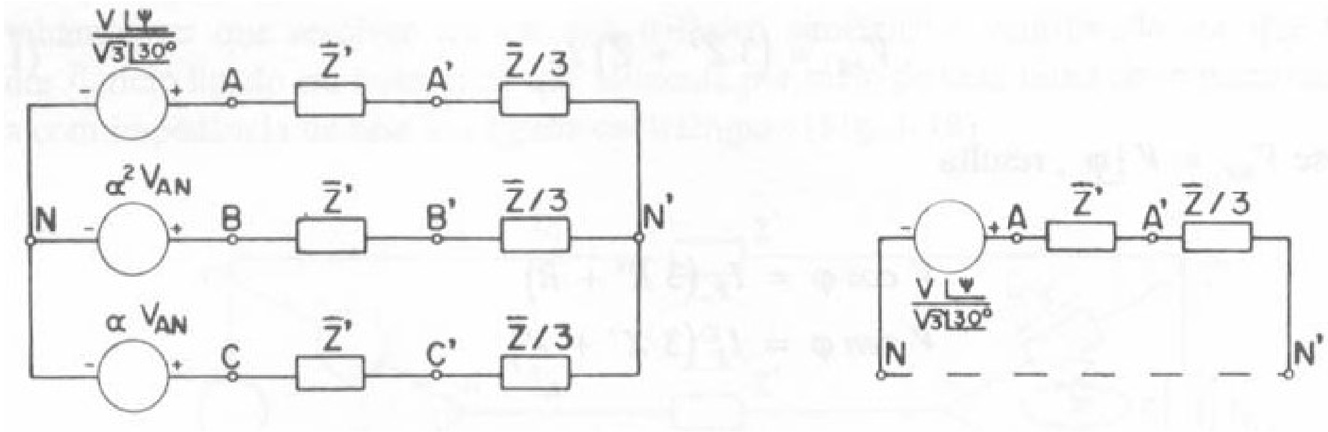
$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_A &= \frac{R_{CA} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\ R_B &= \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\ R_C &= \frac{R_{BC} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \end{aligned}}$$

No caso de $R_{AB}=R_{BC}=R_{CA} = R_{\Delta}$, resulta:

$R_A=R_B=R_C = \boxed{R_Y= R_{\Delta}/3}$

Resolução de circuitos em triângulo



$$\dot{V}_{AN'} = \dot{V}_{AN} = \dot{I}_{AA'}\left(\bar{Z}' + \frac{\bar{Z}}{3}\right)$$

logo,

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{3\,\dot{V}_{AN}}{3\,\bar{Z}' + \bar{Z}}$$

Finalmente, a corrente de fase, na carga em triângulo, é dada por

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{I}_{AA'}}{\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ}} = \frac{3\,\dot{V}_{AN}}{\left(3\,\bar{Z}' + \bar{Z}\right)\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ}} = \frac{\dot{V}_{AN}\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}}{3\,\bar{Z}' + \bar{Z}} = \frac{\dot{V}_{AB}}{3\,\bar{Z}' + \bar{Z}}$$

Resolução de circuitos em triângulo

Exemplo 4.5

Um gerador trifásico alimenta por meio de uma linha uma carga trifásica equilibrada. São conhecidos:

(1) o tipo de ligação do gerador (Δ) e da carga (Δ);

(2) a tensão de linha do gerador (220 V), a freqüência (60 Hz), e a seqüência de fase (direta);

(3) a impedância de cada um dos ramos da carga, $(3+j4)\ \Omega$;

(4) a resistência $0,2\ \Omega$ e a reatância indutiva $0,15\ \Omega$ de cada fio da linha,

Pedem-se:

(a) as tensões de fase e de linha no gerador;

(b) as correntes de linha;

(c) as correntes de fase na carga;

(d) as tensões de fase e de linha na carga;

Resolução de circuitos em triângulo

Solução:

(a) Tensões de fase e de linha no gerador

As tensões de fase coincidem com as de linha e valem, para a seqüência A-B-C,

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{AB} \\ \dot{V}_{BC} \\ \dot{V}_{CA} \end{bmatrix} = 220 \underline{|0^\circ} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{bmatrix} \ V$$

(b) Determinação das correntes de linha

Resolução de circuitos em triângulo

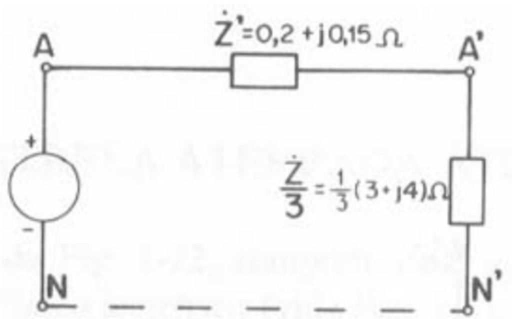
Substituindo a carga em triângulo por outra equivalente em estrela, tem-se o circuito da Figura. 4.11, obtendo:

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\overline{Z}' + \overline{Z}/3} = \frac{\left(220\,\underline{|0^\circ}\right)/\left(\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ}\right)}{1{,}2 + j\,1{,}48}$$

Logo,

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{127\,\underline{|-30^\circ}}{1{,}9\,\underline{|51^\circ}} = 66{,}6\,\underline{|-81^\circ}\ \ A$$

e então $\dot{I}_{BB'} = 66{,}6\,\underline{|-201^\circ}\ \ A$, $\dot{I}_{CC'} = 66{,}6\,\underline{|39^\circ}\ \ A$



Resolução de circuitos em triângulo

(c) Determinação das correntes de fase na carga

Na carga em triângulo, tem-se:

$$\dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{I}_{AA'}}{\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ}} = \frac{66{,}6\,\underline{|-81^\circ}}{\sqrt{3}\,\underline{|-30^\circ}} = 38{,}5\,\underline{|-51^\circ}\ \ A$$

$$\dot{I}_{B'C'} = 38{,}5\,\underline{|-171^\circ}\ \ A$$

$$\dot{I}_{C'A'} = 38{,}5\,\underline{|69^\circ}\ \ A$$

(d) Determinação das tensões na carga

Da Figura. 4.11, obtém-se:

$$\dot{V}_{A'N'} = \dot{I}_{AA'}\,\frac{\overline{Z}}{3} = \frac{66{,}6\,\underline{|-81^\circ}\,.\,5\,\underline{\underline{|53{,}1^\circ}}}{3} = 111\,\underline{|-27{,}9^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{B'N'} = 111\,\underline{|-147{,}9^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{C'N'} = 111\,\underline{|92{,}1^\circ}\ \ V$$

As tensões de fase e de linha na carga são iguais, e valem:

$$\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{A'N'}\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 111\,\underline{|-27{,}9^\circ}\,.\,\sqrt{3}\,\underline{|30^\circ} = 192\,\underline{|2{,}1^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{B'C'} = 192\,\underline{|-117{,}9^\circ}\ \ V$$

$$\dot{V}_{C'A'} = 192\,\underline{|122{,}1^\circ}\ \ V$$

Resolução de circuitos em triângulo

Exercício:

Duas cargas equilibradas ligadas em delta com impedâncias de $Z_1 = 20/\underline{-60^o}\ \Omega$ e $Z_2 = 18/\underline{45^o}\ \Omega$, respectivamente, estão ligadas a um gerador trifásico, simétrico, cuja tensão eficaz de linha é 380V. As linhas entre o gerador e as cargas têm a impedância de $Z' = 2{,}24|\underline{26{,}57^o}\ \Omega$ por fase.

Pede-se obter as correntes de linha.

Resolução de circuitos em triângulo

Exercício:

a) Associação das cargas em paralelo:

$$\bar{Z}_{EQ} = \bar{Z}_1 // \bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_1 . \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{20|\underline{-60°}.18|\underline{45°}}{20|\underline{-60°}+8|\underline{45°}} = \frac{360|\underline{-15°}}{10 - j17,32 + 5,66 + j5,66}$$

$$\bar{Z}_{EQ} = \frac{360|\underline{-15°}}{15,66 - j11,66} = \frac{360|\underline{-15°}}{28,75|\underline{36,67°}} = 12,52|\underline{-51,67°}$$

a)Cálculo da impedância Equivalente em estrela:

$$\bar{Z}_{EQY} = \frac{\bar{Z}_{EQ}}{3} = \frac{12,52|\underline{-51,67°}}{3} = 4,17|\underline{-51,67°}$$

b)Cálculo das Correntes de linha:

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{\dot{V}_{AN}}{\bar{Z}' + \bar{Z}_{EQY}} = \frac{380|\underline{0°}/\sqrt{3}|\underline{30°}}{4,17|\underline{-51,67°} + 2,24|\underline{26,57°}} = \frac{220|\underline{-30°}}{2,59 - j3,27 + 2 + j1} = \frac{220|\underline{-30°}}{4,59 - j2,27}$$

$$\dot{I}_{AA'} = \frac{220|\underline{-30°}}{5,12|\underline{-30,46°}} = 42,97|\underline{0,46°} \quad (A)$$

Circuitos Trifásicos - Aula 4

4.1 - Potência em circuitos trifásicos

- **Expressão geral da potência em circuitos trifásicos equilibrados**

Potência em circuitos trifásicos

Seja uma carga trifásica na qual os valores instantâneos das tensões e correntes de fase são:

$$v_A = V_{A_M}\cos(\omega t + \theta_A) \qquad i_A = I_{A_M}\cos(\omega t + \delta_A)$$
$$v_B = V_{B_M}\cos(\omega t + \theta_B) \qquad i_B = I_{B_M}\cos(\omega t + \delta_B)$$
$$v_C = V_{C_M}\cos(\omega t + \theta_C) \qquad i_C = I_{C_M}\cos(\omega t + \delta_C)$$

A potência instantânea em cada fase é dada por

$$\begin{aligned} p_A &= v_A\, i_A = V_{F_A} I_{F_A}\cos(\theta_A - \delta_A) + V_{F_A} I_{F_A}\cos(2\,\omega t + \theta_A + \delta_A) \\ p_B &= v_B\, i_B = V_{F_B} I_{F_B}\cos(\theta_B - \delta_B) + V_{F_B} I_{F_B}\cos(2\,\omega t + \theta_B + \delta_B) \\ p_C &= v_C\, i_C = V_{F_C} I_{F_C}\cos(\theta_C - \delta_C) + V_{F_C} I_{F_C}\cos(2\,\omega t + \theta_C + \delta_C) \end{aligned} \qquad (4.9)$$

em que V_{FA} V_{FB} V_{FC} , e são os valores eficazes das tensões de fase e I_{FA} , I_{FB} e I_{FC} são os valores eficazes das correntes de fase.

Fazendo-se
$$\begin{aligned} \theta_A - \delta_A &= \varphi_A \\ \theta_B - \delta_B &= \varphi_B \\ \theta_C - \delta_C &= \varphi_C \end{aligned}$$
resulta
$$\begin{aligned} p_A &= V_{F_A} I_{F_A}\cos\varphi_A + V_{F_A} I_{F_A}\cos(2\,\omega t + \theta_A - \varphi_A) \\ p_B &= V_{F_B} I_{F_B}\cos\varphi_B + V_{F_B} I_{F_B}\cos(2\,\omega t + \theta_B - \varphi_B) \\ p_C &= V_{F_C} I_{F_C}\cos\varphi_C + V_{F_C} I_{F_C}\cos(2\,\omega t + \theta_C - \varphi_C) \end{aligned}$$

Potência em circuitos trifásicos

A potência total é dada por: $p = p_A + p_B + p_C$

Portanto, o valor médio da potência será:

$P = P_A + P_B + P_C = V_{FA}\, I_{FA} \cos \varphi_A + V_{FB}\, I_{FB} \cos \varphi_B + V_{FC}\, I_{FC} \cos \varphi_C$

A $\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C = \dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^*_{F_A} + \dot{V}_{F_B}\, \dot{I}^*_{F_B} + \dot{V}_{F_C}\, \dot{I}^*_{F_C}$

N $V_{F_A} = V_{F_B} = V_{F_C} = V_F$ o, com sequência direta, tem-se:

$$\theta_B = \theta_A - 2\pi/3$$
$$\theta_C = \theta_A + 2\pi/3$$

e, sen $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$ da,

$$I_{F_A} = I_{F_B} = I_{F_C} = I_F$$

Substitu

$$p_A = V_F\, I_F \cos\varphi + V_F\, I_F \cos\left(2\,\omega t + \theta_A - \varphi\right)$$
$$p_B = V_F\, I_F \cos\varphi + V_F\, I_F \cos\left(2\,\omega t + \theta_A - 4\pi/3 - \varphi\right)$$
$$p_C = V_F\, I_F \cos\varphi + V_F\, I_F \cos\left(2\,\omega t + \theta_A + 4\pi/3 - \varphi\right)$$

e portanto, a potência instantânea total é dada por:

Potência em circuitos trifásicos

A potência complexa será dada por:

$$\overline{S} = \dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^*_{F_A} + \alpha^2\, \dot{V}_{F_A} \left(\alpha^2\, \dot{I}_{F_A}\right)^* + \alpha\, \dot{V}_{F_A} \left(\alpha\, \dot{I}_{F_A}\right)^*$$

mas, sendo: $\alpha^* = \alpha^2$ e $(\alpha^2)^* = \alpha$

Resulta: $\overline{S} = \dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^*_{F_A} + \dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^*_{F_A} + \dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^*_{F_A} = 3\, \dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^*_{F_A}$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$\overline{S} = 3\, V_F \,\underline{|\theta_A}\, .\, I_F \,\underline{|-\delta_A} = 3\, V_F\, I_F \,\underline{|\theta_A - \delta_A} = 3\, V_F\, I_F \,\underline{|\varphi}$$

Então: $\overline{S} = 3\, V_F\, I_F \cos\varphi + j\, 3\, V_F\, I_F \operatorname{sen}\varphi$ (4.11)

Da Equação. (4.11), nota-se que:

$$S = 3\, V_F\, I_F$$

$$P = 3\, V_F\, I_F \cos\varphi$$

$$Q = 3\, V_F\, I_F \operatorname{sen}\varphi$$

Potência em circuitos trifásicos

Usualmente, nos sistemas trifásicos **não se dispõe dos valores de tensão e corrente de fase**, é oportuno dar a potência complexa em função dos valores de tensão de linha, V_L, e da corrente de linha, I_L.

Para a carga ligada em estrela: $V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$, $I_F = I_L$

Logo:

$$\bar{S} = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi + j\, 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi + j \sqrt{3}\, V_L\, I_L \operatorname{sen}\varphi$$

ou seja,

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \sqrt{3}\, V_L\, I_L \\ P &= \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi \\ Q &= \sqrt{3}\, V_L\, I_L \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}}$$

Para a carga ligada em triângulo, tem-se: $V_F = V_L$, $I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$

Logo: $\bar{S} = 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi + j\, 3 V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\varphi = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi + j \sqrt{3}\, V_L\, I_L \operatorname{sen}\varphi$

ou seja:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \sqrt{3}\, V_L\, I_L \\ P &= \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi \\ Q &= \sqrt{3}\, V_L\, I_L \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}}$$

Potência em circuitos trifásicos

- Define-se ***fator de potência de uma carga trifásica equilibrada*** = cosseno do ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente numa mesma fase.
- Em se tratando de carga desequilibrada, o fator de potência é definido pela relação: P/S ou $P/\sqrt{P^2 + Q^2}$.
- Em conclusão, pode-se afirmar que: num trifásico simétrico e equilibrado com carga equilibrada, qualquer que seja o tipo de ligação, são válidas as equações:

$$S = \sqrt{3}\, V_L\, I_L$$

$$P = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \cos\varphi$$

$$Q = \sqrt{3}\, V_L\, I_L \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\overline{S} = P + jQ = 3\dot{V}_{F_A}\, \dot{I}^{*}_{F_A}$$

Exercícios

- Exercício 1:

Uma fábrica possui um gerador que alimenta suas diversas cargas com tensão de linha 220 V e freqüência 60 Hz. Essas cargas, admitidas ligadas em estrela, podem ser agrupadas do seguinte modo:

1. iluminação: 25 kW, fator de potência 1,0;
2. compressor acionado por motor de indução de 100 cv (1 cv = 735 W) com rendimento de 90,6% e fator de potência 0,90 indutivo;
3. máquinas diversas acionadas por motores de indução totalizando 50 cv com rendimento de 79% e fator de potência 0,75 indutivo, considerado o fator de diversidade.

Sabendo-se que essas cargas são equilibradas pede-se determinar:

a) a potência fornecida pelo gerador;
b) a corrente de linha;
c) o fator de potência da indústria;

Exercícios

- Exercício 1:

Uma fábrica possui um gerador que alimenta suas diversas cargas com tensão de linha 220 V e freqüência 60 Hz. Essas cargas, admitidas ligadas em estrela, podem ser agrupadas do seguinte modo:

1. iluminação: 25 kW, fator de potência 1,0;
2. compressor acionado por motor de indução de 100 cv (1 cv = 735 W) com rendimento de 90,6% e fator de potência 0,90 indutivo;
3. máquinas diversas acionadas por motores de indução totalizando 50 cv com rendimento de 79% e fator de potência 0,75 indutivo, considerado o fator de diversidade.

Sabendo-se que essas cargas são equilibradas pede-se determinar:

a) a potência fornecida pelo gerador;
b) a corrente de linha;
c) o fator de potência da indústria;

Resposta:

a) $P = 152{,}6$ kW ; $Q = 80{,}3$ kVAr ; $S = 172{,}5$ kVA;
b) $|I_A| = 453$ A;
c) 0,885 indutivo;

Exercícios

- Exercício 2:

Uma carga trifásica equilibrada absorve, sob tensão de linha de 220 V, corrente de linha igual a 10 A. Sabendo-se que em cada fase a tensão de linha está adiantada de 90° em relação à respectiva corrente de linha pede-se determinar a potência absorvida pela carga.

Exercícios

- Exercício 2:

Uma carga trifásica equilibrada absorve, sob tensão de linha de 220 V, corrente de linha igual a 10 A. Sabendo-se que em cada fase a tensão de linha está adiantada de 90° em relação à respectiva corrente de linha pede-se determinar a potência absorvida pela carga.

Resposta:

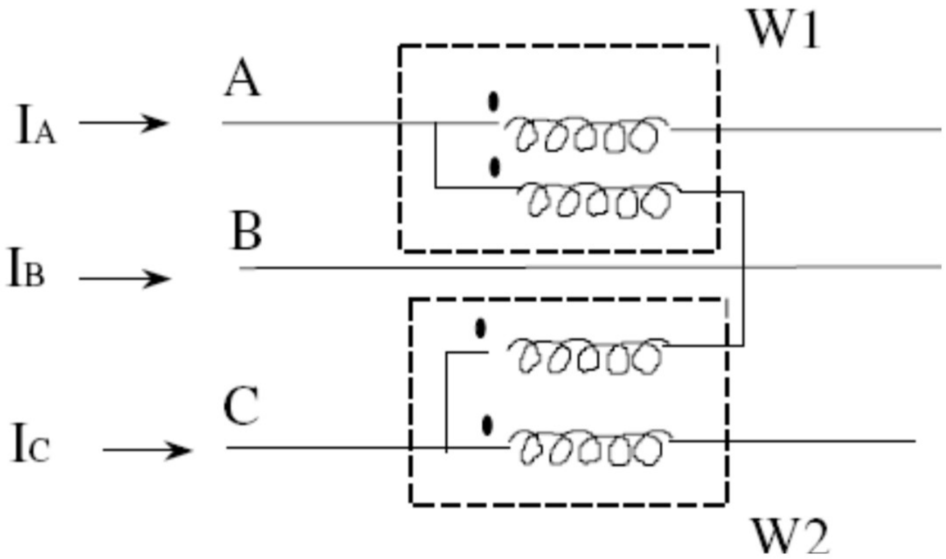
Adotando-se seqüência de fases direta: $P = 1905$ W ; $Q = 3300$ VAr ; $S = 3810$ VA (ligação Δ ou Y).

Circuitos Trifásicos - Aula 5

5.1 - Potência em circuitos trifásicos

- Medição de potência em circuitos equilibrados (Teorema de Blondel)
- Exercícios

Teorema de Blondel



$$W_1 = \mathrm{Re}[\dot{V}_{AB} \times \dot{I}_A^*] = \mathrm{Re}[(\dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN}) \times \dot{I}_A^*]$$

$$W_2 = \mathrm{Re}[\dot{V}_{CB} \times \dot{I}_C^*] = \mathrm{Re}[(\dot{V}_{CN} - \dot{V}_{BN}) \times \dot{I}_C^*]$$

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Re}[\dot{V}_{AN}\, \dot{I}_A^* - \dot{V}_{BN}\, (\dot{I}_A^* + \dot{I}_C^*) + \dot{V}_{CN}\, \dot{I}_C^*]$$

Lembrando que $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ (trifásico a 3 fios), resulta que :

$$W_1 + W_2 = \mathrm{Re}[\dot{V}_{AN}\, \dot{I}_A^* + \dot{V}_{BN}\, \dot{I}_B^* + \dot{V}_{CN}\, \dot{I}_C^*] = \text{potência ativa total}$$

Circuitos Trifásicos - Aula 6

6.1 - Exercícios de circuitos trifásicos

Exercícios

- Exercício 3:

Uma fábrica possui um gerador que alimenta suas diversas cargas com tensão de linha 220 V e freqüência 60 Hz. Essas cargas, admitidas ligadas em estrela, podem ser agrupadas do seguinte modo:

1. iluminação: 25 kW, fator de potência 1,0;
2. compressor acionado por motor de indução de 100 cv (1 cv = 735 W) com rendimento de 90,6% e fator de potência 0,90 indutivo;
3. máquinas diversas acionadas por motores de indução totalizando 50 cv com rendimento de 79% e fator de potência 0,75 indutivo, considerado o fator de diversidade.

Sabendo-se que essas cargas são equilibradas pede-se determinar:

a) a potência fornecida pelo gerador;
b) a corrente de linha;
c) o fator de potência da indústria;

Já foram resolvidos anteriormente!!!

d) a leitura em dois wattímetros ligados na saída do gerador;
e) o que fazer para conduzir o fator de potência ao valor 1,0.

Fazer!!!

Exercícios

- Exercício 3:

Uma fábrica possui um gerador que alimenta suas diversas cargas com tensão de linha 220 V e freqüência 60 Hz. Essas cargas, admitidas ligadas em estrela, podem ser agrupadas do seguinte modo:

1. iluminação: 25 kW, fator de potência 1,0;
2. compressor acionado por motor de indução de 100 cv (1 cv = 735 W) com rendimento de 90,6% e fator de potência 0,90 indutivo;
3. máquinas diversas acionadas por motores de indução totalizando 50 cv com rendimento de 79% e fator de potência 0,75 indutivo, considerado o fator de diversidade.

Sabendo-se que essas cargas são equilibradas pede-se determinar:

a) a potência fornecida pelo gerador;
b) a corrente de linha;
c) o fator de potência da indústria;

Já foram resolvidos anteriormente!!!

d) a leitura em dois wattímetros ligados na saída do gerador;
e) o que fazer para conduzir o fator de potência ao valor 1,0.

Fazer!!!

Resposta:

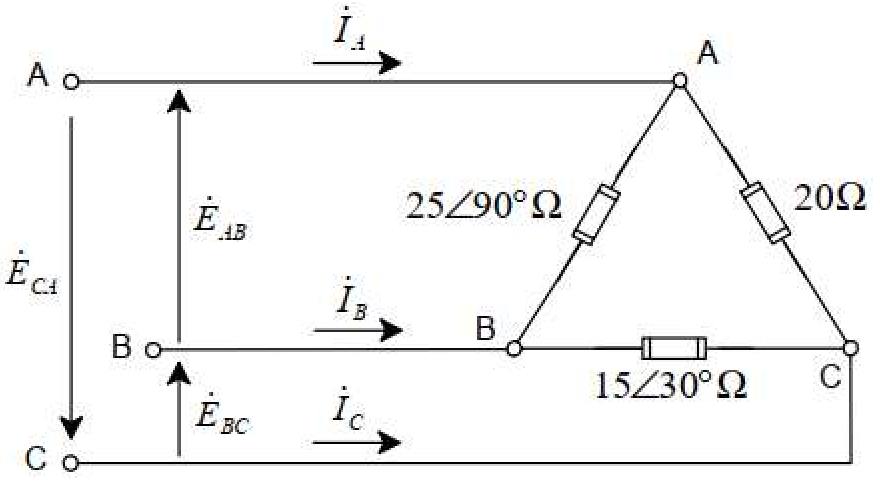
d) $W_1 = 53{,}1$ kW ; $W_2 = 99{,}5$ kW;

e) $C_\Delta = 1467$ μF ; $C_Y = 4402$ μF.

Exercícios para Complementação do Estudo

- Exercício 4: Método dos dois Wattímetros

Exemplo 4: Uma fonte trifásica com seqüência ABC, com $\dot{E}_{AB} = 220\angle 0°$ V na referência tem uma carga ligada em Δ não equilibrada, conforme figura abaixo. Obter as correntes de linha e a potência total consumida através do método dos dois watímetros, com estes colocados nas fases A e B e também pela soma das potências por fase.



$\dot{E}_{AB} = 220\angle 0°$ V

$\dot{E}_{BC} = 220\angle -120°$ V

$\dot{E}_{CA} = 220\angle 120°$ V

Exercícios

- Resolução do Exercício 4:

O primeiro passo é a determinação das correntes solicitadas pelas impedâncias. Assim:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{E}_{AB}}{\dot{Z}_A} = \frac{220\angle 0^\circ}{25\angle 90^\circ} = 8{,}8\angle -90 = (0 - j8{,}8)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{E}_{BC}}{\dot{Z}_B} = \frac{220\angle -120^\circ}{15\angle 30^\circ} = 14{,}67\angle -150^\circ = (-12{,}7 - j7{,}33)\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{E}_{CA}}{\dot{Z}_C} = \frac{220\angle 120^\circ}{20\angle 0^\circ} = 11{,}0\angle 120^\circ = (-5{,}5 + j9{,}53)\ \text{A}$$

Pode-se então calcular as correntes de linha:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 8{,}8\angle -90^\circ - 11{,}0\angle 120^\circ = 19{,}14\angle -73{,}30^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 14{,}67\angle -150^\circ - 8{,}8\angle -90^\circ = 12{,}78\angle 173{,}40^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 11{,}0\angle 120^\circ - 14{,}67\angle -150^\circ = 18{,}33\angle 66{,}87^\circ\ \text{A}$$

Exercícios

- Resolução do Exercício 4:

Pode-se agora passar ao cálculo das potências, primeiramente pelo método dos dois watímetros (observar que a tensão no primeiro watímetro é $\dot{E}_{AC}$ que é igual a $-\dot{E}_{CA}$ que vale $220\angle -60°$ V):

$$P_1 = E_{AC}.I_A.\cos(\angle \text{entre } \dot{E}_{AC} \text{ e } \dot{I}_A) = 220.19{,}14.\cos(-60° + 73{,}30°) = 4098 \text{ W}$$

$$P_2 = E_{BC}.I_B.\cos(\angle \text{entre } \dot{E}_{BC} \text{ e } \dot{I}_B) = 220.12{,}78.\cos(240° - 173{,}40°) = 1117 \text{ W}$$

$$P_T = P_1 + P_2 = 4098 + 1117 = 5214 \text{ W}$$

Em seguida calcula-se a potência pelo método das potências de fase (observar que os ângulos dos fatores de potência são os ângulos das impedâncias):

$$P_{AB} = E_{AB}.I_{AB}.\cos\phi_{AB} = 220.8{,}8.\cos(90°) = 0 \text{ W}$$

$$P_{BC} = E_{BC}.I_{BC}.\cos\phi_{BC} = 220.14{,}67.\cos(30°) = 2795 \text{ W}$$

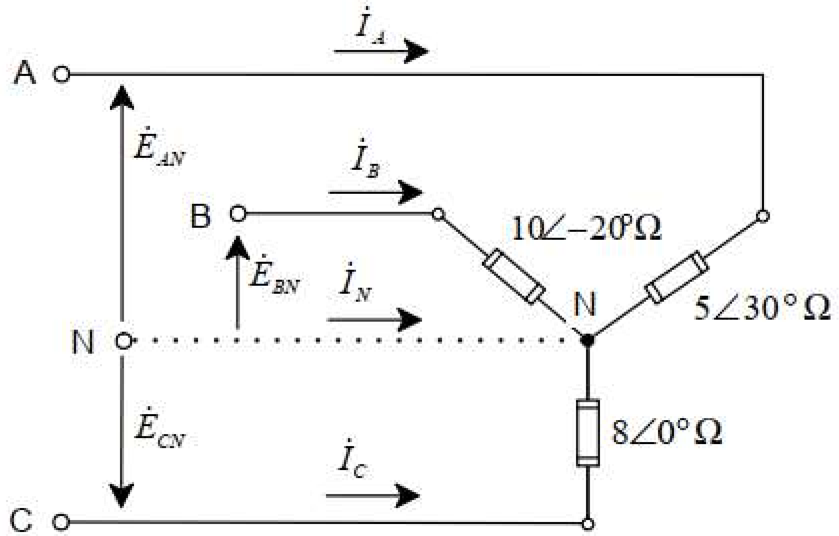
$$P_{CA} = E_{CA}.I_{CA}.\cos\phi_{CA} = 220.11.\cos(0°) = 2420 \text{ W}$$

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 2795 + 2420 = 5215 \text{ W}$$

Obs.: com o método das potências de fase não é necessário conhecer-se a seqüência adotada.

- Exercício 5: Método dos Três Wattímetros

Exemplo 5: Uma fonte trifásica com seqüência CBA, com $\dot{E}_{BC} = 220\angle 0°$ V na referência tem uma carga ligada em Y a 4 fios não equilibrada, conforme figura abaixo. Obter as correntes de linha e a potência total consumida através do método dos três watímetros.



$$\dot{E}_{AN} = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle -150° = 127{,}02\angle 90°\,\text{V}$$

$$\dot{E}_{BN} = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle -30° = 127{,}02\angle -30°\,\text{V}$$

$$\dot{E}_{CN} = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle 90° = 127{,}02\angle -150°\,\text{V}$$

- Resolução do Exercício 5:

O primeiro passo é a determinação das correntes solicitadas pelas impedâncias. Assim:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_{AN}}{\dot{Z}_A} = \frac{127{,}02\angle 90^\circ}{5\angle 30^\circ} = 25{,}40\angle 60^\circ \text{ A} \qquad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_{BN}}{\dot{Z}_B} = \frac{127{,}02\angle -30^\circ}{10\angle -20^\circ} = 12{,}70\angle -10 \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_{CN}}{\dot{Z}_C} == \frac{127{,}02\angle -150^\circ}{8\angle 0^\circ} = 15{,}88\angle -150 \text{ A}$$

Pode-se então calcular as potências medidas pelos três watímetros (observar que os ângulos dos fatores de potência são os ângulos das impedâncias):

$$P_A = E_{AN}.I_A.\cos\phi_A = 127{,}02.24{,}40.\cos(30^\circ) = 2794 \text{ W}$$
$$P_B = E_{BN}.I_B.\cos\phi_B = 127{,}02.12{,}70.\cos(-20^\circ) = 1516 \text{ W}$$
$$P_C = E_{CN}.I_C.\cos\phi_C = 127{,}02.15{,}88.\cos(0^\circ) = 2017 \text{ W}$$
$$P_T = P_A + P_B + P_C = 2794 + 1516 + 2017 = 6327 \text{ W}$$

Observar que novamente a seqüência de fase utilizada não foi utilizada para o cálculo das potências.