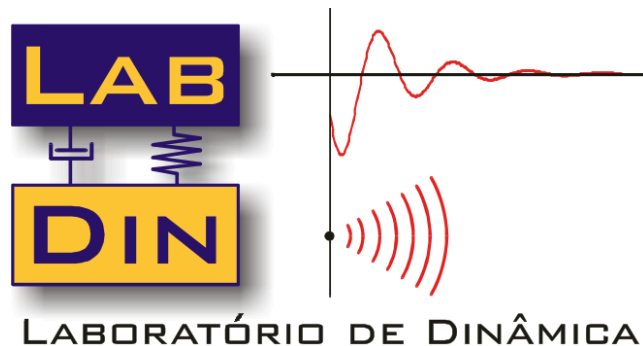


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Elétricos
Teoria

Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar elementos teóricos para a modelagem de Sistemas Elétricos no contexto da Dinâmica de Sistemas. Os elementos de sistemas elétricos dividem-se em dois grupos: (i) passivos (*p*) e ; (ii) ativos (*a*) :

- Resistência elétrica (*p*)
- Capacitância elétrica (*p*)
- Indutância Elétrica (*p*)
- O amplificador Operacional (*a*)

Bibliografia:

- 1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
- 2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

Introdução

Tal como no caso de sistemas mecânicos, onde procuramos estabelecer relações entre *força/movimento*, no caso de elementos e sistemas elétricos utilizaremos as grandezas *tensão/corrente elétrica*.

HIPÓTESE FUNDAMENTAL

Para usarmos o conceito de parâmetros concentrados assumiremos que a *dimensão geométrica* do elemento a ser considerado (por exemplo, um resistor) é *menor* do que o *comprimento de onda* associado à propagação do sinal no elemento.

Três elementos passivos:

- Resistência elétrica: *dissipação* de energia (efeito Joule)
- Capacitância elétrica: *armazenamento* de energia
- Indutância elétrica: “*inércia*” de um sistema elétrico

Um elemento “ativo”:

- Amplificador Operacional

**PUROS E
IDEAIS**

O ELEMENTO RESISTÊNCIA ELÉTRICA

Efeito físico: dissipação de energia elétrica (calor)

O elemento resistência elétrica *puro* e *ideal* obedece a primeira lei de Ohm

$$e = Ri$$

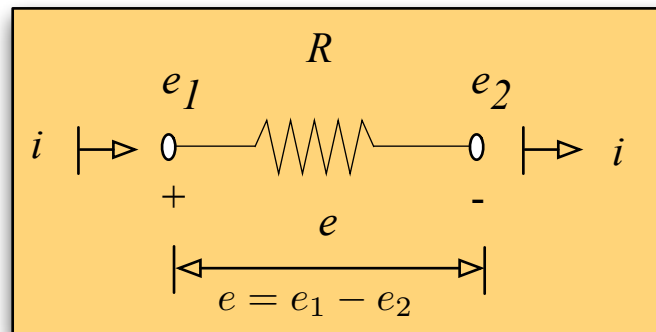
onde:

2ª Lei Ohm:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

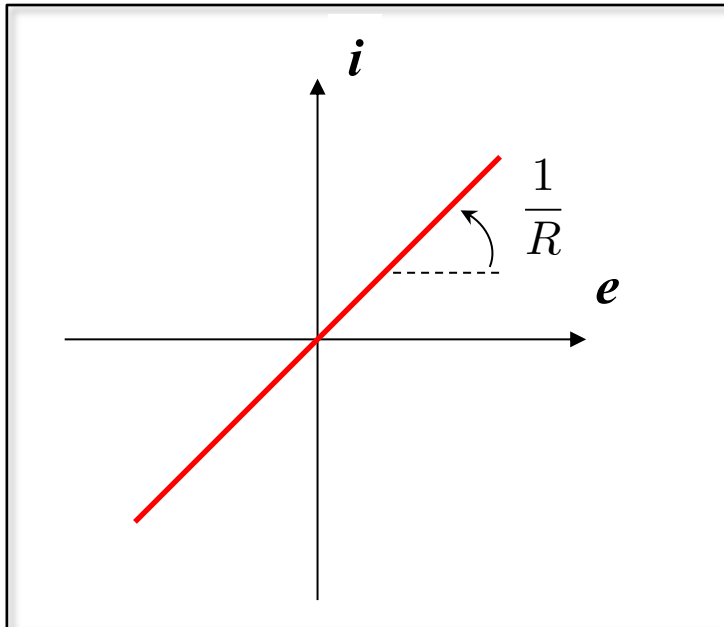
- e é a tensão elétrica nos terminais do elemento (V)
- i é a corrente elétrica que percorre o elemento (A)
- R é o valor da resistência elétrica (Ω)

Sua representação:



O ELEMENTO RESISTÊNCIA ELÉTRICA

Sua curva característica é mostrada abaixo



Para o **elemento resistência ideal** (linear), o valor da resistência é dado pela relação:

$$R = \frac{e}{i} \quad G = \frac{i}{e} = \frac{1}{R}$$

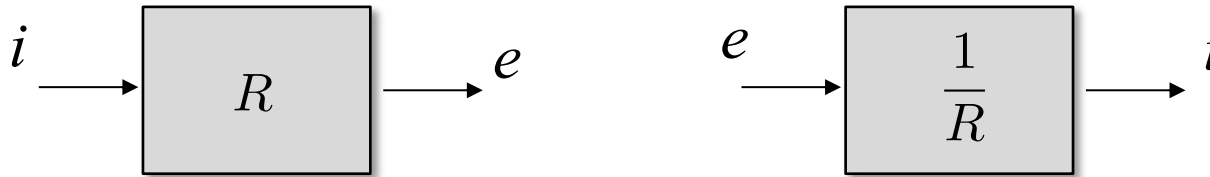
↓
condutância

Aplicando a T. L. à equação do elemento temos

$$\mathcal{L}(e(t)) = \mathcal{L}(Ri(t)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(s) = RI(s)}$$

O ELEMENTO RESISTÊNCIA ELÉTRICA

Diagrama de blocos e F.T. para o elemento resistência pura e ideal



Resistência elétrica: Elemento de *ordem zero* (ganho constante !)

O ELEMENTO CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Efeito físico: Armazenamento de energia elétrica

A noção básica de um capacitor *puro* e *ideal* prevê que dois condutores separados por um meio isolante (dielétrico) formam um capacitor e sua capacitância elétrica C é definida por

$$C = \frac{q}{e} \quad (\text{farads})$$

onde:

- q é a carga do capacitor (C)
- e é a tensão aplicada a seus terminais (V)

Sua representação:

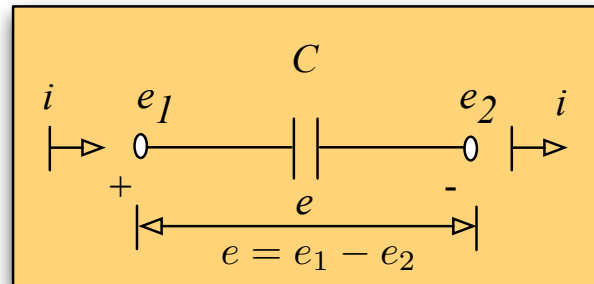
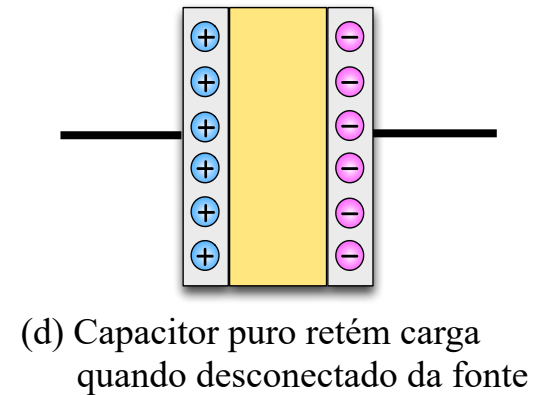
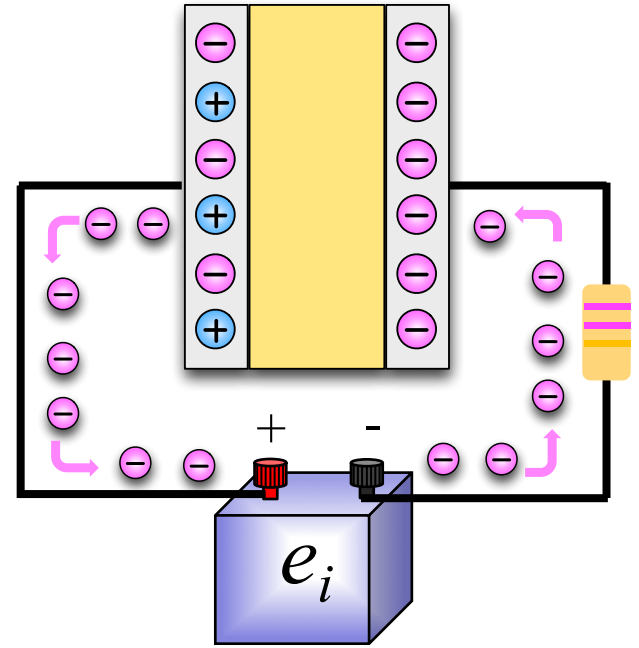
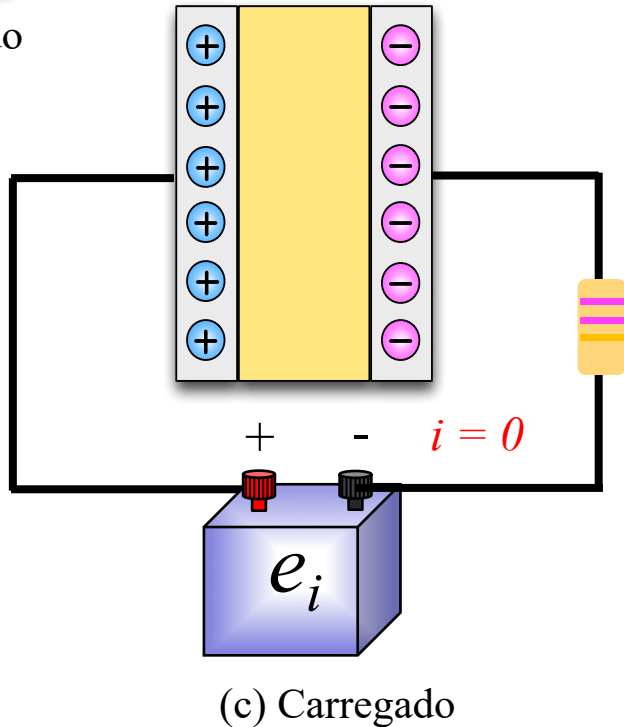
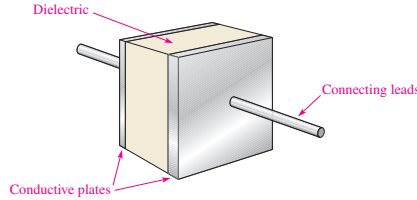
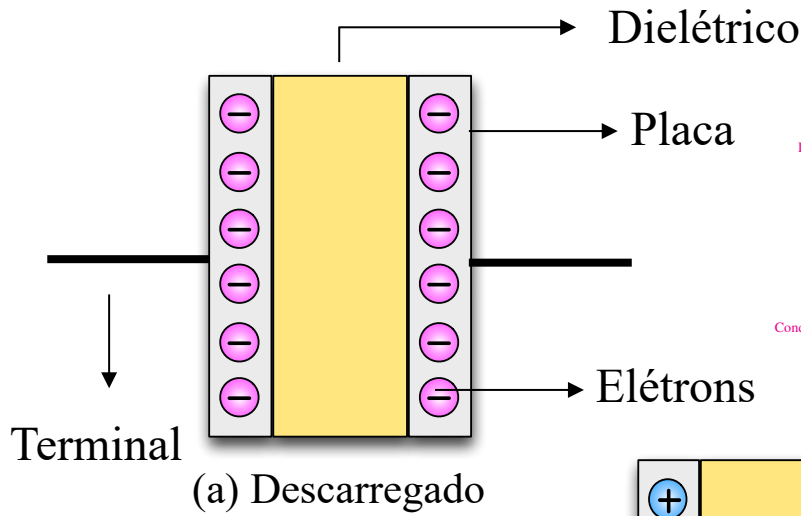
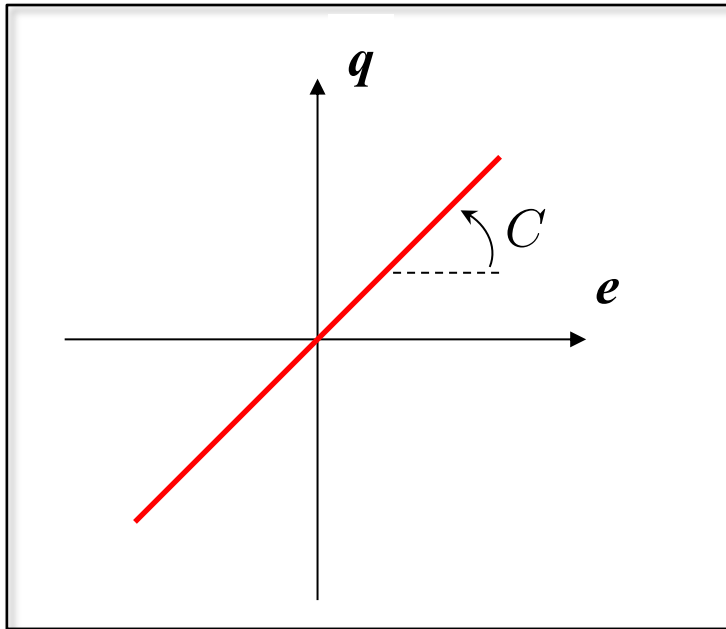


Ilustração do processo de carregamento de um capacitor de placas planas



O ELEMENTO CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Sua curva característica é mostrada abaixo



Para a relação tensão/corrente temos:

$$e = \frac{1}{C}q \quad i = \frac{dq}{dt}$$

Combinando estas duas temos:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = \frac{i}{C} \quad \Rightarrow \quad de = \frac{1}{C} i dt$$

Continuando, escrevemos:

$$\int_{e_0}^e de = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt$$

O ELEMENTO CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Integrando esta última expressão:

$$e - e_0 = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$$

Capacitor inicialmente descarregado
 $e_0 = 0$ em $t_0 = 0$

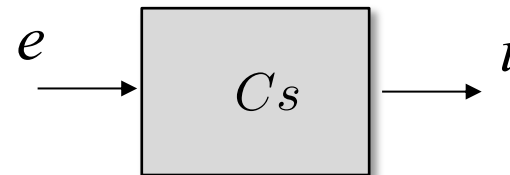
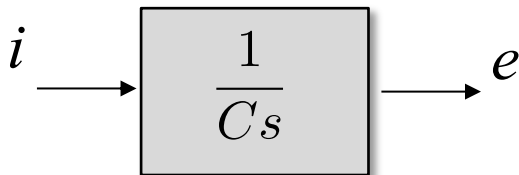
$$e(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

Aplicando a T. L. à esta última expressão vem:

$$\mathcal{L}(e(t)) = \frac{1}{C} \mathcal{L} \left(\int_{t_0}^t i(t) dt \right)$$

$$E(s) = \frac{1}{C_s} I(s)$$

Diagrama de blocos e F.T. para o elemento capacitância puro e ideal

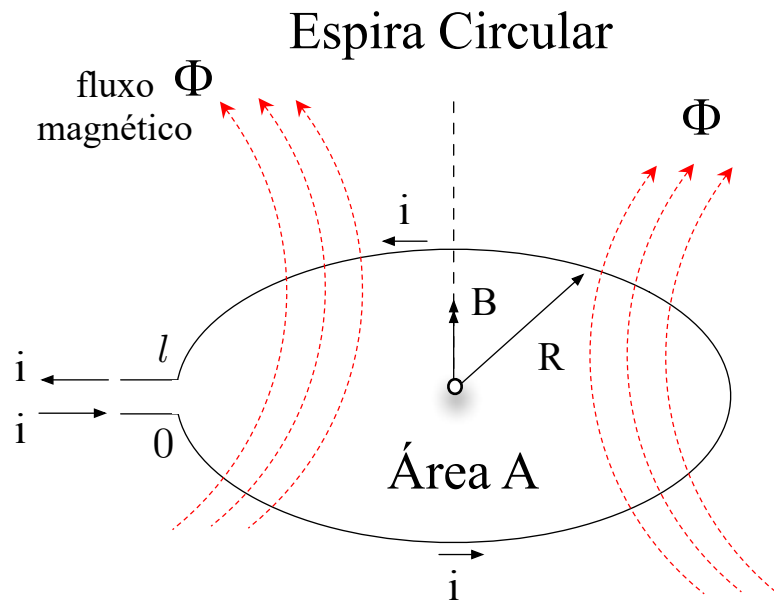


Capacitância elétrica: Elemento de *ordem 1* (integrador ou derivador !)

O ELEMENTO INDUTÂNCIA ELÉTRICA

Efeito físico: campo magnético gerado por corrente através de condutor

Premissa: Uma corrente elétrica (movimento de cargas elétricas) em um condutor sempre cria um campo magnético associado. Se este campo magnético varia com o tempo, uma força eletromotriz (tensão) é induzida no circuito



Campo Magnético:

μ – permeabilidade magnética do meio

$$B(t) = \mu \frac{i(t)}{l}$$

$$\Phi = AB(t) = \frac{A\mu}{l} i(t) = L i(t)$$

Lei de Maxwell: $e(t) = \frac{d\Phi}{dt}$

Logo: $e(t) = \frac{d(Li(t))}{dt}$

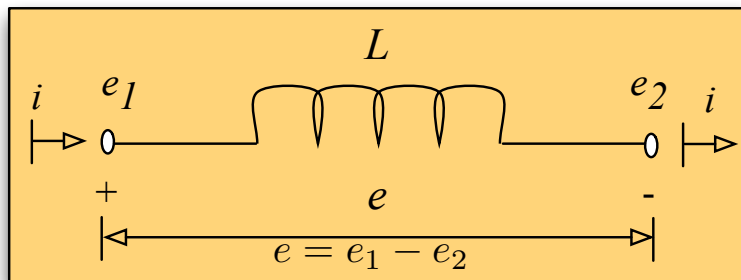


$$e(t) = L \frac{di}{dt}$$

indutor puro e ideal

O ELEMENTO INDUTÂNCIA ELÉTRICA

Representação do elemento:

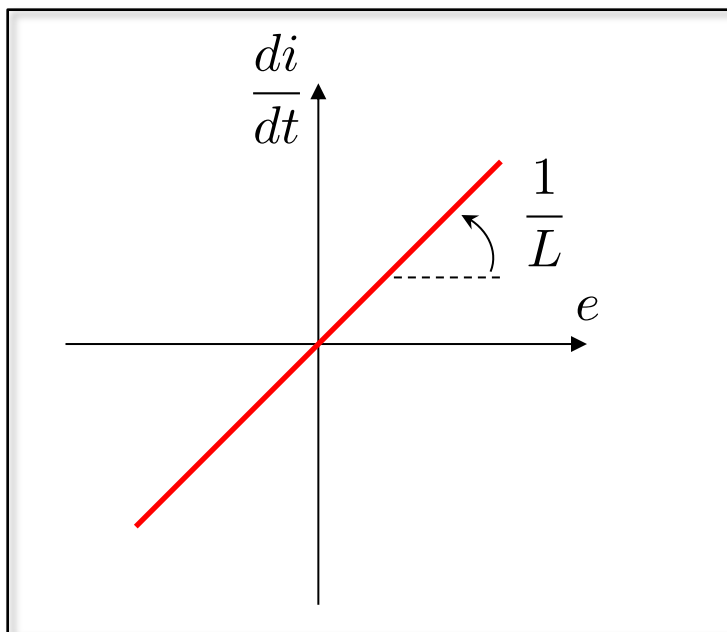


$$e(t) = L \frac{di}{dt}$$

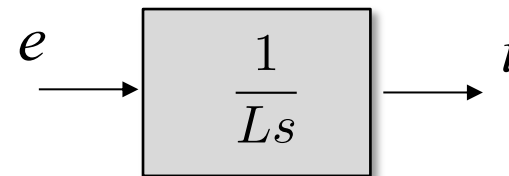
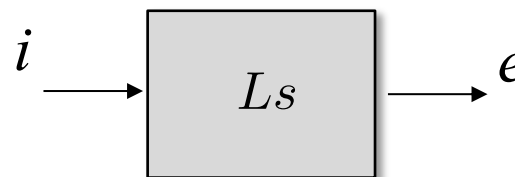
$\downarrow \mathcal{L}$

$$E(s) = Ls I(s)$$

Curva:



F.T.:



Indutância elétrica: Elemento de *ordem 1* (integrador ou derivador !)

ANALOGIAS ELETROMECAˆNICAS

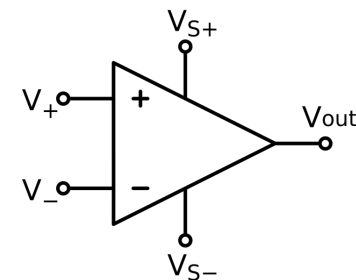
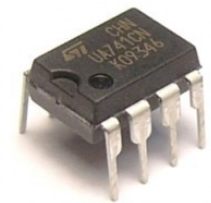
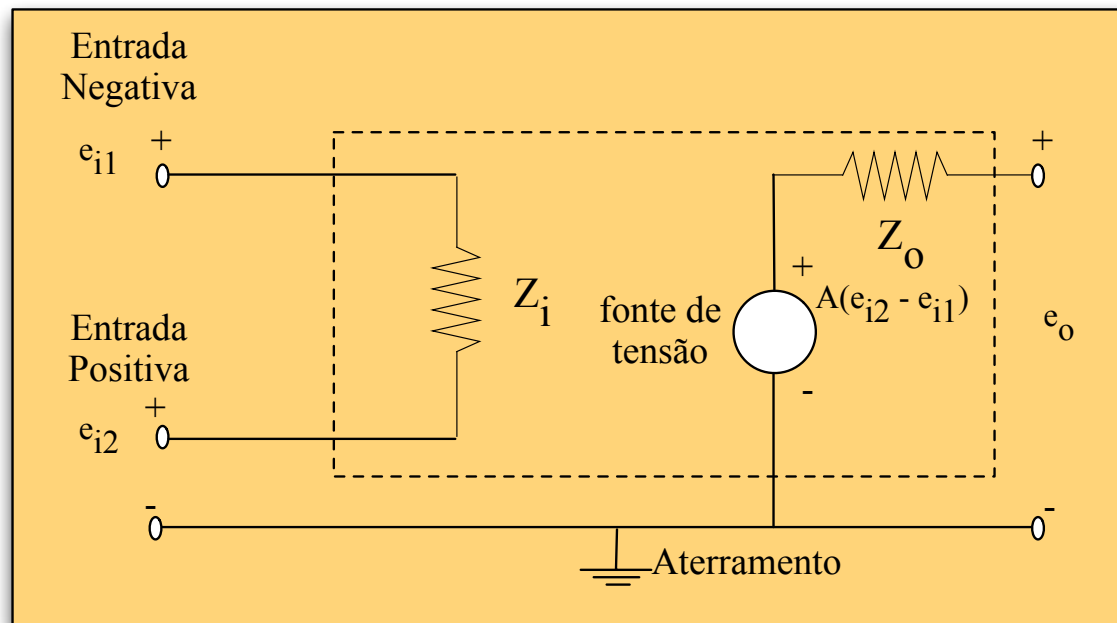
$$\begin{array}{l}
 \text{Impedˆncia Elˆtrica: } z(t) = \frac{e(t)}{i(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} \\
 \text{Impedˆncia Mecˆnica: } z(t) = \frac{f(t)}{v(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z(s) = \frac{F(s)}{V(s)}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} z(t) = \frac{e(t)}{i(t)} \\ z(t) = \frac{f(t)}{v(t)} \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 e(t) \longleftrightarrow f(t) \\
 i(t) \longleftrightarrow v(t) \\
 E(s) \longleftrightarrow F(s) \\
 I(s) \longleftrightarrow V(s)
 \end{array}$$

TABELA DE ANALOGIAS

MECˆNICO		ELˆTRICO	
ELEMENTO	IMPEDˆNCIA	ELEMENTO	IMPEDˆNCIA
MASSA	M_s	INDUTˆNCIA	L_s
MOLA	$1/K_s$	CAPACITˆNCIA	$1/C_s$
AMORTECEDOR	B	RESISTˆNCIA	R

O AMPLIFICADOR OPERACIONAL (amp-op)

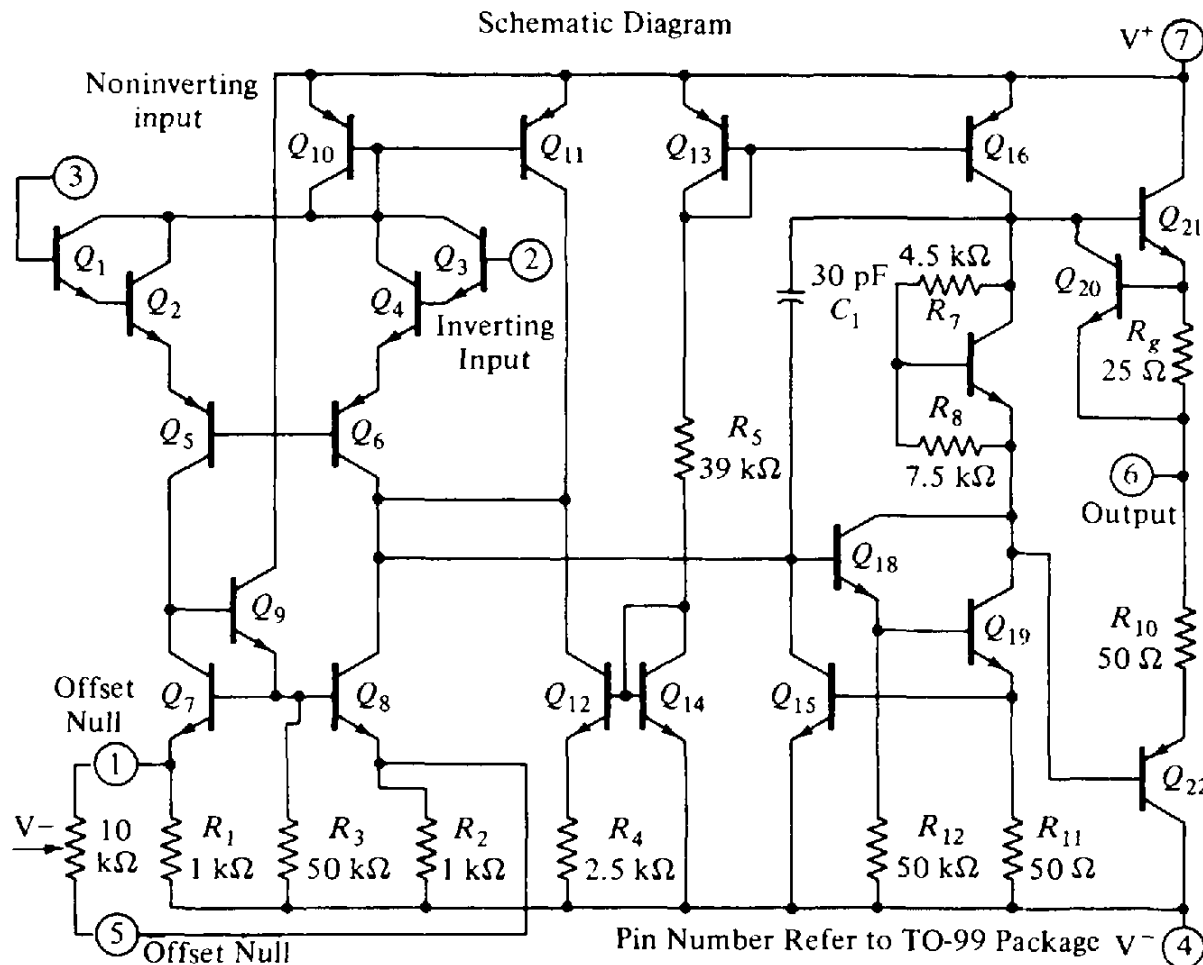
Embora muito útil em aplicações práticas o amp-op não é um elemento de sistemas elétricos conforme vimos nos casos anteriores, pois é construído a partir de outros elementos (resistores, transistores). Um modelo já simplificado do amp-op:



O modelo acima ainda permite algumas simplificações, a seguir

Cont. ...

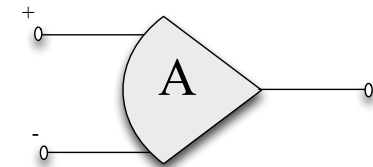
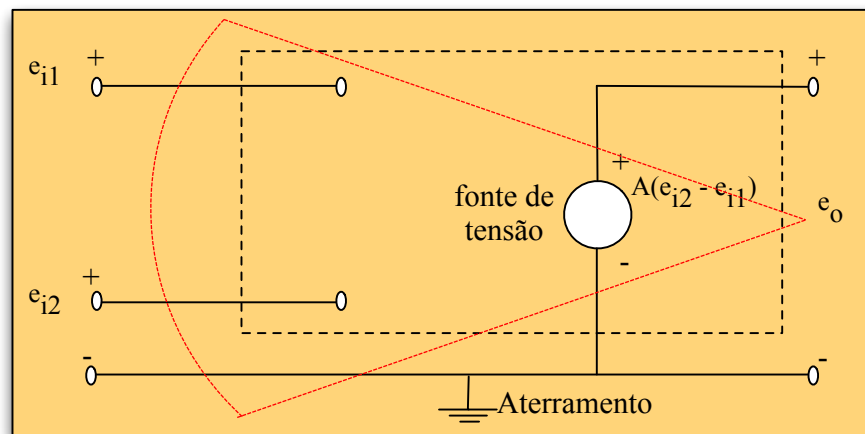
Modelo “real” de um amp-op de circuito integrado¹



¹ Doebelin, E. O., Modeling, Analysis, Simulation, Design, M.D., 1998

Cont. ...

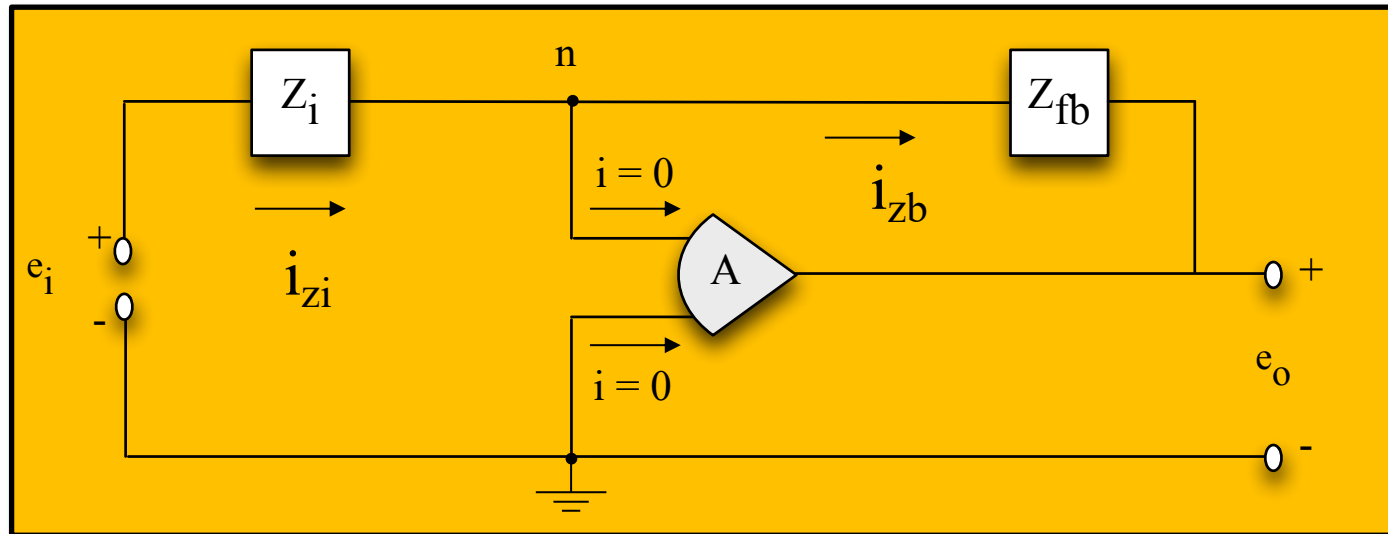
- Ganho A infinito ou muito grande
- Impedância de entrada Z_i infinita (o amp-op não tira energia do circuito externo)
- Impedância de saída Z_o nula
- Resposta instantânea no tempo
- Tensão de saída em uma faixa de projeto pré-estabelecida



No contexto de modelagem nos interessa avaliar como ele se comporta em um circuito elétrico. Então ...

Cont. ...

Seja o circuito abaixo composto da associação de elementos elétricos genéricos e, dentre eles um amp-op



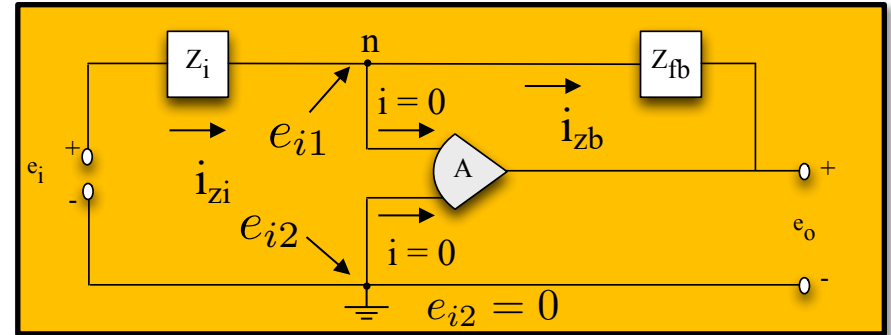
Onde:

- Z_i é a impedância de entrada no circuito
- Z_{fb} é chamada de impedância de feedback (retroalimentação)

Cont. ...

Então, como $i = 0$: $i_{Zi} = i_{Zfb}$

$$Z_i = \frac{e_i - e_{i1}}{i_{zi}} \quad Z_{fb} = \frac{e_{i1} - e_o}{i_{zfb}}$$



$$Z_i(s) = \frac{E_i(s) - E_{i1}(s)}{I_{zi}(s)} \implies I_{zi}(s) = \frac{E_i(s) - E_{i1}(s)}{Z_i(s)}$$

$$Z_{fb}(s) = \frac{E_{i1}(s) - E_o(s)}{I_{zfb}(s)} \implies I_{zfb}(s) = \frac{E_{i1}(s) - E_o(s)}{Z_{fb}(s)}$$

$$\implies \frac{E_i(s) - E_{i1}(s)}{Z_i(s)} = \frac{E_{i1}(s) - E_o(s)}{Z_{fb}(s)}$$

Cont. ...

E, desta última expressão podemos determinar a F.T. para o circuito com o amp-op:

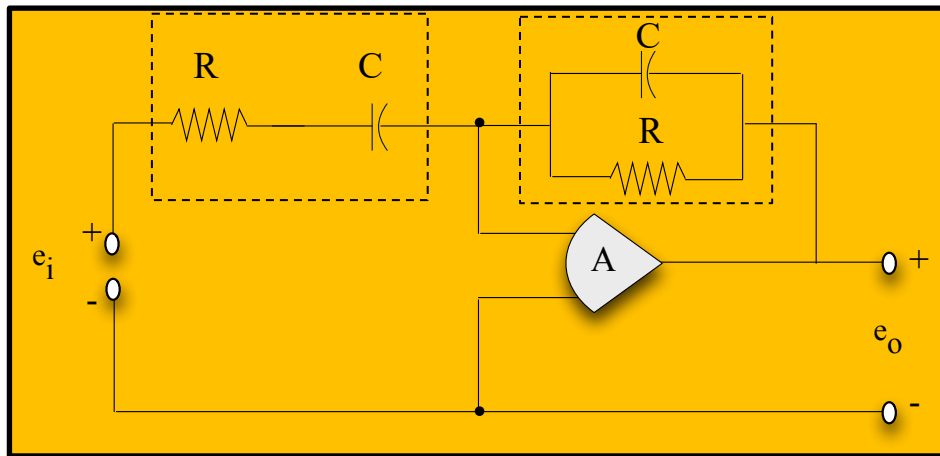
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{Z_{fb}(s)}{Z_i(s)}$$

$$Z_R = \frac{E(s)}{I(s)} = R$$

$$Z_C = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

Vejam os um exemplo:

$$Z_i(s) = R + \frac{1}{Cs} \quad Z_{fb}(s) = \frac{R(\frac{1}{Cs})}{R + \frac{1}{Cs}}$$



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 2RCs + 1}$$

FINM

Bom Estudo !