UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Elétricos
Exemplos

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

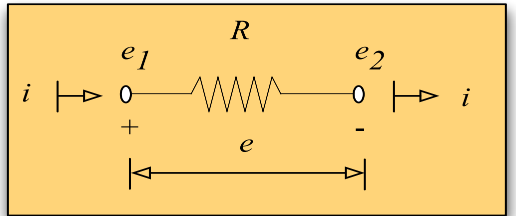
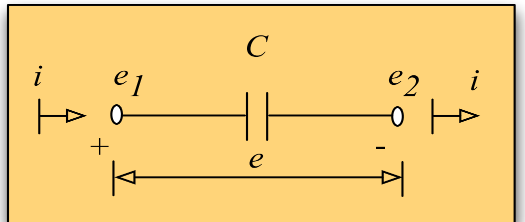
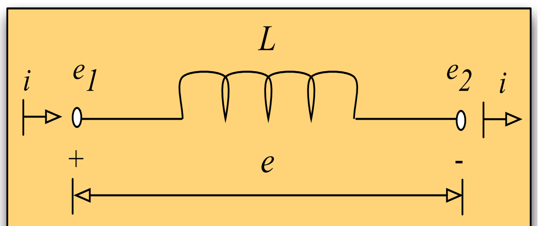
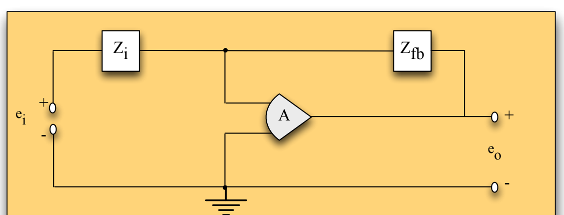
Objetivos

O objetivo da presente aula é apresentar, resolver e discutir exemplos introdutórios da modelagem de sistemas elétricos no contexto da dinâmica de sistemas.

Bibliografia:

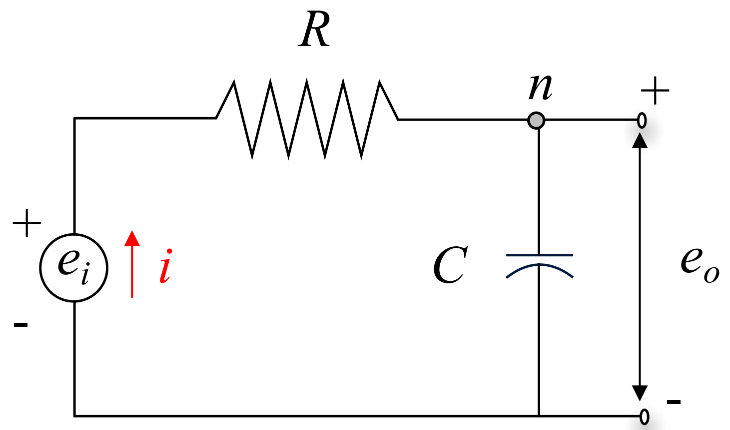
1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

Sumário Teórico

R		$e = Ri$	$E(s) = RI(s)$
C		$e(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\ dt$	$E(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$
I		$e(t) = L\frac{di}{dt}$	$E(s) = Ls\ I(s)$
A-O			$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_{fb}(s)}{Z_i(s)}$

Exemplo 1

A figura mostra o conhecido circuito R-C. Determine a F.T. Eo(s)/E_i(s). E.H.S.



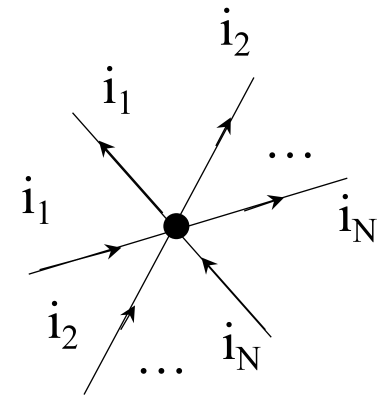
Hipóteses simplificadoras:

- Elementos puros e ideais
- Não há fuga de corrente elétrica no nó *n*

Cont. ...

2-) Leis Físicas

Neste caso usaremos as Leis de Kirchhoff:

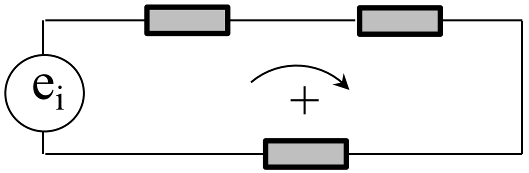


Lei dos Nós

$$\sum i_{chegam} = \sum i_{saem}$$

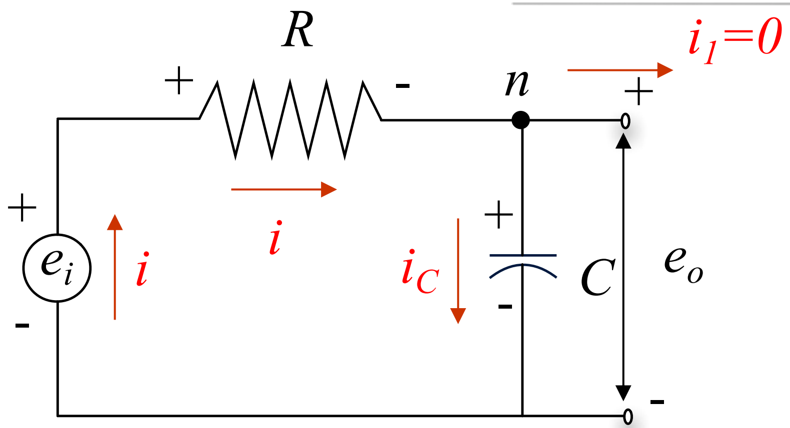
Lei das Malhas

$$\sum e_{malha} = 0$$

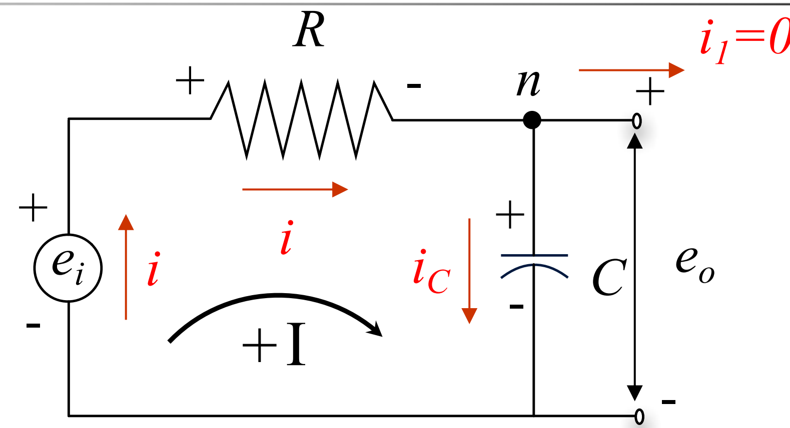


Importante: Na Lei dos nós, por nó entende-se um ponto divisor de corrente elétrica e na Lei das Malhas, por malha entende-se um caminho fechado.

Cont. ...



1 – Sentido das correntes



1 – Percurso das Malhas

Para o nó n: $$\sum_n i_{chegam} = \sum_n i_{saem} \Rightarrow i = i_C + \cancelto{0}{i_1} \Rightarrow i = i_C$$

Para a malha I:

$$+\sum e_I = 0 \Rightarrow -e_i + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\ dt = 0$$

Nos terminais do Capacitor: $e_o = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i\ dt$

Cont. ...

Agora, aplicando a T.L. às três relações temos

$$i = i_C \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s) = I_C(s)$$

$$-e_i + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\ dt = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} -E_i(s) + RI(s) + \frac{1}{C}I(s) = 0$$

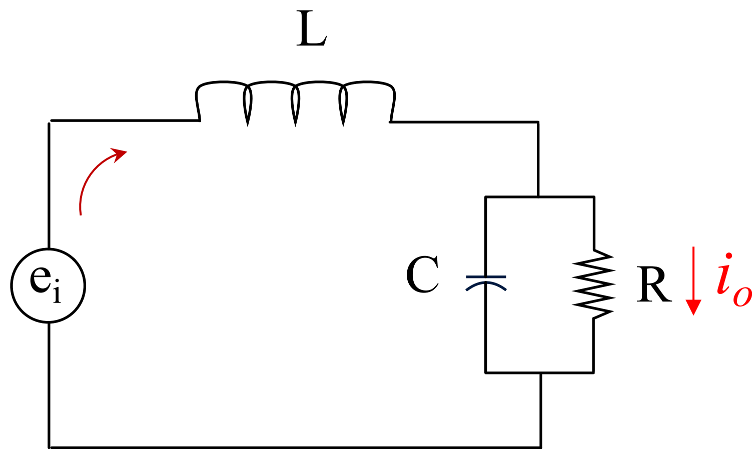
$$e_o = \frac{1}{C}\int_0^t i\ dt \xrightarrow{\mathcal{L}} E_o(s) = \frac{1}{C}\ I(s)$$

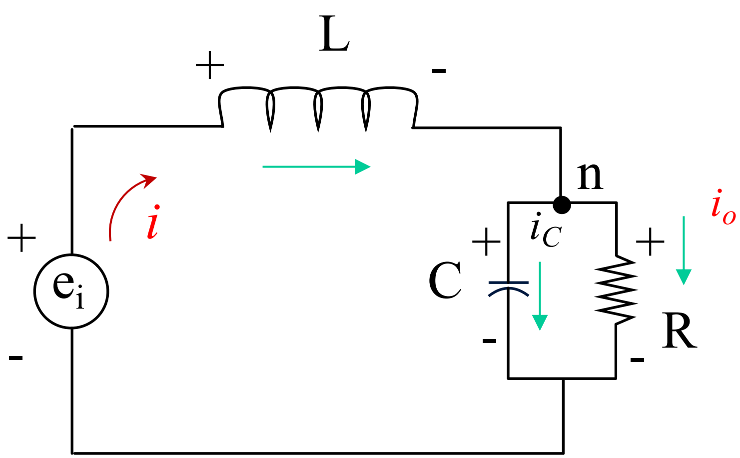
Combinando estas expressões na variável s temos:

$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}}$$

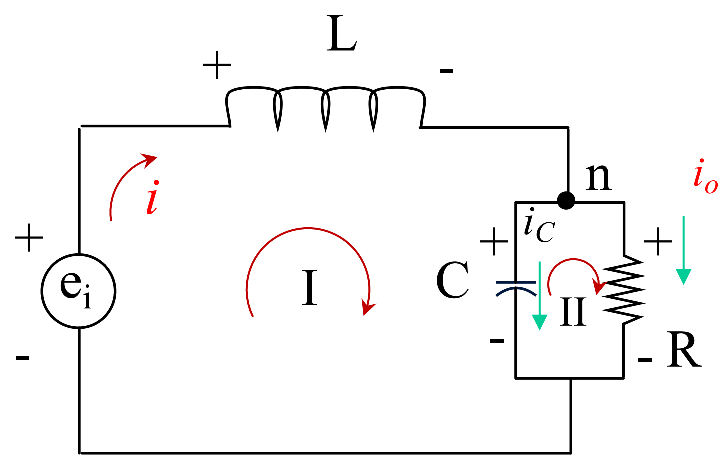
Exemplo 2

Agora consideremos o circuito abaixo. Determine a F.T. $I_o(s)/E_i(s)$





Sentido Correntes



Sentido Percurso Malhas

Cont. ...

Nó n: $\sum_n i_{chegam} = \sum_n i_{saem} \Rightarrow \quad i = i_C + i_o$

Malhas:

$$\left\{ \begin{array}{l} +\sum_I e_I = 0 \Rightarrow -e_i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_C \, dt = 0 \\ +\sum_I e_{II} = 0 \Rightarrow Ri_o - \frac{1}{C}\int_0^t i_C \, dt = 0 \end{array} \right.$$

Aplicando Laplace temos:

$$I(s) = I_C(s) + I_o(s)$$

$$-E_i(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs}I_c(s) = 0$$

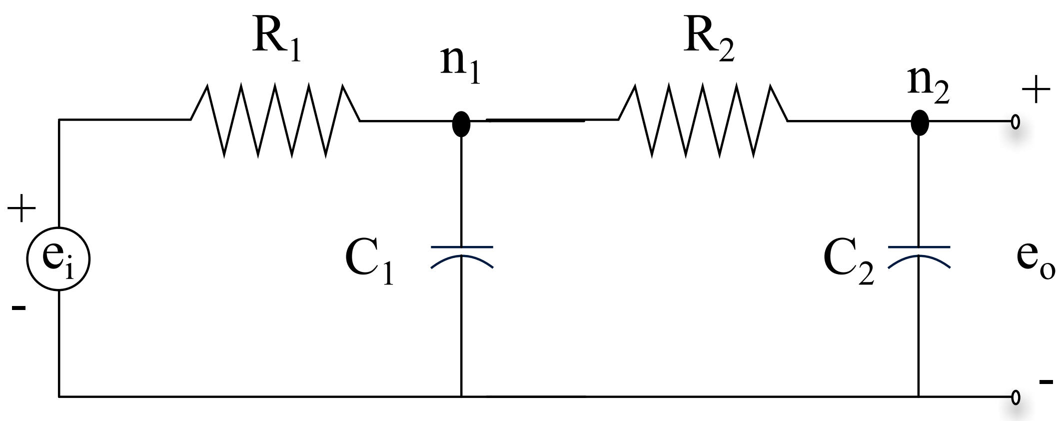
$$RI_o(s) - \frac{1}{Cs}I_C(s) = 0$$

Combinando as equações temos:

$$\boxed{\frac{I_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{LC}{R}s^2 + \frac{L}{R}s + 1}}$$

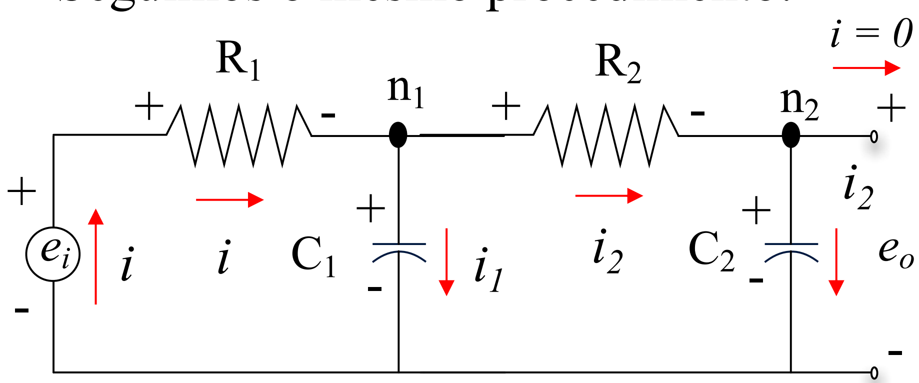
Exemplo 3

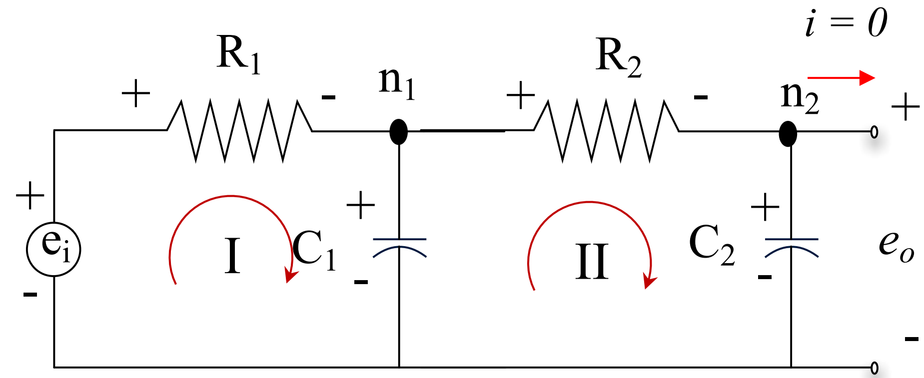
Consideremos agora o circuito abaixo. Determine a F.T. $E_o(s)/E_i(s)$



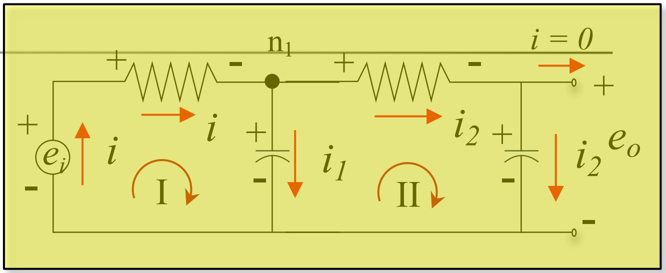
Hipóteses:
- Elementos Puros e Ideais
- Sem fuga de corrente em n_2

Seguimos o mesmo procedimento:





Cont. ...



Escrevemos as equações para os nós e malhas:

Nó n_1: $$\sum_{n_1} i_{chegam} = \sum_{n_1} i_{saem} \quad \Rightarrow \quad i = i_1 + i_2$$

Malhas:

$$+\sum_{I} e_I = 0 \quad \Rightarrow \quad -e_i + R_1 i + \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1 \; dt = 0$$

$$+\sum_{I} e_{II} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2 \; dt - \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1 \; dt = 0$$

E também devemos considerar para o capacitor C_2:

$$e_o = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2 \; dt$$

Cont. ...

Aplicando Laplace nas 4 equações temos:

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

$$-e_i + R_1 i + \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1 \; dt = 0 \quad \Rightarrow \quad -E_i(s) + R_1 I(s) + \frac{1}{C_1 s} I_1(s) = 0$$

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2 \; dt - \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1 \; dt = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) - \frac{1}{C_1 s} I_1(s) = 0$$

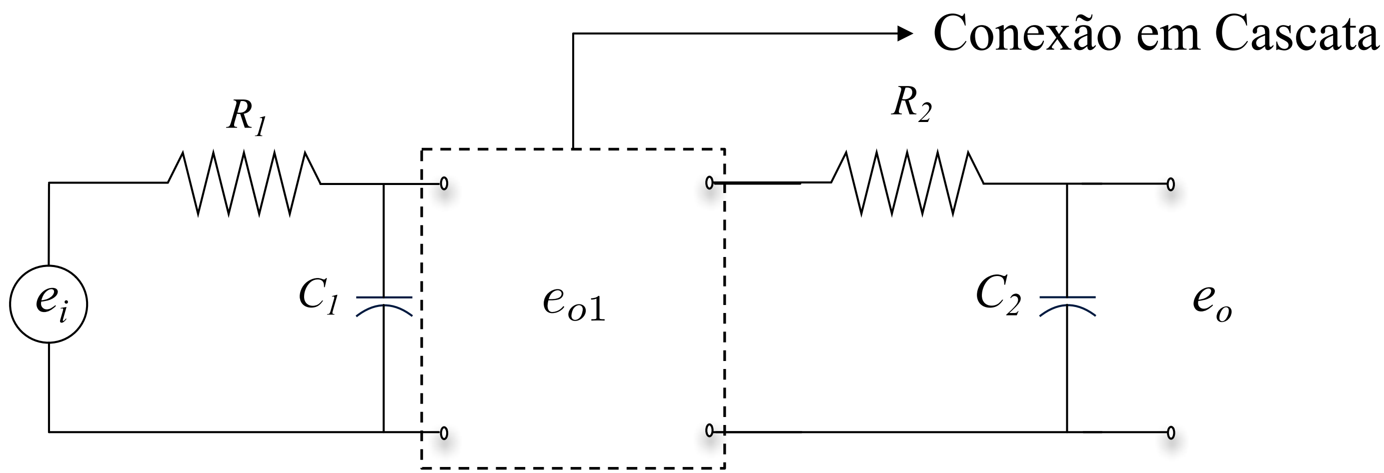
$$e_o = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2 \; dt \quad \Rightarrow \quad E_o(s) = \frac{1}{C_2}\frac{I_2(s)}{s}$$

Cont. ...

De onde obtemos a F.T. desejada:

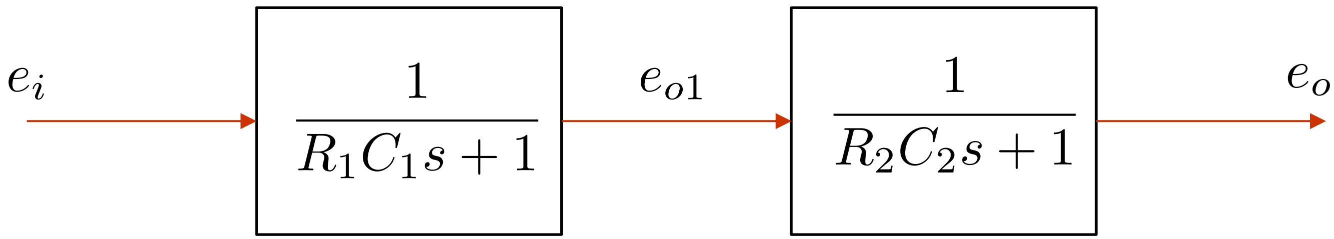
$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)\,s + 1}}$$

Consideremos agora:



Cont. ...

Com as F.T. individuais de cada um dos circuitos R-C temos:



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2)s + 1}$$

enquanto que a F.T. original do sistema acoplado é:

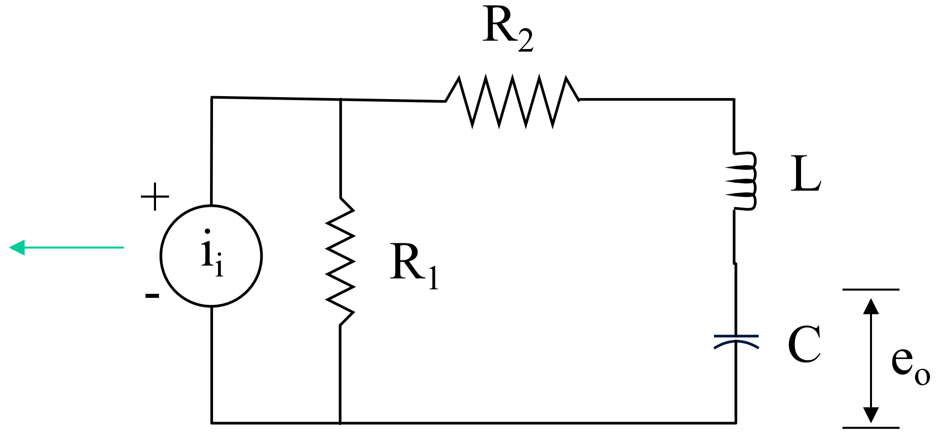
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + (R_1C_1 + \boxed{R_1C_2} + R_2C_2)\,s + 1}$$

efeito de carga !

Adicional

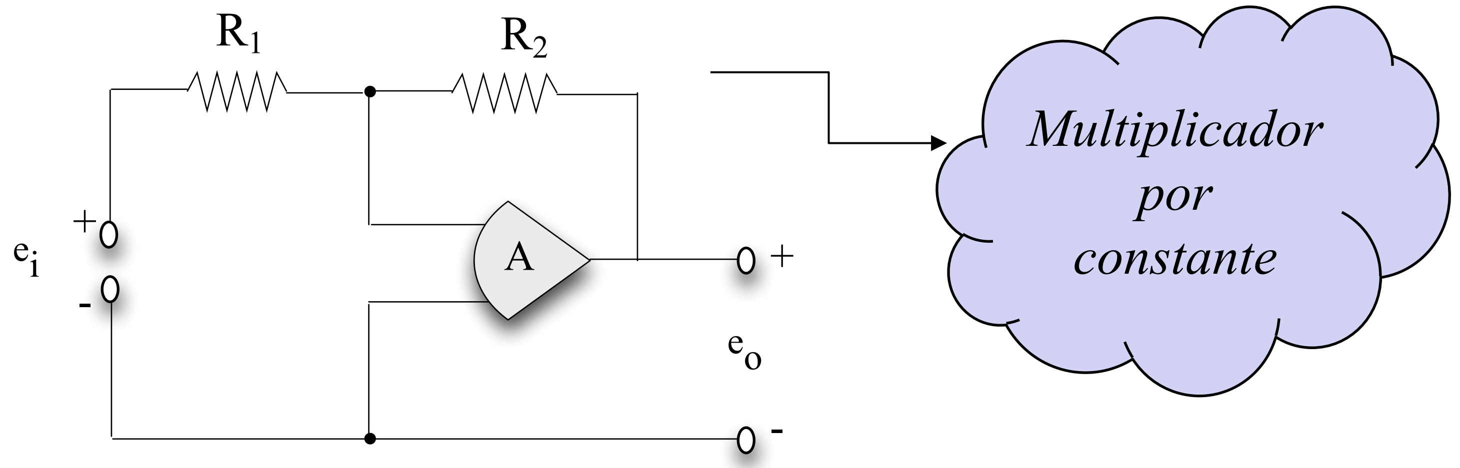
Para o modelo abaixo obtenha a F.T. $E_o(s)/I_i(s)$. E.H.S.

fonte de
corrente



Exemplo 3

Para o modelo abaixo obtenha a F.T. $E_o(s)/E_i(s)$. E.H.S.



Sabemos que:

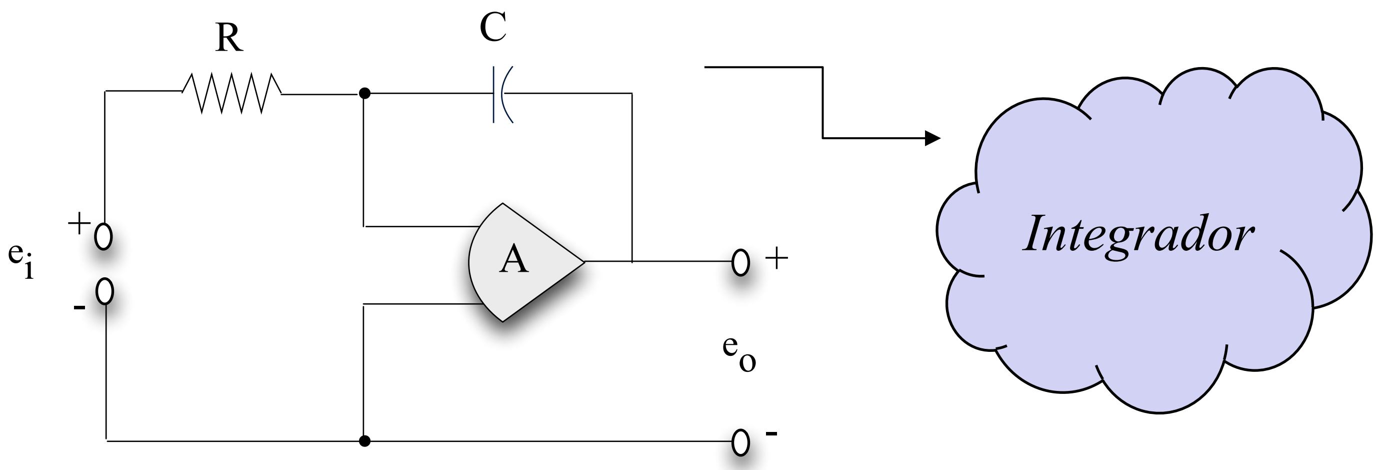
$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_{fb}(s)}{Z_i(s)}} \Rightarrow \quad Z_i(s) = R_1 \qquad Z_{fb}(s) = R_2$$

Ou seja:

$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}} \Rightarrow \boxed{E_o(s) = \left(-\frac{R_2}{R_1}\right) E_i(s)}$$

Exemplo 4

Para o modelo abaixo obtenha a F.T. $E_o(s)/E_i(s)$. E.H.S.



Sabemos que:

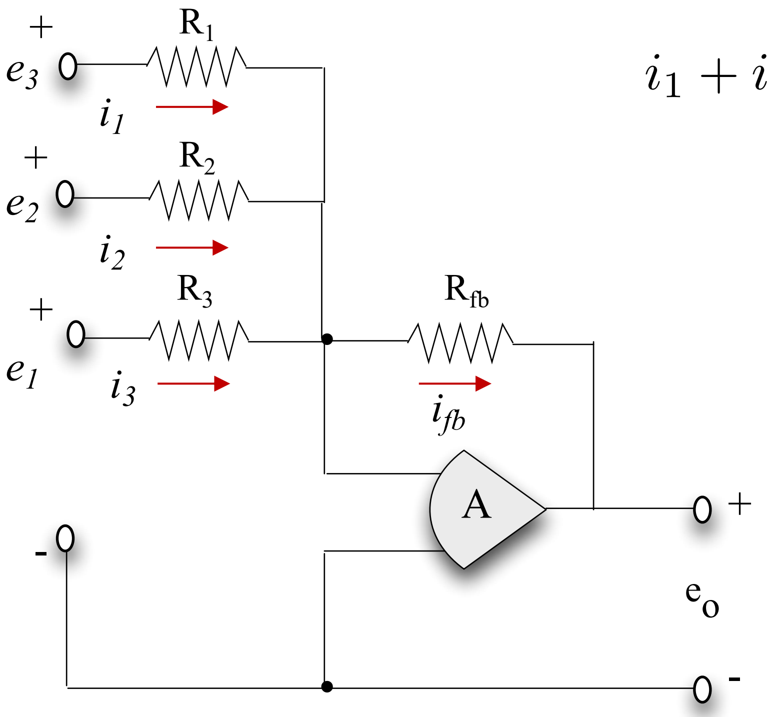
$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_{fb}(s)}{Z_i(s)}} \Rightarrow \quad Z_i(s) = R \qquad Z_{fb}(s) = \frac{1}{Cs}$$

Ou seja:

$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(-\frac{1}{RC}\right)\frac{1}{s}} \Rightarrow \boxed{E_o(s) = \left(-\frac{1}{RC}\right)\frac{E_i(s)}{s}}$$

Exemplo 4

Para o modelo abaixo obtenha a F.T. $E_o(s)/E_i(s)$. E.H.S.



$$i_1 + i_2 + i_3 = i_{fb} \quad \Rightarrow \quad \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} = -\frac{e_o}{R_{fb}}$$

$$e_o = -\left(\frac{R_{fb}}{R_1}e_1 + \frac{R_{fb}}{R_2}e_2 + \frac{R_{fb}}{R_3}e_3\right)$$

se tivermos

$$R_{fb} = R_1 = R_2 = R_3$$

então

Somador

$$\boxed{e_o = -(e_1 + e_2 + e_3)}$$

FIM

Bom Estudo !