UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Mecânicos
Exemplos Adicionais

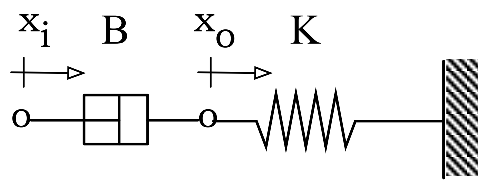
Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

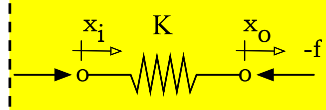
Objetivos

O objetivo desta video-aula é discutir diferentes formas para o equacionamento de sistemas mecânicos

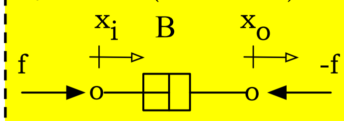
Exemplo 1

Vamos trabalhar o seguinte exemplo para a F.T. $X_o(s)/X_i(s)$





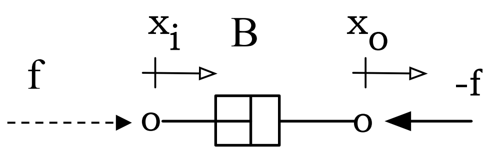
$$f = K(x_i - x_o)$$



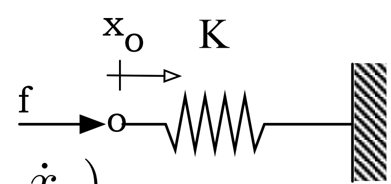
$$f = B(\dot{x}_i - \dot{x}_o)$$

Discutiremos o equacionamento do modelo através de quatro maneiras diferentes

1-) Equilíbrio de forças no ponto e contato entre o amortecedor e a mola (conforme discutido em aula !)



$$-Kx_o$$



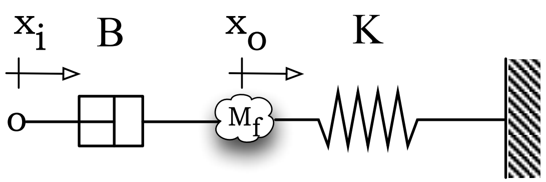
$$B(\dot{x}_i - \dot{x}_o)$$

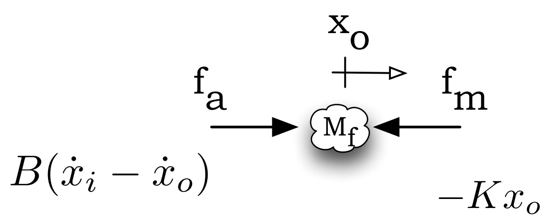
Equilíbrio de forças no ponto de contato: $B(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = Kx_o$

$$\boxed{B(\dot{x}_i - \dot{x}_o) - Kx_o = 0}$$

Cont. ...

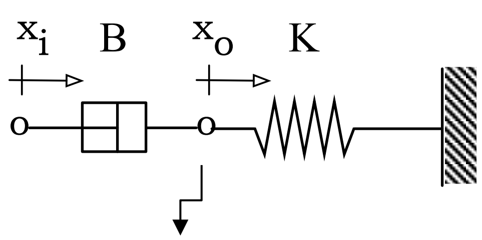
2-) Utilização da massa fictícia no ponto de união entre o amortecedor e a mola





$$\sum \vec{f} = M_f \ddot{\vec{x}}_o \quad \Rightarrow \quad B(\dot{x}_i - \dot{x}_o) - Kx_o = \cancelto{0}{M_f}\ddot{x}_o \qquad \boxed{B(\dot{x}_i - \dot{x}_o) - Kx_o = 0}$$

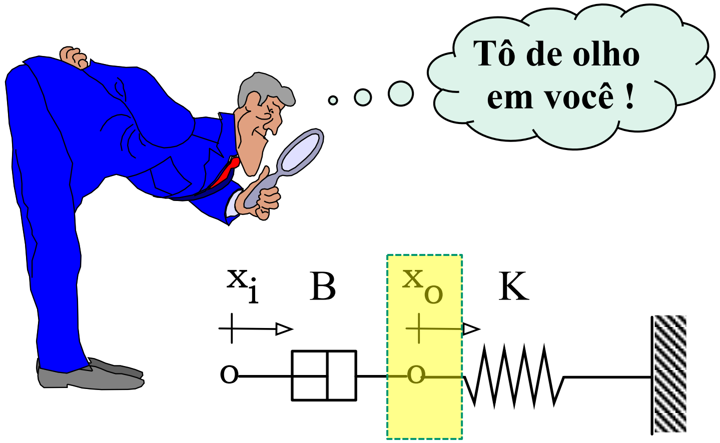
3-) "*Método das Perturbações Virtuais*" (Desenvolvido pelo Prof. Luiz Augusto !)



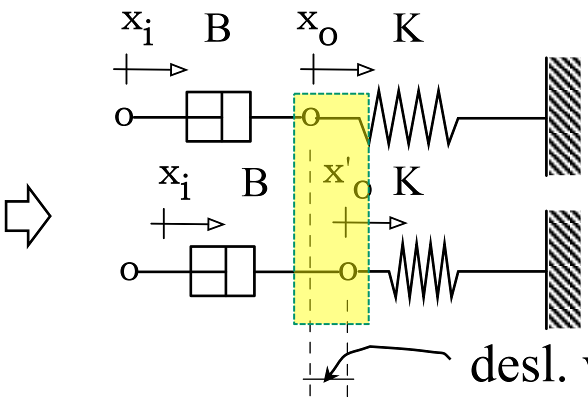
Esse método considera UM PONTO do modelo por vez ! (muito importante)

Cont. ...

3.1-) Vamos dizer que queremos escrever as equações pasra o ponto *o*. Então, novamente devemos focar nossa atenção neste ponto ! Portanto cumprimos o primeiro passo ! (escolher um ponto para análise !)

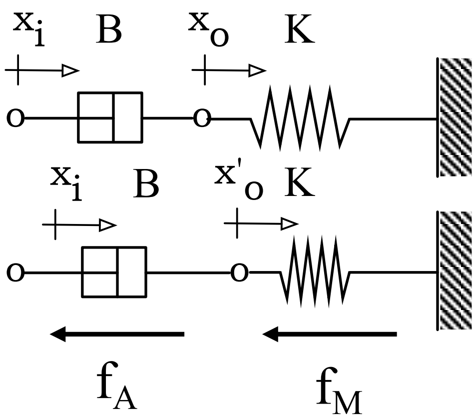


3.2-) Agora, proponha uma perturbação virtual (*de pequena magnitude e com o tempo congelado*) no deslocamento deste ponto na direção e sentido indicados no modelo!



Cont. ...

3.3-) Agora verifique se há qualquer reação contrária a este movimento virtual adicional.



3.4-) Havendo *resistência* ao movimento virtual, as correspondentes forças dos elementos que se opõe ao movimento virtual serão *negativas* e serão escritas como

$$f_A = -B(\dot{x}_o - \dot{x}_i) \qquad f_M = -K(x_o - 0)$$

3.5-) Agora somamos forças no ponto (ou se for uma massa aplica-se a Lei de Newton)

$$\boxed{-B(\dot{x}_o - \dot{x}_i) - Kx_o = 0} \qquad \boxed{B(\dot{x}_i - \dot{x}_o) - Kx_o = 0}$$

1º método

Cont. ...

4-) Método Matricial

Este método consiste em “montarmos” matrizes para o sistema tal que as equações de movimento sejam reduzidas à seguinte forma matricial

$$[M]\{\ddot{u}\} + [B]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\}$$

onde:

- [M] é a matriz de massa. Para modelos de parâmetros concentrados, esta matriz é geralmente diagonal.

- [B] é a matriz de amortecimento, formada pela combinação das constantes de amortecimento que compõe o modelo

- [K] é a matriz de rigidez, formada pela combinação das constantes elásticas que compõe o modelo.

Cont. ...

- {f} é o vetor das entradas aplicadas ao modelo, podendo ser forças ou movimentos.

- {u} e suas derivadas é o vetor contendo as saídas do modelo.

Segue abaixo uma regra para a composição das matrizes [M], [B] e [K]

$$M_{ij} = \sum_i M_{ij} \quad i = j$$
$$M_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$B_{ij} = \sum_i B_{ij} \quad i = j$$
$$B_{ij} = -\sum_{i,j} B_{ij} \quad i \neq j$$

$$k_{ij} = \sum_i K_{ij} \quad i = j$$
$$k_{ij} = -\sum_{i,j} K_{ij} \quad i \neq j$$

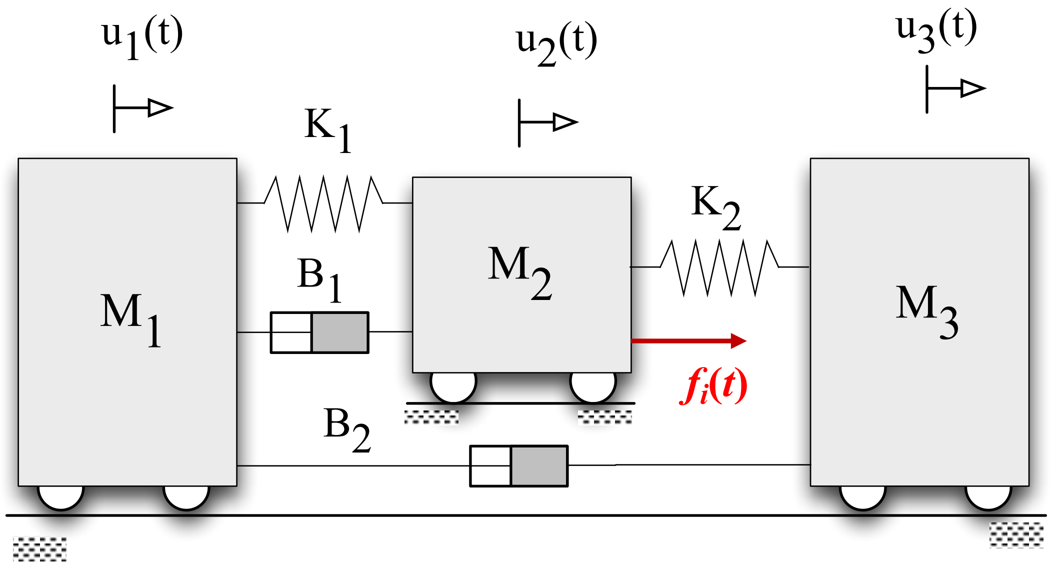
No presente caso, como temos apenas uma váriável de saída (x_o), as matrizes resultam de ordem 1x1 e a equação do modelo é a mesma ou seja

$$\boxed{B\dot{x}_o + Kx_o = B\dot{x}_i}$$

Vejamos um exemplo adicional

Exemplo 2

Vamos escrever as equações diferenciais para este modelo



1-) Vamos iniciar a solução usando a formulação matricial. Neste caso expressamos as equações do sistema na forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [B]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\}$$

Onde:

Cont. ...

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \{\dot{u}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} \qquad \{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} \qquad \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_i \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para a matriz de massa usamos:

$$M_{ij} = \sum_i M_{ij} \quad i = j$$
$$M_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

Resultando:

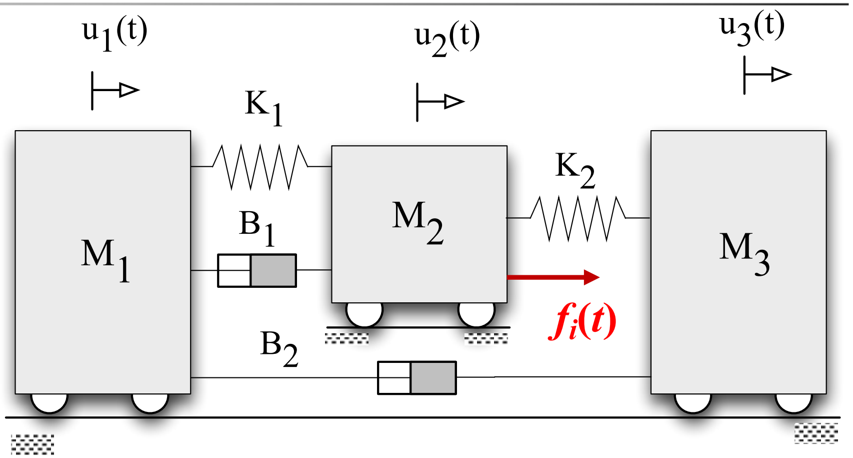
$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}$$

Para a matriz de amortecimento usamos:

$$B_{ij} = \sum_i B_{ij} \quad i = j$$
$$B_{ij} = -\sum_{i,j} B_{ij} \quad i \neq j$$

Cont. ...

Resultando:



$$[B] = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_1 & -B_2 \\ -B_1 & B_1 & 0 \\ -B_2 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

Para a matriz de rigidez usamos:

$$k_{ij} = \sum_i K_{ij} \quad i = j$$

$$k_{ij} = -\sum_{i,j} K_{ij} \quad i \neq j$$

Resultando: $$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

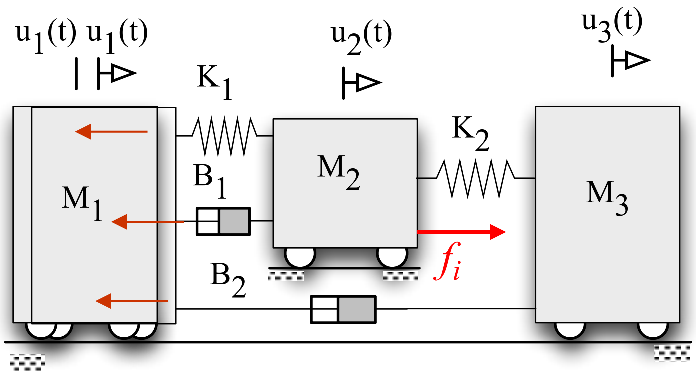
Cont. ...

E, então, escrevemos as equações do modelo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_1 & -B_2 \\ -B_1 & B_1 & 0 \\ -B_2 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_i \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cont. ...

2-) Método das perturbações virtuais



2.1 – Iniciamos analisando o movimento do ponto de coordenada u_1 (massa M_1)

2.2 – Proponha um deslocamento adicional virtual a u_1 e zero nos demais. Há resistência a este deslocamento ? Resposta: SIM, da mola K_1 e dos amortecedores B_1 e B_2. Logo estas forças na massa M_1 serão negativas.

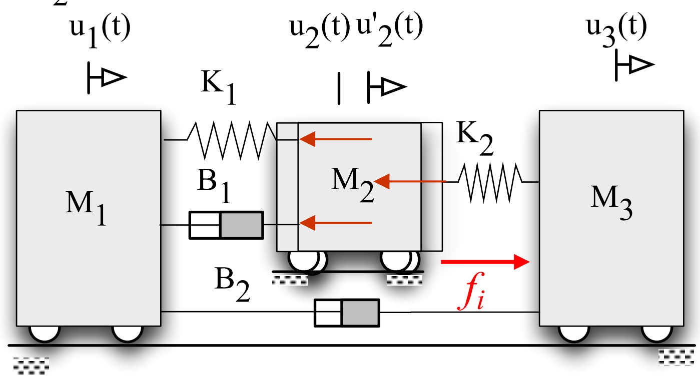
2.3 – Escrevemos a equação do equilíbrio de forças em M_1 respeitando 2.2:

$$-K_1(u_1 - u_2) - B_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - B_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_3) = M_1\ddot{u}_1$$

Pois houve resistência ao deslocamento virtual aplicado a M_1

Cont. ...

2.4 – Agora repetimos o procedimento para o deslocamento u_2



2.5- E notamos que as moas K_1 e K_2 bem como o amoertecedor B1 oferecem resistência, originando portanto forças negativas na massa M_2

2.6- Agora escrevemos o balanço de forças para M_2 (não se esquecendo que f_i está aplicada a ela !)

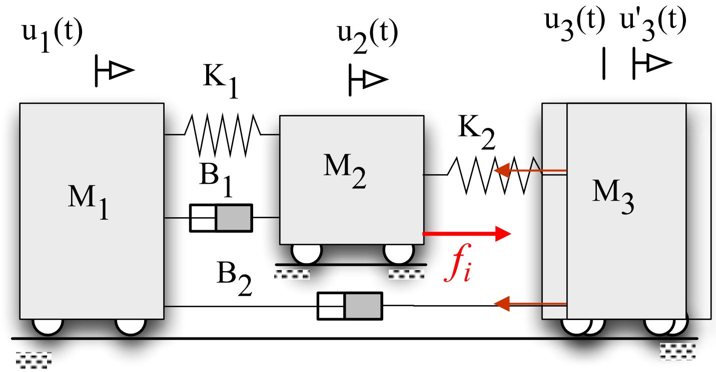
$$-K_1(u_2 - u_1) - B_1(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - K_2(u_2 - u_3) + f_i = M_2\ddot{u}_2$$

Pois houve resistência ao deslocamento virtual aplicado a M_2

Cont. ...

2.7 – Finalmente aplicamos o procedimento para o deslocamento u_3

2.8 – Observamos que a mola K_2 e o amortecedor B_2 oferecem resistência, e suas respectivas forças na massa M_3 serão negativas, portanto.



2.9 – Escrevemos a equação de equilíbrio para M_3

$$-K_2(u_3 - u_2) - B_2(\dot{u}_3 - \dot{u}_1) = M_3\ddot{u}_3$$

Reescrevemos as equações de forma mais organizada como:

$$M_1\ddot{u}_1 + (B_1 + B_2)\dot{u}_1 + K_1u_1 - B_1\dot{u}_2 - K_1u_2 - B_2\dot{u}_3 = 0$$

$$M_2\ddot{u}_2 + B_1\dot{u}_2 + (K_1 + K_2)u_2 - B_1\dot{u}_1 - K_1u_1 - K_2\dot{u}_3 = f_i$$

$$M_3\ddot{u}_2 + B_2\dot{u}_3 + K_2u_3 - B_2\dot{u}_1 - K_2u_2 = 0$$

ou:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_1 & -B_2 \\ -B_1 & B_1 & 0 \\ -B_2 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_i \\ 0 \end{Bmatrix}$$

FIM

Bom Estudo !