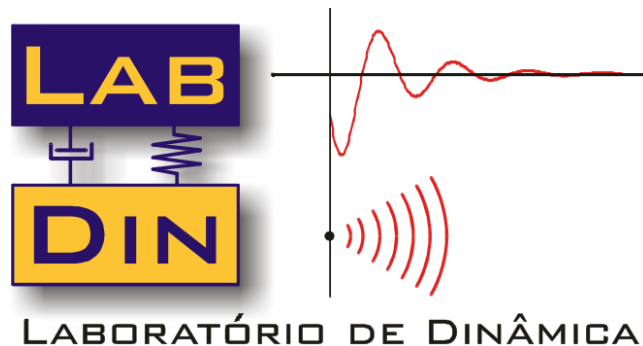


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

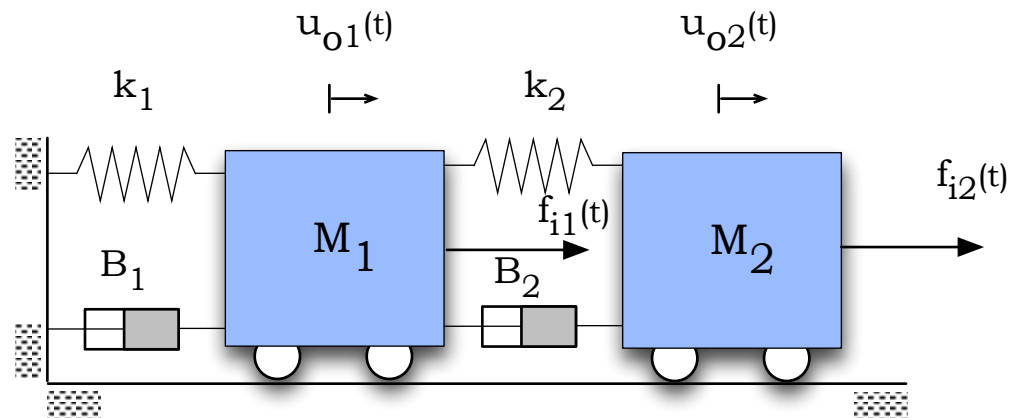


SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Mecânicos
Exemplos

Exemplo # 1

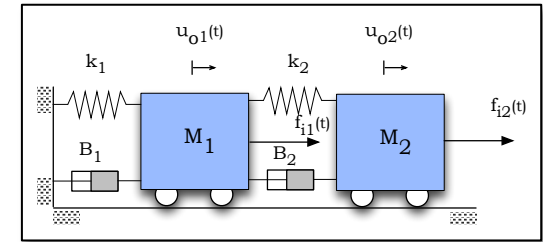
Considere o modelo físico abaixo:



Obtenha as F.T. relacionando as saídas $u_{o1}(t)$ e $u_{o2}(t)$ com as entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$. Todos os elementos são puros e ideais.

Hipóteses Simplificadoras

Como já partimos de um modelo físico, as hipóteses simplificadoras resumem-se em:

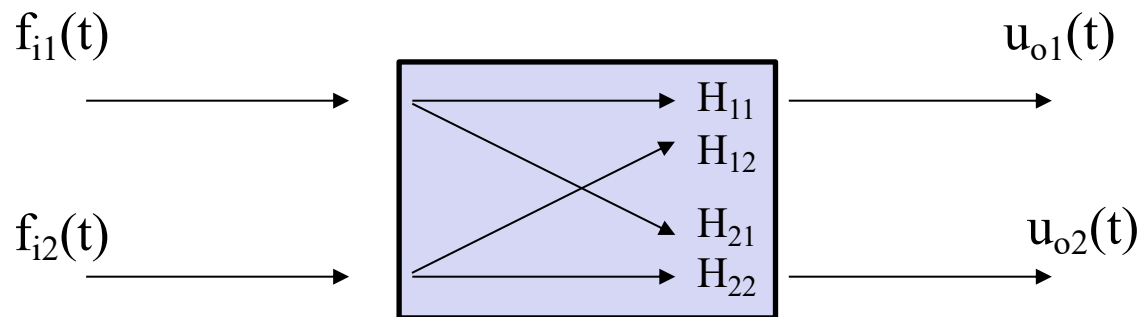


- Todos os elementos são puros e ideais
- Não existe atrito entre as massas e a superfície horizontal. Ou de forma equivalente, considera-se que todos os fenômenos dissipativos estejam concentrados nos elementos amortecedores de constantes B_1 e B_2 .
- As entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$ são conhecidas e independentes do sistema.

Em seguida, faremos algumas considerações adicionais importantes sobre as relações entrada/saída para o nosso modelo !

Relações Entrada/Saída (Quais F.T. queremos ?)

Iniciamos a solução reconhecendo que trata-se de um sistema com 02 entradas e 02 saídas e, de acordo com a visão sistêmica discutida em sala de aula temos



Como ilustrado acima, notamos que existem 04 combinações possíveis entre as entradas e saídas do sistema. Vale aqui lembrarmos o conceito de F.T. discutido nas aulas presenciais

F. T.: Razão entre as transformadas de Laplace de uma dada variável de saída e de uma dada entrada, considerando-se nulas todas as condições iniciais do problema bem como as demais entradas.

Equações de Movimento

Como já partimos do modelo físico e considerando elementos puros e ideais, as hipóteses simplificadoras já estão definidas, restando apenas considerar que as entradas são conhecidas e independentes do sistema. Então, as equações de movimento no domínio do tempo são obtidas a partir da aplicação da segunda lei do movimento de Newton às massas M_1 e M_2 , ou seja:

M_1

$$M_1 \ddot{u}_{o1} + (B_1 + B_2) \dot{u}_{o1} + (K_1 + K_2) u_{o1} - B_2 \dot{u}_{o2} - K_2 u_{o2} = f_{i1}$$

$$\sum_{r=1}^N \vec{f}_r = M_r \ddot{u}_r$$

$$M_2 \ddot{u}_{o2} + B_2 \dot{u}_{o2} + K_2 u_{o2} - B_2 \dot{u}_{o1} - K_2 u_{o1} = f_{i2}$$

M_2

As equações de movimento acima podem ser escritas na forma matricial:

Cont. ...

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{o1} \\ \ddot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_2 \\ -B_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{o1} \\ \dot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{Bmatrix}$$

Algumas observações importantes sobre as EDOs do sistema:

- *São lineares e não homogêneas*
- *Parâmetros constantes (M_r , B_r , K_r)*
- *São acopladas no domínio do tempo*
- *As matrizes dos coeficientes são simétricas*

O próximo passo é transformar as EDOs do sistema para o domínio de Laplace.
Para isto definimos:

$$F_{i1}(s) = \mathcal{L}(f_{i1}(t))$$

$$U_{o1}(s) = \mathcal{L}(u_{o1}(t))$$

$$F_{i2}(s) = \mathcal{L}(f_{i2}(t))$$

$$U_{o2}(s) = \mathcal{L}(u_{o2}(t))$$

Cont. ...

E, ainda, considerando-se nulas as condições iniciais para todas as variáveis obtemos as seguintes equações algébricas no domínio de Laplace

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + K_1 + K_2 & -(B_2 s + K_2) \\ -(B_2 s + K_2) & M_2 s^2 + B_2 s + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$

ou de forma compacta

$$[A(s)]\{U_o(s)\} = \{F_i(s)\}$$

A solução do sistema de equações acima fornece as respectivas expressões para as variáveis de saída do sistema. Usaremos a *regra de Kramer*.

Cont. ...

Solução para $U_{o1}(s)$ e $U_{o2}(s)$:

$$U_{o1}(s) = \frac{\Delta_{o1}(s)}{\Delta(s)} \quad U_{o2}(s) = \frac{\Delta_{o2}(s)}{\Delta(s)}$$

onde:

$$\Delta_{o1}(s) = \begin{vmatrix} F_{i1}(s) & -(B_2s + K_2) \\ F_{i2}(s) & M_2s^2 + B_2s + K_2(s) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{o2}(s) = \begin{vmatrix} M_1s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2) & F_{i1}(s) \\ -(B_2s + K_2) & F_{i2}(s) \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} M_1s^2 + (B_1 + B_2)s + K_1 + K_2 & -(B_2s + K_2) \\ -(B_2s + K_2) & M_2s^2 + B_2s + K_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = M_1M_2s^4 + (M_1B_2 + M_2(B_1 + B_2))s^3 + (M_1K_2 + B_1B_2 + M_2(K_1 + K_2))s^2 + (B_1K_2 + B_2K_1)s + K_1K_2$$

Polinômio Característico do Modelo

Cont. ...

Logo temos para as soluções

$$U_{o1}(s) = \frac{F_{i1}(s)(M_2s^2 + B_2s + K_2)}{\Delta(s)} + \frac{F_{i2}(s)(B_2s + K_2)}{\Delta(s)}$$

$$U_{o2}(s) = \frac{F_{i1}(s)(B_2s + K_2)}{\Delta(s)} + \frac{F_{i2}(s)(M_1M_2s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2))}{\Delta(s)}$$

e, que podem ser reescritas como:

$$U_{o1}(s) = H_{11}(s)F_{i1}(s) + H_{12}F_{i2}(s)$$

$$U_{o2}(s) = H_{21}(s)F_{i1}(s) + H_{22}F_{i2}(s)$$

Cont. ...

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$

Com:

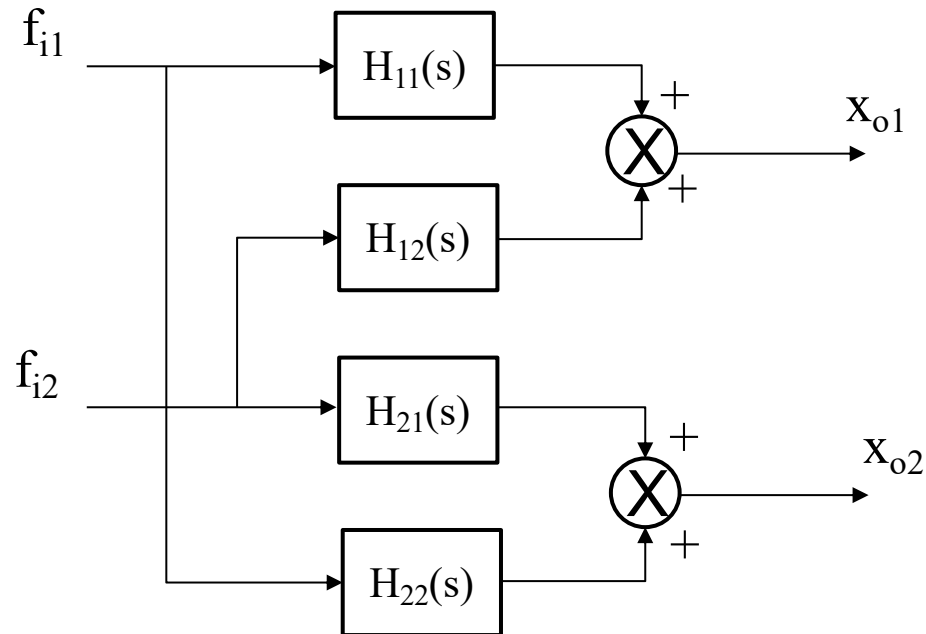
$$H_{11}(s) = \frac{M_2 s^2 + B_2 s + K_2}{\Delta(s)} \quad H_{12}(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\Delta(s)}$$
$$H_{21}(s) = \frac{B_2 s + K_2}{\Delta(s)} \quad H_{22}(s) = \frac{M_1 s^2 + (B_1 + B_2)s + (K_1 + K_2)}{\Delta(s)}$$

Cont. ...

Representação em diagrama de blocos:

$$U_{o1}(s) = H_{11}(s)F_{i1}(s) + H_{12}F_{i2}(s)$$

$$U_{o2}(s) = H_{21}(s)F_{i1}(s) + H_{22}F_{i2}(s)$$



Sumarizando:

Lembrando que a solução para os deslocamentos de M_1 e M_2 veio da solução de

$$[A(s)]\{U_o(s)\} = \{F_i(s)\}$$



$$[A(s)]^{-1}$$



$$\begin{Bmatrix} U_{o1}(s) \\ U_{o2}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{i1}(s) \\ F_{i2}(s) \end{Bmatrix}$$



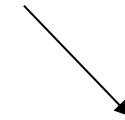
RESPOSTA DO SISTEMA

=



PROPRIEDADES DO SISTEMA

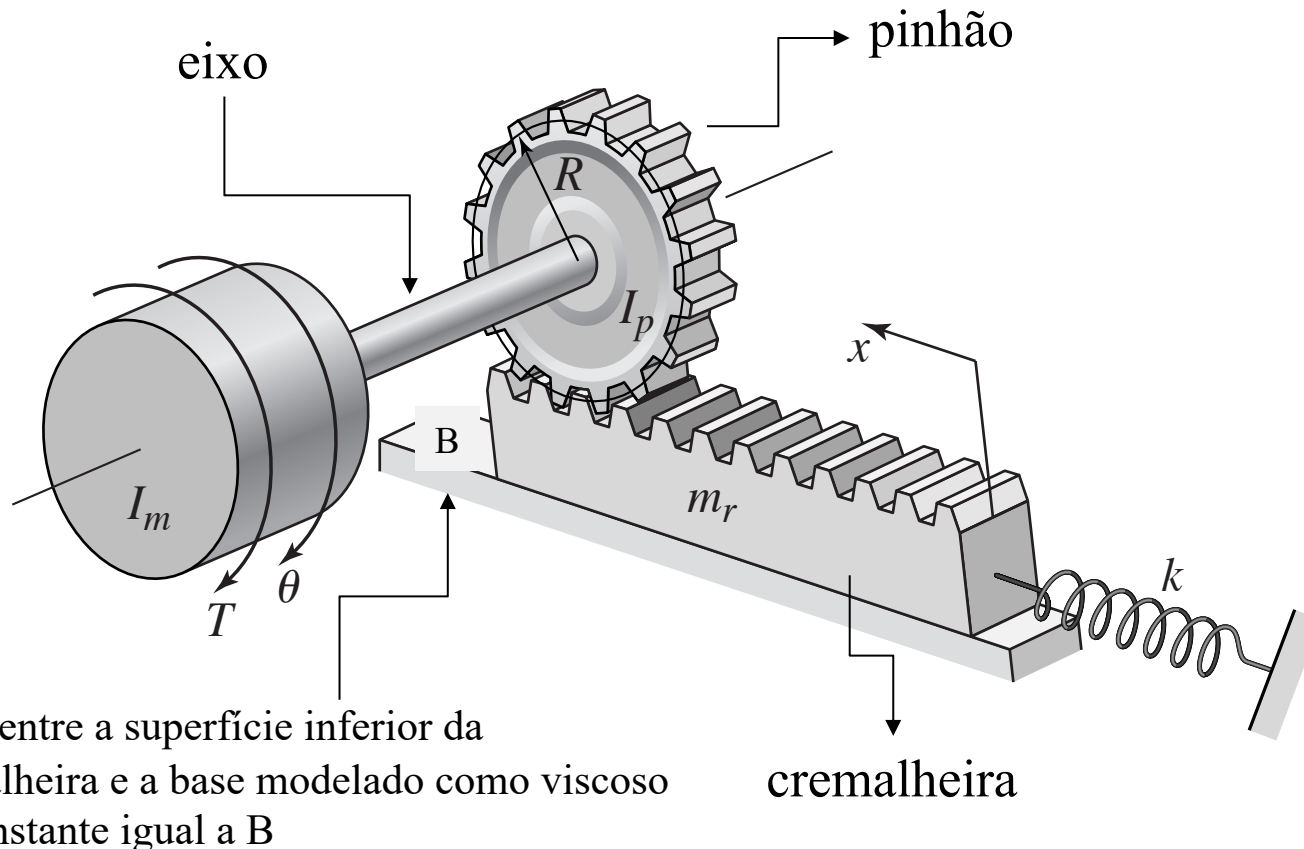
X



ENTRADAS DO SISTEMA

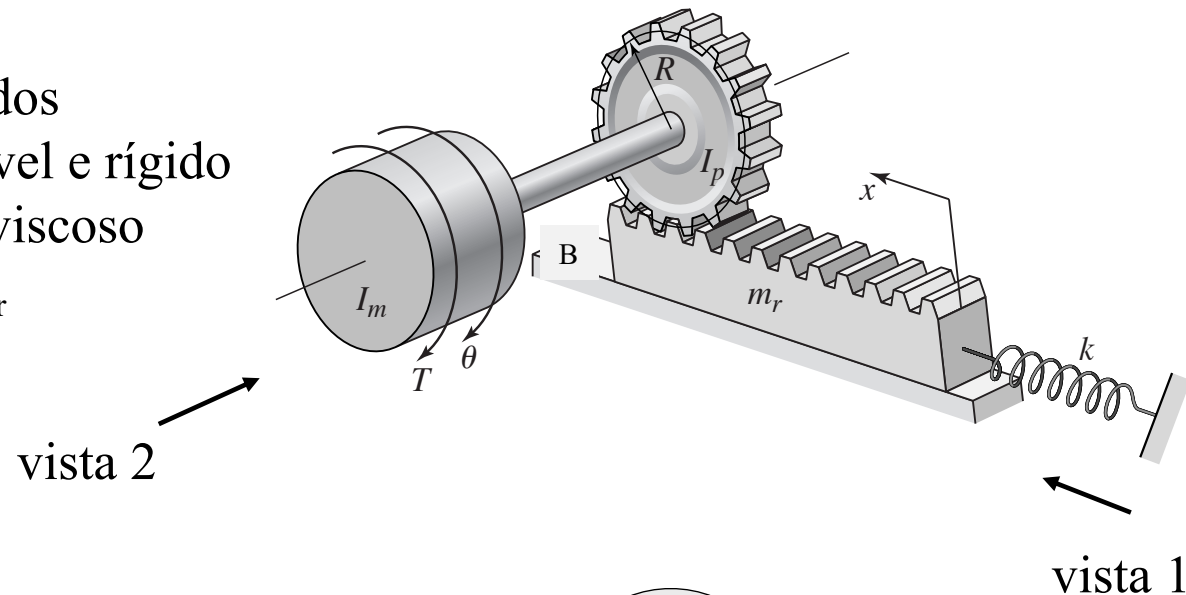
Exemplo # 2

A figura mostra o conhecido mecanismo pinhão cremalheira e que possui várias aplicações práticas. Uma entrada torque $T(t)$ é aplicada ao cilindro de momento de inércia I_m , e o movimento é então transmitido para o pinhão, causando então o deslocamento linear x da cremalheira. Determine a F.T. $X(s)/T(s)$. E.H.S.

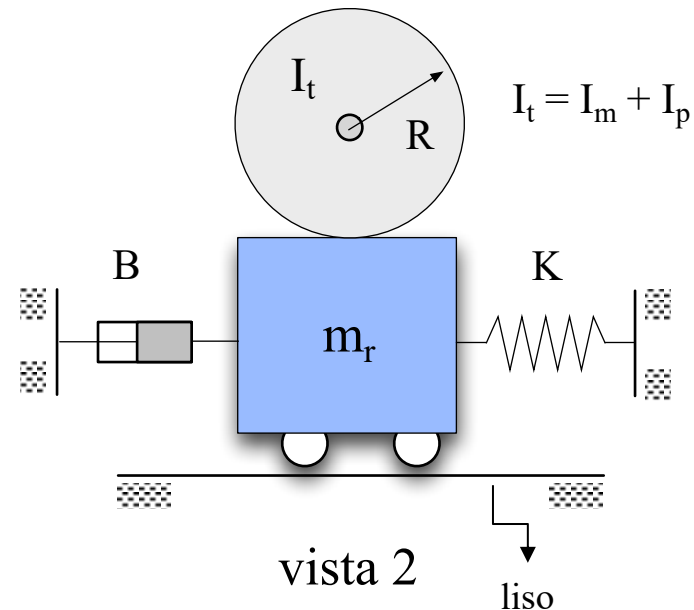
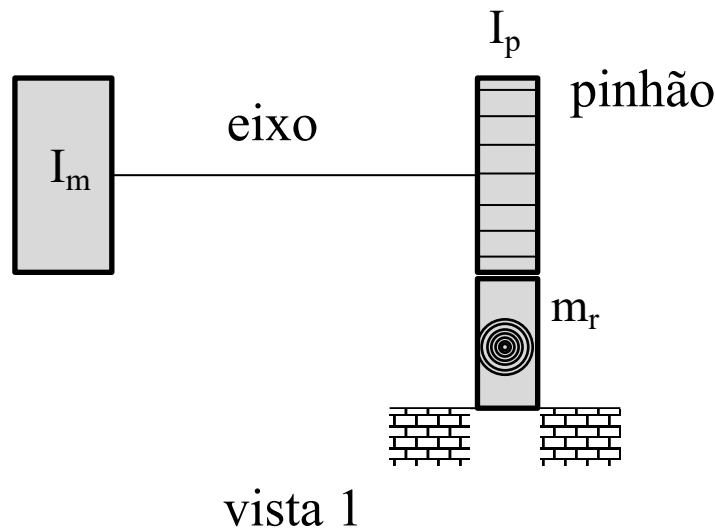


Hipóteses Simplificadoras

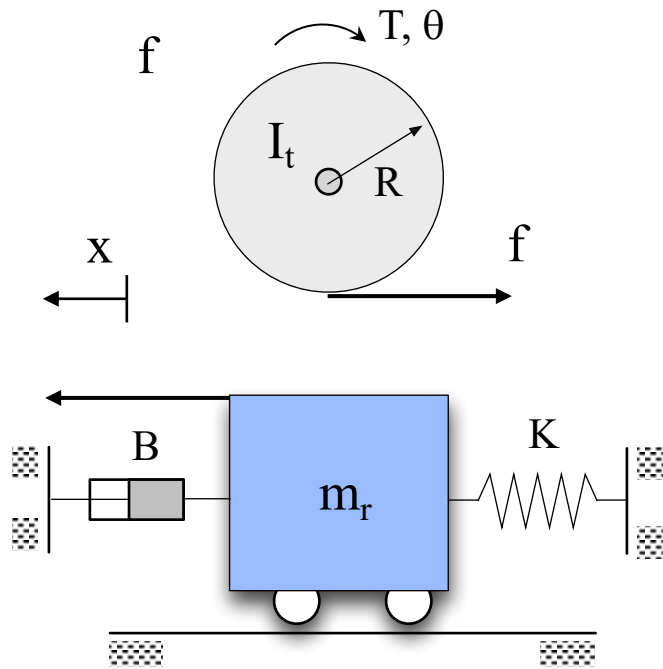
1. Elementos I_m , I_p e m_r rígidos
2. Eixo com massa desprezível e rígido
3. Atrito entre m_r e o plano viscoso
4. Contato ideal entre I_p e m_r
5. Elementos puros e ideais



Modelo físico:



Equações Diferenciais do Modelo



f – força de contato entre o pinhão e a cremalheira

Pela H_4 , contato ideal significa contato de rolamento puro, ou seja, não ocorre escorregamento entre o pinhão e a cremalheira. Neste caso, vale a seguinte relação de compatibilidade cinemática entre o pinhão e a cremalheira:

$$x = R\theta$$

$$\left(+ \sum_{i=1}^N \vec{T} = J\ddot{\theta} \right) \Rightarrow T - fR = I_t\ddot{\theta} \Rightarrow I_t\ddot{\theta} + fR = T$$

$$\left(+ \sum_{i=1}^N \vec{f} = m_r\ddot{x} \right) \Rightarrow f - B\dot{x} - Kx = m_r\ddot{x} \Rightarrow m_r\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f$$

Determinação da F.T.

Aplicando a T. L. às três equações temos (CIs = 0)

$$X(s) = R\Theta(s)$$

$$I_t s^2 \Theta(s) + F(s)R = T(s)$$

$$(m_r s^2 + Bs + K) X(s) = F(s)$$

Combinando estas três últimas equações algébricas reduzimos à seguinte expressão

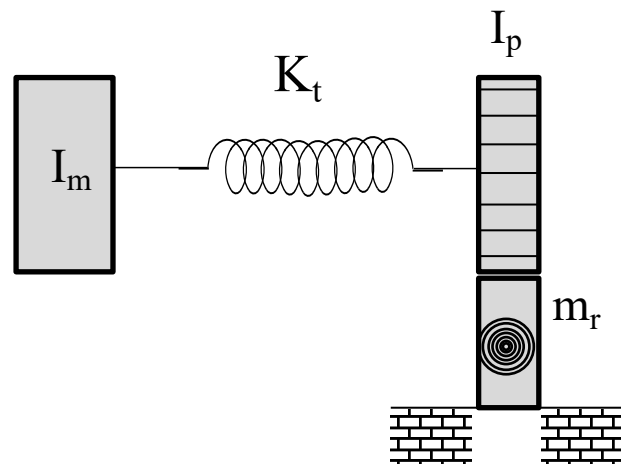
$$\left[\left(m_r + \frac{I_t}{R^2} \right) s^2 + Bs + K \right] X(s) = \frac{1}{R} T(s)$$

Da qual obtemos a F.T. desejada na F.P.

$$\frac{X(s)}{T(s)} = \frac{\frac{1}{KR}}{\frac{1}{K} \left(m_r + \frac{I_t}{R^2} \right) s^2 + \frac{B}{K} s + 1} \quad (\text{Resp.})$$

Considerações adicionais

Adicionalmente, poderíamos aumentar o grau de complexidade do modelo, considerando, por exemplo que o eixo que conecta as duas inércias em rotação não seja rígido, possuindo, por exemplo uma constante elástica torsional igual a K_t :



Exercício: Escrevam as equações do novo modelo físico com eixo flexível e obtenham a mesma F.T. anteriormente solicitada.

FIMM

Bom Estudo !