UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

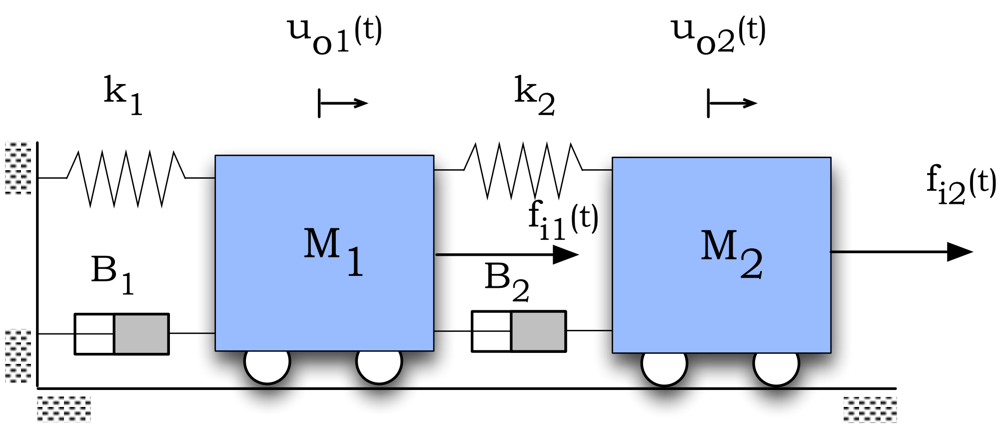
SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Mecânicos
Esclarecimento de Dúvida em Exemplo

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

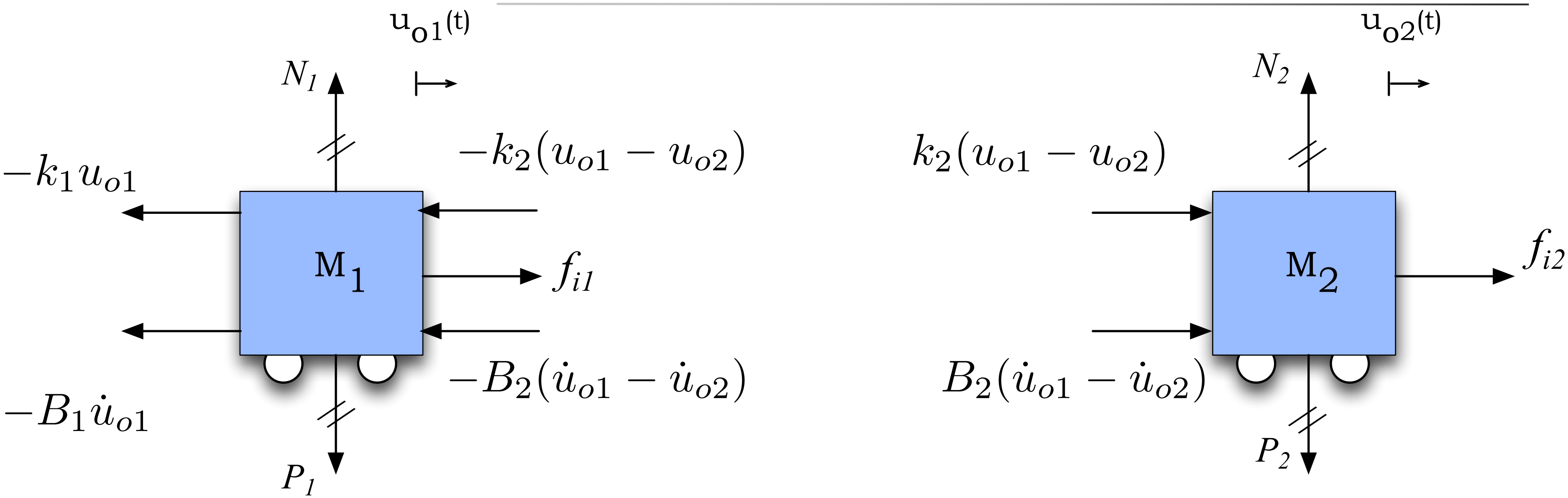
Exemplo # 1

Considere o modelo físico abaixo:



Obtenha as F.T. relacionando as saídas $u_{o1}(t)$ e $u_{o2}(t)$ com as entradas $f_{i1}(t)$ e $f_{i2}(t)$. Todos os elementos são puros e ideais.

Diagrama de Corpo Livre



$$\sum_{r=1}^{N} \vec{f}_r = M_r \ddot{\vec{u}}_r$$

$$f_{i1} - B_1 \dot{u}_{o1} - K_1 u_{o1} - B_2(\dot{u}_{o1} - \dot{u}_{o2}) - K_2(u_{o1} - u_{o2}) = M_1 \ddot{u}_{o1}$$

$$f_{i2} + B_2(\dot{u}_{o1} - \dot{u}_{o2}) + K_2(u_{o1} - u_{o2}) = M_2 \ddot{u}_{o2}$$

Cont. ...

Rearranjando as equações para M1 e M2 temos:

$$f_{i1} - B_1\dot{u}_{o1} - K_1 u_{o1} - B_2(\dot{u}_{o1} - \dot{u}_{o2}) - K_2(u_{o1} - u_{o2}) = M_1\ddot{u}_{o1}$$

$$M_1\ddot{u}_{o1} + B_1\dot{u}_{o1} + K_1 u_{o1} + B_2(\dot{u}_{o1} - \dot{u}_{o2}) + K_2(\dot{u}_{o1} - \dot{u}_{o2}) = f_{i1}$$

$$f_{i2} + B_2(\dot{u}_{o1} - \dot{u}_{o2}) + K_2(u_{o1} - u_{o2}) = M_2\ddot{u}_{o2}$$

$$M_2\ddot{u}_{o2} + B_2\dot{u}_{o2} + K_2\dot{u}_{o2} - B_2\dot{u}_{o1} - K_2 u_{o1} = f_{i2}$$

M_1

$$M_1\ddot{u}_{o1} + (B_1 + B_2)\dot{u}_{o1} + (K_1 + K_2)u_{o1} - B_2\dot{u}_{o2} - K_2 u_{o2} = f_{i1}$$

M_2

$$M_2\ddot{u}_{o2} + B_2\dot{u}_{o2} + K_2 u_{o2} - B_2\dot{u}_{o1} - K_2 u_{o1} = f_{i2}$$

Equações de Movimento

Como já partimos do modelo físico e considerando elementos puros e ideais, as hipóteses simplificadoras já estão definidas, restando apenas considerar que as entradas são conhecidas e independentes do sistema. Então, as equações de movimento no domínio do tempo são obtidas a partir da aplicação da segunda lei do movimento de Newton às massas M_1 e M_2, ou seja:

M_1

$$\sum_{r=1}^{N} \vec{f}_r = M_r \ddot{u}_r \begin{cases} M_1\ddot{u}_{o1} + (B_1 + B_2)\dot{u}_{o1} + (K_1 + K_2)u_{o1} - B_2\dot{u}_{o2} - K_2 u_{o2} = f_{i1} \\ \\ M_2\ddot{u}_{o2} + B_2\dot{u}_{o2} + K_2 u_{o2} - B_2\dot{u}_{o1} - K_2 u_{o1} = f_{i2} \end{cases}$$

M_2

As equações de movimento acima podem ser escritas na forma matricial:

Cont. …

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{o1} \\ \ddot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 + B_2 & -B_2 \\ -B_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_{o1} \\ \dot{u}_{o2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \end{Bmatrix}$$

FIM

Bom Estudo !