

LCÉ0130 - Cálculo Diferencial e Integral
Aula 02 - Exercícios dos slides e folha entregue na aula

Slides

1) PIB

Em 2003 ($x=0$) o PIB = $P_0 = 500$ bilhões

Crescimento ao ano (r) de 0.03

Em 2023 ($x=20$) qual o PIB?

$P = P_0 a^x$ em que $a = 1 + r$, logo,

$$\begin{aligned} P &= P_0 (1+r)^x = 500 (1+0,03)^{20} \\ &= 500 (1,03)^{20} \\ &\approx 903 \text{ bilhões de dólares.} \end{aligned}$$

2) Bactérias

$$N(t) = 2.000 \times 2^{0,5t}$$

$t = ?$ quando $N = 8.192.000$

$$8.192.000 = 2.000 \times 2^{0,5t}$$

$$\frac{8.192.000}{2.000} = 2^{0,5t}$$

$$4.096 = 2^{0,5t}$$

$$\ln(4.096) = \ln(2^{0,5t})$$

$$8,3177 = 0,5t \cdot (0,6931)$$

$$8,3177 = 0,3465 t$$

$$t = \frac{8,3177}{0,3465} = 23,99 \approx 24 \text{ horas}$$

3) Reservatório Água

$$q(t) = q_0 \times 2^{-0,1t} \quad t \text{ meses}$$

q_0 água no início.

Quando $q(t) = \frac{q_0}{2}$?

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= q_0 2^{-0,1t} \\ \frac{q_0}{2} &= q_0 2^{-0,1t} \\ \frac{q_0}{2q_0} &= 2^{-0,1t} \\ \frac{1}{2} &= 2^{-0,1t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \ln(0,5) &= \ln(2^{-0,1t}) \\ -0,6931 &= -0,1t (0,6931) \\ -0,6931 &= -0,06931 \cdot t \\ t &= \frac{-0,6931}{-0,06931} \approx 10 \text{ meses} \end{aligned}$$

4) Material Radioativos

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{em que } T \text{ é o tempo de meia vida } T = 28 \text{ anos}$$

Quando $N(t) = 0,25 N_0$?

$$0,25 N_0 = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{28}}$$

$$\frac{0,25 N_0}{N_0} = \left(\frac{1}{2} \right)^{t/28}$$

$$\begin{aligned} \ln(0,25) &= \ln(0,5)^{t/28} \\ -1,3863 &= \frac{t}{28} (-0,6931) \end{aligned}$$

$$-1,3863 = -0,0247 t$$

$$t = \frac{-1,3863}{-0,0247} \approx 56 \text{ anos}$$

5) Toxidez lago ^{0,1x}

$$T(x) = T_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{0,1x}$$

↓
voltar ao inicial $T(x) = T_0$

↑ contaminação $10 \times T_0$

$$T_0 = 10T_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{0,1x}$$

$$\frac{T_0}{10T_0} = \left(\frac{1}{2} \right)^{0,1x} \Rightarrow \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2} \right)^{0,1x} \Rightarrow \ln(0,1) = 0,1x \ln(0,5)$$

$$-2,3025 = 0,1x(-0,6931)$$

$$-2,3025 = -0,06931x$$

$$x = \frac{-2,3025}{-0,06931} = 33,2 \approx 34 \text{ dias}$$

6) Desmatamento VER AS PROPRIEDADES NO SLIDE 35 DA AULA 2

$d = ?$ quando $P(d) = 0,8$

$$0,8 = \frac{3^{-1,3d+3,5}}{1 + 3^{-1,3d+3,5}}$$

INVERTER A FUNÇÃO $P(d)$
PARA USAR AS PROPRIEDADES

$$\frac{1}{0,8} = \frac{1 + 3^{-1,3d+3,5}}{3^{-1,3d+3,5}} \Rightarrow \frac{1}{0,8} = \frac{1}{3^{-1,3d+3,5}} + \frac{3^{-1,3d+3,5}}{3^{-1,3d+3,5}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{0,8} - 1 = \frac{1}{3^{-1,3d+3,5}} \Rightarrow 0,25 = \frac{1}{3^{-1,3d+3,5}} \Rightarrow \ln(0,25) = \ln\left(\frac{1}{3^{-1,3d+3,5}}\right)$$

$$-1,3863 = \ln(1) - \ln(3^{-1,3d+3,5}) \Rightarrow -1,3863 = -(-1,3d+3,5)(\ln 3)$$

$$-1,3863 = 1,3d \ln(3) - 3,5 \ln(3) \Rightarrow -1,3863 = 1,4282d - 3,8451$$

$$2,4588 = 1,4282d \Rightarrow d = 1,72 \approx 1,7 \text{ km}$$

EXERCÍCIOS

1) Dada a função $f(x) = (-2m + 10)x + m - 4$
Determinar m

a) $f(x)$ seja constante, ou seja, $f(x) = k$

Para $f(x) = k$ todo o coeficiente que acompanha o x tem que ser zero, ou seja,

$$f(x) = \underbrace{(-2m + 10)}_{=0} x + m - 4$$

$$-2m + 10 = 0$$

$$-2m = -10$$

$$m = 5$$

Desta forma, $f(x) = (-2 \cdot 5 + 10)x + 5 - 4$
 $f(x) = 1$ //

b) $f(x)$ seja linear, ou seja, $f(x) = kx$

Para $f(x) = kx$ os termos que não tem x tem que ser zero, ou seja

$$f(x) = (-2m + 10)x + \underbrace{m - 4}_{=0}$$

$$m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

Desta forma, $f(x) = (-2 \cdot 4 + 10)x + 4 - 4$
 $f(x) = 2x$ //

c) $f(x)$ seja uma função afim $\Rightarrow f(x) = ax + b$ com a e $b \neq 0$, ou seja,

$$-2m + 10 \neq 0 \Rightarrow -2m \neq -10 \Rightarrow m \neq 5 //$$

$$m - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4 //$$

d) Para $f(x)$ ser crescente, na função do tipo $f(x) = ax + b$, "a" tem que ser maior do que zero, logo,

$$-2m + 10 > 0 \Rightarrow -2m > -10 \Rightarrow 2m < 10 \Rightarrow \underline{\underline{m < 5}}$$

e) Para $f(x)$ ser decrescente, na função do tipo $f(x) = ax + b$, "a" tem que ser menor do que zero, ou seja,

$$-2m + 10 < 0 \Rightarrow -2m < -10 \Rightarrow 2m > 10 \Rightarrow \underline{\underline{m > 5}}$$

2) Dada a função $f(x) = (m^2 - 25)x^2 + (m - 5)x + m + 5$

Obter o valor de m , tal que:

a) $f(x)$ seja uma função do 2º grau
Para isto basta que o coeficiente que acompanha o termo x^2 seja $\neq 0$, ou seja,

$$m^2 - 25 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 25 \Rightarrow \underline{\underline{m \neq 5 \text{ e } m \neq -5}}$$

b) $f(x)$ seja uma função do 1º grau

Para isto basta que o coeficiente que acompanha o termo x^2 seja igual a zero, ou seja,

$$m^2 - 25 = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ ou } m = -5$$

$$\text{Para } m = 5 \Rightarrow f(x) = (m^2 - 25)x^2 + (m - 5)x + m + 5$$

$$f(x) = (25 - 25)x^2 + (5 - 5)x + 5 + 5$$

$$f(x) = 10 \rightarrow \text{constante}$$

$$\text{Para } m = -5 \Rightarrow f(x) = (25 - 25)x^2 + (-5 - 5)x - 5 + 5$$

$$f(x) = -10x \text{ (1º grau)}$$

c) para $f(x)$ ser côncava para cima
o coeficiente "a" tem que ser positivo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\hookrightarrow a > 0$$



$$\text{Logo, } m^2 - 25 > 0$$

~~$m^2 - 25 > 0$~~



$$\underline{m > 5 \text{ ou } m < -5} //$$

d) O gráfico de f seja paralela ao eixo x
tem que ser uma função constante $f(x) = k$

$$f(x) = k$$

$$f(x) = \underbrace{(m^2 - 25)}_{=0} x^2 + \underbrace{(m - 5)}_{=0} x + m + 5$$

$$\begin{aligned} m^2 - 25 = 0 &\Rightarrow m^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -5 \end{cases} \\ m - 5 = 0 &\Rightarrow m = 5 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} m^2 - 25 = 0 &\Rightarrow m^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -5 \end{cases} \\ m - 5 = 0 &\Rightarrow m = 5 \end{aligned}} \right\} \underline{m = 5}$$

$$f(x) = \underset{0}{(5^2/25)} x^2 + \underset{0}{(5/-5)} x + 5 + 5$$

$$\underline{f(x) = 10} //$$