EXERCÍCIOS slides limites infinitos (e no infinito)

pág. 04

1) Calcular os limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+5x^3}{x^3} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ indet. Dividir numerador e denominador pelo x com sua maior potência

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3+5x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{3}{x^3}}^{\,0}+5}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^4+5x^3+x+2} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ indet. (idem anterior)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^4}}{\frac{x^4+5x^3+x+2}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}+\cancel{\frac{1}{x^4}}^{\,0}}{1+\underbrace{\cancel{\frac{5}{x}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{1}{x^3}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\frac{2}{x^4}}}_{0}} = \frac{0}{1} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$ indet (idem item a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{3x+2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cancel{\frac{3}{x}}^{\,0}}{3+\underbrace{\cancel{\frac{2}{x}}}_{0}} = \frac{2}{3}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ indet (idem item a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\cancel{\frac{1}{x}}}_{0}} = \frac{1}{1} = 1$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}-x^{100}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ indet (idem item a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^{100}+x^{99}}{x^{101}}}{\frac{x^{101}-x^{100}}{x^{101}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}}{1-\underbrace{\cancel{\frac{1}{x}}}_{0}} = \frac{0}{1} = 0$$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{8x^2+3}}{\sqrt{9x^2-7x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ indet. O x com a maior potência aí é o x^2 mas ele está dentro da raiz então a divisão é por $\sqrt{x^2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{8x^2+3}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{9x^2-7x}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{8+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt{9-\frac{7}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{8+\frac{3}{x^2}}{9-\frac{7}{x}}} =$$

$$\sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{8+\cancel{\frac{3}{x^2}}^{\,0}}{9-\cancel{\frac{7}{x}}_{\,0}}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$ //

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5+1}{3x^3-9x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ indet. (idem item a)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^5+1}{x^5}}{\frac{3x^3-9x}{x^5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\cancel{\frac{1}{x^5}}^{\,0}}{\underbrace{\cancel{\frac{3}{x^2}}_{\,0} - \cancel{\frac{9}{x^4}}_{\,0}}_{h(x)}} = \frac{1}{0} \text{ outra indet.}$$

eu sei que o resultado é infinito! estudar os sinais para saber se é $+\infty$ ou $-\infty$.

Neste momento vamos simplesmente propor um $x \to +\infty$ e substituir na $h(x)$ para ver o sinal.

considerar $x = 1000$

$$h(x) = \frac{3}{1000^2} - \frac{9}{1000^4} = 0{,}000003 \quad h(x) > 0$$

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+1/x^5}{\frac{3}{x^2}-\frac{9}{x^4}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ //

$\to C > 0$

$\to h(x) > 0$

EXERCÍCIO Calcule o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

a) $f(x) = x^2$; $a = 2$

$f(a) = a^2 = 2^2 = 4$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ indet.

Fatorando $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$

b) $f(x) = x^2 + 1$; $a = 2$

$f(a) = a^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \underbrace{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}}_{\text{* resolvemos no item a}} = 4$

c) $f(x) = (x - 3)^2$; $a = 1$

$f(a) = (a - 3)^2 = (1 - 3)^2 = 4$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 3)^2 - 4}{x - 1} = \frac{0}{0}$ indet.

Desenvolvendo o ~~trinomio~~ termo

$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x + 9 - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = \frac{1^2 - 6(1) + 5}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ indet novalle

Fatorando o termo $x^2 - 6x + 5$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) = 16$

$x = \frac{-(-6) \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ $\quad x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 5)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \to 1} (x - 5) = 1 - 5 = -4$

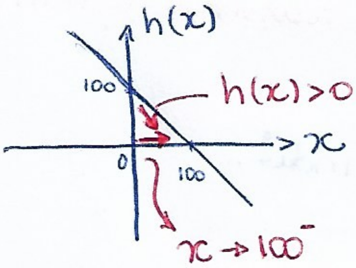
EXERCÍCIOS

O custo para remover x% dos detritos tóxicos despejados em um aterro é dado por:

$$C(x) = \frac{0{,}8x}{100 - x} \quad \text{para } 0 < x < 100$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x)$

$$\lim_{x \to 100^-} \frac{0.8x}{100 - x} = \frac{0.8(100)}{100 - 100} = \frac{\overset{c>0}{80}}{\underset{\to h(x)=?}{0}} \quad \text{indet.}$$



logo, $\lim\limits_{x \to 100^-} C(x) = +\infty$

b) Interpretação: O resultado do limite do item a indica que o custo para a remoção de algo muito próximo de 100% dos detritos tóxicos seria demasiadamente alto (+∞) e portanto inviável do ponto de vista prático.