Assíntotas e Continuidade de Funções

Considere a função $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$. Observe que esta função não é definida em $x=1$, pois $\sqrt{x}-1 \neq 0$, ou seja, $\sqrt{x} \neq 1$ e $x>0$. Logo, $x \neq 1$.

Contudo, fazendo x suficientemente próximo de 1, mas não igual a 1, mais a função $f(x)$ aproxima-se do valor $L=2$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$ indet. Mas, multiplicando (numerador e denominador) pelo conjugado da expressão do denominador, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \underbrace{\sqrt{x}+1}_{g(x)} = 1+1 = 2$$

As funções $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ e $g(x)=\sqrt{x}+1$ coincidem quando $x \neq 1$ (são funções equivalentes). A diferença entre elas é que $g(x)$ está definida para $x=1$ enquanto que a $f(x)$ não está, ou seja,

$$g(1)=\sqrt{1}+1=2 \quad e \quad f(1)=\frac{1-1}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{0} \nexists$$

Neste caso, dizemos que $g(x)$ é uma função contínua em $x=1$ e $f(x)$ não é contínua em $x=1$.

Basta eu calcular $f(x_0)$ para saber se a função é contínua? NÃO! tem algumas condições...

DEFINIÇÃO: Diz-se que uma função f é contínua em um ponto "a" se são satisfeitas as três condições seguintes:

i) Existe $f(a)$;

ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; → Para existir $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

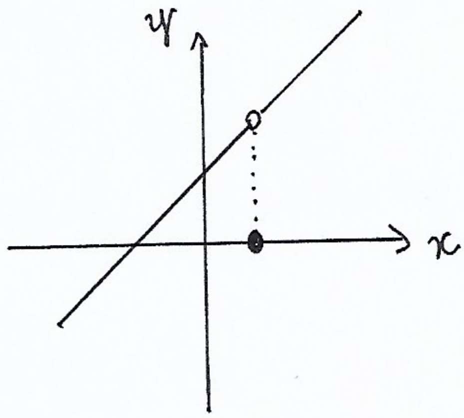
iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se uma ou mais destas três condições não for verificada em "a" dizemos que a função f é descontínua em "a".

EXEMPLOS

1) Verifique se a função $f(x)$ é contínua em $x=2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 2x, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$



Condição i) Existe $f(2) = ?$

$f(2) = 2(2) = 4$ OK!

Condição ii) Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2^+} (2x+1) = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} (2x+1) = 5$$

Como, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$ o limite $f(x)$ quando $x \to 2$ existe e é igual a $L=5$. OK!

Condição iii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ NÃO!

PORTANTO, a função $f(x)$ é descontínua em $x=2$!!

2) Verifique se a função $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

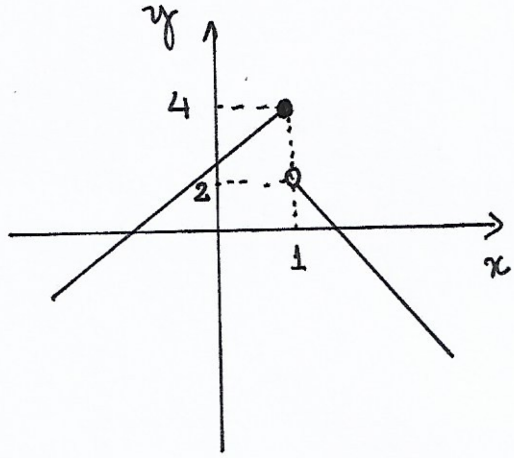
Para o gráfico precisamos de assíntotas, veremos no final da aula!

Condição i) $f(a)$ existe?

$f(1) = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0}$ $\nexists$. Como $f(1)$ não está definida, falha a condição i. Portanto, já podemos concluir que $f(x)$ é descontínua em $x = 1$.

3) Verifique se a função $f(x)$ é contínua em $a = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Condição i) $f(a)$ existe?

$f(1) = 3 + 1 = 4$ OK!

Condição ii) Existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 3 - 1 = 2$$

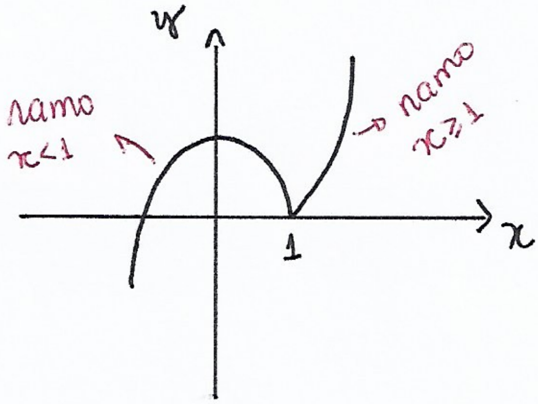
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3 + x) = 3 + 1 = 4$$

como, $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$ dizemos que o limite $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe!

Portanto, a função $f(x)$ é descontínua em $x = 1$.

4) Verifique se a função $f(x)$ é contínua em $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{se } x<1\\ x^2+x-2, & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$



Condição i) $f(a)$ existe?

$f(1)=1^2+1-2=0$ OK!

Condição ii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe?

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+x-2)=1^2+1-2=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x^2+1)=-(1)^2+1=0$$

OK! $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe

Condição iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

Confrontando os resultados das condições i e ii verificamos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$. Logo, a função $f(x)$ atende as 3 condições e concluímos que ela é uma função contínua em $x=1$.

EXERCÍCIOS Nos itens a seguir faça um esboço do gráfico da função e estude sua continuidade em $x=a$.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-6 & \text{se } x<-1\\ -5 & \text{se } -1\leq x\leq 10\\ x-15 & \text{se } x>10\end{cases}$; $a=10$

b) ~~$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}\end{cases}$~~ desconsiderar

b) $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & se \quad x < -2 \\ 0, & se \quad x = -2 \\ 11 - x^2, & se \quad x > -2 \end{cases}$; $a = -2$

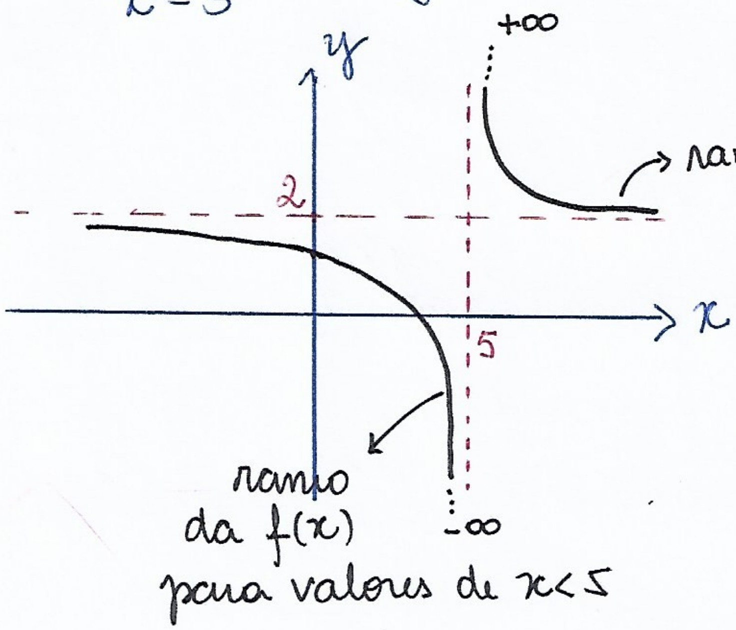
* Hoje

c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & se \quad x > 1 \\ x^2, & se \quad x \leq 1 \end{cases}$; $a = 1$

ASSÍNTOTAS

Como exemplo, observemos o gráfico da função f(x)

$f(x) = \dfrac{2x-6}{x-5}$, cujo domínio é $Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$



Podemos ver que o gráfico (a curva) da função se aproxima da linha vertical $x=5$ (em vermelho) a medida que a variável x se aproxima do valor 5, tanto pela esquerda como pela direita. Assim,

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$$

Essa reta vertical é chamada ASSÍNTOTA VERTICAL

DEFINIÇÃO: Diz-se que a reta vertical $x=a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $f(x)$ se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Em geral, se $D_f = \mathbb{R}$ (sem restrição) então o gráfico de $f(x)$ NÃO possui assíntotas verticais.

O valor $x=a$ é uma candidata à assíntota vertical, sendo a um ponto de restrição no Domínio da função.

De igual modo, no exemplo da função $f(x) = \frac{2x-6}{x-5}$, a linha horizontal $y=2$ (em vermelho) é chamada assíntota horizontal do gráfico, pois:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

DEFINIÇÃO: Diz-se que a reta horizontal $y=b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função se pelo menos uma das afirmativas seguintes for verdadeira

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

EXEMPLOS

1) Para função a seguir achar as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f (se houverem) e traçar o gráfico da função.

$$f(x) = \frac{5x}{2x-1}$$

1º Passo: Determinar o domínio da função para descobrir se há um valor candidato para ser uma assíntota vertical.

$$Df = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-1 \neq 0\} \Rightarrow Df = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \tfrac{1}{2}\}$$

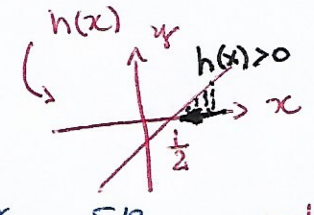
Logo, a reta vertical $x = \frac{1}{2}$ é uma candidata a assíntota vertical. Para confirmar, pelo menos um dos limites laterais ($x \to \frac{1}{2}^+$ ou $x \to \frac{1}{2}^-$) tem que ser um limite infinito (resultado $\pm\infty$).

2º Passo: Calcular os limites laterais para o ponto de restrição do domínio $x = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{5x}{\underbrace{2x-1}_{h(x)}} = \frac{5(1/2)}{2(1/2)-1} = \frac{5/2}{0}$$

$c > 0$

$h(x)$? positiva ou negat.?



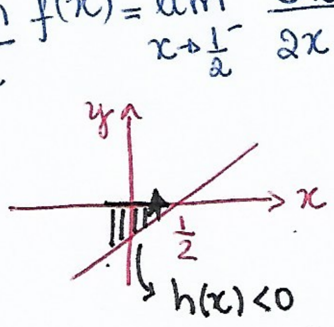
Logo, $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{5x}{2x-1} = \frac{5/2}{0^+} = \underline{+\infty}$

Apenas esse resultado já é suficiente para afirmarmos que a reta $x = \frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical. Faremos o outro limite lateral ($x \to \frac{1}{2}^-$) para poder traçar o gráfico da $f(x)$.

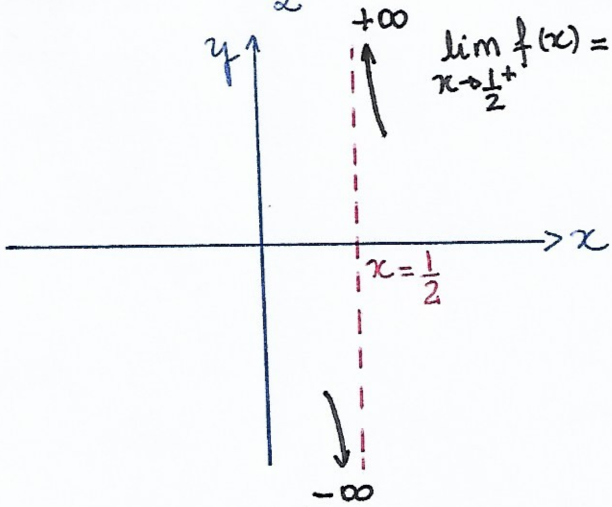
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{5x}{2x-1} = \frac{5/2}{0} = -\infty$$

$c > 0$

$h(x)$?



3º Passo: Fazer a representação gráfica ~~da~~ da assíntota vertical $x = \frac{1}{2}$



$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

4º Passo: Verificar a existência de assíntotas horizontais. Para isso iremos verificar se o gráfico da f(x) irá se estabilizar em alguma constante quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Calcular os "limites no infinito"

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ indet.}$$

divisão pelo x com sua maior potência

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{2-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} = \frac{5}{2}$$

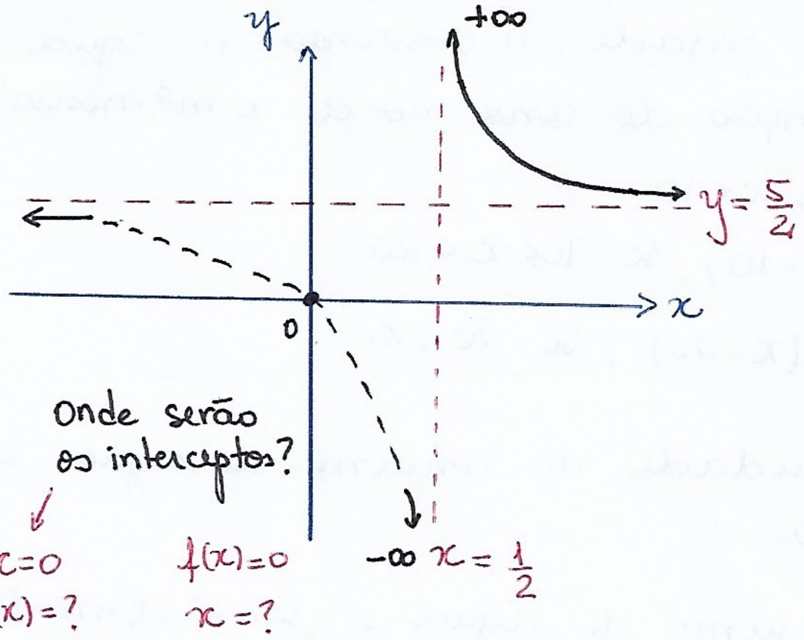
A reta $y = \frac{5}{2}$ é uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$. Iremos verificar se, quando $x \to -\infty$, temos a mesma assíntota. PODE SER DIFENTE!

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{2x-1} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ indet.}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}} = \frac{5}{2}$$

temos a mesma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$.

5º Passo: Fazer a representação gráfica da assíntota horizontal $y = \frac{5}{2}$



Para $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{5(0)}{2(0)-1} = 0 \Rightarrow$ quando $x = 0 \Rightarrow y = 0$

EXERCÍCIOS Para as funções a seguir encontre (se houverem) as assintotas (verticais e horizontais) e faça o gráfico da função.

a) $f(x) = \dfrac{2-3x}{3+5x}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$

EXERCÍCIO: Em uma cidade, o consumo de água é modelado em função do consumo de $x\,m^3$ mensais por:

$$C(x) = \begin{cases} 8, & \text{se } x < 10 \\ 8 + 2(x-10), & \text{se } 10 \leq x < 20 \\ 28 + 2{,}8(x-20), & \text{se } 20 \leq x \end{cases}$$

a) Estude a continuidade do consumo de água em $x = 10$ e $x = 20$.

b) Analise se o consumo de água é sensivelmente diferente se são gastos em torno de 20 metros cúbicos de água.

c) Faça um esboço do gráfico de $C(x)$.

Dica: Diversos exemplos semelhantes resolvidos no capítulo 5 do livro Cálculo para Economia e Administração (stoa).