Elipse e hipérbole

Definição (Elipse)

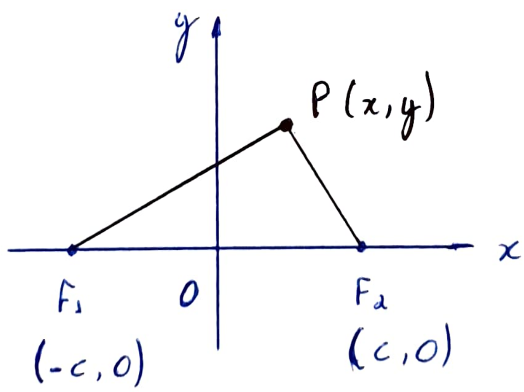
Chama-se elipse o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos dados F_1 e F_2 do plano é uma constante $2a > F_1F_2$

Definição (Hipérbole)

Chama-se hipérbole o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos dados F_1 e F_2 do plano é uma constante $2a < F_1F_2$

Obs.: Os pontos F_1 e F_2 chamam-se foco

Tomemos o sistema de coordenadas de modo que o eixo Ox contenha os focos e o eixo Oy seja a mediatriz do segmento F_1F_2.



Sendo $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, e tomando as definições da elipse e da ~~para~~ hipérbole, temos:

$$d(P,F_1) \pm d(P,F_2) = 2a$$

$$\|PF_1\| \pm \|PF_2\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \mp \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando ao quadrado e simplificando, temos:

$$cx - a^2 = \mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevando ao quadrado novamente, temos:

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

<u>Para</u> <u>a</u> <u>elipse</u>: vale a relação métrica $a^2 = b^2 + c^2$, onde a e b representam as medidas dos semi-eixos.

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore \quad x^2(-b^2) - a^2y^2 = a^2(-b^2)$$

$$\frac{-x^2b^2}{(-a^2b^2)} - \frac{a^2y^2}{(-a^2b^2)} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \; \text{n.}$$

Equação reduzida da elipse.

Para a hipérbole: vale a relação métrica $c^2 = b^2 + a^2$.

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equação reduzida da hipérbole.