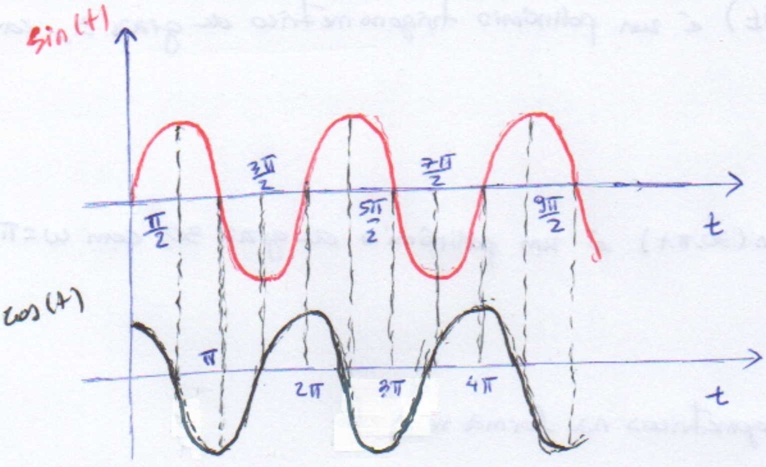


Figura (1)

Usando a propriedade $f(t) = f(t+T)$, $\sin(w.t) = \sin[w(t+T)]$, ou seja:

$$\sin(w.t) = \sin[wt + wT] \quad (294)$$

Considerando que a função sin tem período 2π, então a equação (294) será satisfeita se $w.T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w}$.

Do mesmo modo, mostra-se que $\cos(wt)$ tem período $T = \frac{2\pi}{w}$. Aplicando-se esse resultado às funções do conjunto U, tem-se:

Função	Período
1	indefinido
$\sin(wt)$, $\cos(wt)$	$(2\pi/w) = T$
$\sin(2wt)$, $\cos(2wt)$	$(2\pi/2w) = T/2$
⋮	⋮
$\sin(K.w.t)$, $\cos(K.w.t)$	$(2\pi/Kw) = T/\lvert K\rvert$, com $K \in \mathbb{Z}$

T é o período comum a todas as funções do conjunto $\underline{U}$. Uma combinação linear de funções do conjunto $\underline{U}$ será uma função periódica com período T chamado de polinômio trigonométrico. Um polinômio trigonométrico de grau n é da forma:

$$f(t) = a_0 + a_1.\cos(w.t) + b_1.\sin(w.t) + a_2\cos(2wt) + b_2.\sin(2wt) + \ldots + a_n.\cos(n.w.t) + b_n.\sin(n.w.t) \quad (295)$$

sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ constantes. U é a base dos polinômios trigonométricos. Numa notação mais compacta, o polinômio trigonométrico pode ser escrito como:

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{n} \left(a_K.\cos(K.w.t) + b_K.\sin(k.w.t)\right) \quad (296)$$

Exemplos:

$f(t) = 3 + \cos(t) + 2.\sin(t) + 5.\cos(2.t) + 7.\sin(2.t)$ é um polinômio trigonométrico de grau 2, sendo $w = 1$ e $T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi$, $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $b_1 = 2$ e $b_2 = 7$.

$g(t) = 5 + \sin(\sqrt{3}t) + \cos(2\sqrt{3}.t) + 7.\cos(3.\sqrt{3}t)$ é um polinômio trigonométrico de grau 3, com $\omega = \sqrt{3}$ e

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}.\pi}{3}$$

O polinômio incompleto $h(t) = 3 + \cos(\pi.t) + \sin(30.\pi.t)$ é um polinômio de grau 30, com $\omega = \pi$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$= \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

O conjunto U é a base dos polinômios trigonométricos na forma real.

Em diversas aplicações é conveniente utilizar uma outra base que permita exprimir os polinômios trigonométricos na forma complexa.

A base complexa é o conjunto:

$$V = \{1, e^{i\omega t}, e^{-i\omega t}, e^{2i\omega t}, e^{-2i\omega t}, e^{3i\omega t}, e^{-3i\omega t}, \ldots\}$$

A base V é formada por funções periódicas complexas da variável real t. Essas funções são periódicas e podem ser expressas em termos de senos e cossenos utilizando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$.

Desse modo, $e^{-i\omega t} = \cos(\omega.t) - i\sin(\omega.t)$. Em geral, $e^{\pm ik\omega t} = \cos(k.\omega.t) \pm i\sin(k\omega t)$ é periódica, com período $\frac{T}{|k|} = \frac{2\pi}{|k|.\omega}$

Um polinômio trigonométrico de grau $\underline{n}$ na forma complexa pode ser escrito como:

$$P_n(t) = \underbrace{c_0}_{\text{grau } 0} + \underbrace{c_1.e^{i.\omega.t} + c_{-1}.e^{-i\omega t}}_{\text{grau } 1} + \underbrace{c_2.e^{2i\omega t} + c_{-2}.e^{-2i\omega t}}_{\text{grau } 2} + \ldots + \underbrace{c_n.e^{ni\omega t} + c_{-n}e^{-ni\omega t}}_{\text{grau } n} \quad (297)$$

Numa notação mais compacta, o polinômio trigonométrico complexo pode ser escrito como:

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k.e^{ik\omega t} \quad (298)$$

com $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Comparando-se as equações (296) e (298) é possível estabelecer uma relação entre os coeficientes na forma real (296) com os coeficientes na forma complexa (298). Utilizando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, obtemos:

$$e^{i.k.\omega.t} = \cos(k.\omega.t) + i\sin(k.\omega.t) \quad (299)$$

e

$$e^{-ik\omega t} = \cos(k.\omega.t) - i\sin(k.\omega.t) \quad (300)$$

A forma complexa do polinômio trigonométrico também pode ser escrita como:

$$P_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k.e^{i.k.\omega t} + c_{-k}.e^{-ik\omega t}\right) \quad (301)$$

Substituindo as equações (299) e (300) em (301), obtemos:

$$P_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [c_k.(\cos(k.w.t) + i\sin(k.w.t)) + c_{-k}(\cos(k.w.t) - i\sin(k.w.t))] \quad (302)$$

Agrupando-se os termos em senos e cossenos na equação (302), chegamos à:

$$P_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} [(c_k + c_{-k}).\cos(k.w.t) + i(c_k - c_{-k}).\sin(k.w.t)] \quad (303)$$

Comparando-se as equações (296) e (303), concluímos que para essas equações serem identidade, os coeficientes dos senos e cossenos devem ser iguais termo à termo, ou seja,

$$\begin{cases} a_0 = c_0 & (304.a) \\ a_k = c_k + c_{-k} & (304.b) \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) & (304.c) \end{cases}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Assim, a equação (304) permite transformar um polinômio trigonométrico dado na forma complexa em um na forma real. Agora, multiplicando a equação (304.c) por i, temos:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 & (305.a) \\ a_k = c_k + c_{-k} & (305.b) \\ ib_k = -c_k + c_{-k} & (305.c) \end{cases}$$

Somando-se as equações (305.b) e (305.c), obtemos:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 & (306.a) \\ c_k = \dfrac{a_k - i.b_k}{2} & (306.b) \\ c_{-k} = \dfrac{a_k + i\,b_k}{2} & (306.c) \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, com $k \neq 0$. A equação (306) permite que passemos o polinômio da forma real para a forma complexa.

<u>Exemplo</u>: Seja o polinômio trigonométrico de grau 2:

$$P(t) = 2 + \cos(\pi.t) - \sin(\pi.t) + 5.\cos(2\pi.t) + 7.\sin(\pi.t), \text{ sendo } w = \pi$$

Transforme-o para a forma complexa.

<u>Solução</u>: Como $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $b_1 = -1$ e $b_2 = 7$, usando-se as equações (306), temos:

$c_0 = a_0 = 2$

$c_1 = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1) = \frac{1}{2}.(3+i)$; $c_2 = \frac{1}{2}(a_2 - ib_2) = \frac{1}{2}(5-7i)$; $c_{-1} = \frac{1}{2}(a_1 + ib_1) = \frac{1}{2}(3-i)$; $c_{-2} = \frac{1}{2}(a_2 - ib_2) = \frac{1}{2}(5+7i)$

Assim

$$P_2(t) = 2 + \frac{1}{2}(5+7i).e^{-2.i\pi.t} + \frac{1}{2}(3-i).e^{-i\pi t} + \frac{1}{2}(3+i).e^{i\pi t} + \frac{1}{2}(5-7i).e^{2\pi.i.t}$$

Propriedades de ortogonalidade das funções da base dos polinômios trigonométricos

- As funções da base dos polinômios na forma real são dadas por:

$$n = \{1, \cos(w.t), \sin(w.t), \cos(2.w.t), \sin(2.w.t)\}$$

- As funções da base dos polinômios na forma complexa são dadas por:

$$V = \{1, e^{iwt}, e^{-iwt}, e^{2iwt}, e^{-2iwt}, \ldots\}, \text{ com } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

As funções da base dos polinômios tem as seguintes propriedades:

① $$\int_0^T \sin(p.w.t).\sin(q.w.t)\,dt = \begin{cases} 0, \text{ se } p \neq q \\ \frac{T}{2}, \text{ se } p = q \end{cases} \quad \forall\ q \text{ e } p = 1, 2, \ldots, n$$

Se a integral acima é zero, diz-se que as funções são ortogonais entre si.

② $$\int_0^T \cos(p.w.t).\cos(q.w.t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ se } p \neq q \\ \frac{T}{2} \text{ se } p = q \neq 0 \\ T \text{ se } p = q = 0 \end{cases} \quad \forall\ p \text{ e } q = 0, 1, \ldots$$

③ $\int_0^T \sin(p.w.t).\cos(q.w.t)\,dt = 0 \quad \forall\ p \text{ e } q$, ou seja, um seno é ortogonal à qualquer cosseno e vice-versa, com $p = 1, 2, \ldots, n$ e $q = 0, 1, 2, \ldots, n$

④ $$\int_0^T e^{i.p.w.t}.\left(\overline{e^{i.q.w.t}}\right).dt = \begin{cases} 0, \text{ se } p \neq q \\ T, \text{ se } p = q \end{cases}, \text{ com } p = q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n$$

Para demonstrar essas propriedades de ortogonalidade, faz-se uso de dois resultados:

Ⓘ $$\int_0^T \sin(r.w.t)\,dt = 0, \quad \forall\ r \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^T \cos(r.w.t)\,dt = 0, \quad \forall\ r \in \mathbb{Z}, \text{ não-nulo}$$

$$\int_0^T e^{irwt}\,dt = 0, \quad \forall\ r \in \mathbb{Z}, \text{ não-nulo}$$

ⒾⒾ $$\cos(a).\cos(b) = \frac{[\cos(a+b) + \cos(a-b)]}{2}$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{[\cos(a-b) - \cos(a+b)]}{2}$$

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{[\sin(a+b) + \sin(a-b)]}{2}$$

Utilizando-se as relações (II) e (I), faz-se a demonstração de que:

$$\int_0^T \sin(p.w.t).\sin(q.w.t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{para } p \neq q \\ \frac{T}{2}, & \text{para } p = q \end{cases}$$

Veja que $\sin(p.w.t).\sin(q.w.t)$ pode ser substituído por:

$$\int_0^T \frac{[\cos(p.w.t - q.w.t) - \cos(p.w.t + q.w.t)]}{2}\,dt = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \cos[(p-q).w.t]\,dt}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \cos[(p+q).w.t]\,dt}_{I_2}$$

Examinares, agora, as duas situações!

(i) $p \neq q$

(ii) $p = q$

(i): Se $p \neq q$, então:

$$\begin{cases} l = p - q \neq 0 \\ m = p + q \neq 0 \end{cases}$$

Nessas condições,

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(l.w.t)\,dt = 0, \text{ com } l \text{ inteiro} \neq 0 \\ I_2 = -\frac{1}{2}\int_0^T \cos(m.w.t)\,dt = 0, \text{ com } m \text{ inteiro} \neq 0 \end{array}\right\} \text{logo, } p \neq q \Rightarrow \boxed{I_1 + I_2 = 0}$$

(ii): Se $p = q$, então:

$$\begin{cases} l = p - q = 0 \\ m = p + q = 2p \neq 0 \end{cases}$$

Nessas condições:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(l.w.t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(0.w.t)\,dt = \frac{T}{2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2p.w.t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2.p.w.t)}{2.p.w}\right]_0^T = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2.p.w.T)}{2.p.w} - \frac{\sin(0)}{2.p.w}\right] = \frac{\sin(4\pi p)}{2.p.w} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

se $p = q$

$$I_1 + I_2 = \frac{T}{2}$$

As demais propriedades podem ser verificadas seguindo-se o mesmo raciocínio.

Fórmulas de Fourier - Euler

São expressões integrais para o cálculo dos coeficientes dos polinômios trigonométricos. Seja $p(t)$ um polinômio de grau $\underline{n}$ na forma real:

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos(k.w.t) + b_k \cdot \sin(k.w.t) \right) \qquad (307)$$

Multiplicando-se a equação (307), membro a membro, por $\cos(p.w.t)$, sendo p um número inteiro, integrando-se em relação a p, sobre um período T, obtemos:

$$\int_0^T p(t) \cdot \cos(p.w.t)\,dt = \underbrace{\int_0^T a_0 \cdot \cos(p.w.t)\,dt}_{I_1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{a_k \cdot \int_0^T \cos(p.w.t) \cdot \cos(k.w.t)\,dt}_{I_2} + \underbrace{b_k \int_0^T \cos(p.w.t) \cdot \sin(k.w.t)\,dt}_{I_3} \right)$$

Temos, assim, dois casos a serem analisados: $p=0$ e $p \neq 0$.

<u>Caso</u> <u>(i)</u> <u>$p \neq 0$</u>: De acordo com a relação de ortogonalidade, dada pela propriedade 3, todas as integrais do tipo I_3 são nulas.

As integrais do tipo I_2 tem o seguinte valor:

$$I_2 = a_k \cdot \int_0^T \cos(k.w.t) \cdot \cos(p.w.t)\,dt = \begin{cases} 0, \text{ se } p \neq k \\ a_k \cdot T/2, \text{ se } p = k \neq 0 \; * \\ a_k \cdot T, \text{ se } p = k = 0 \end{cases}$$

* Se $p=k$ e ambos são diferentes de zero, então:

$$a_k \cdot \int_0^T \cos^2(p.w.t)\,dt = a_k \int_0^T \cos(p.w.t) \cdot \cos(p.w.t)\,dt = a_k \cdot \int_0^T \left(\frac{\cos(2 \cdot p \cdot w \cdot t)}{2} + \frac{1}{2} \right) dt = \frac{T}{2}$$

Desse modo, todas as integrais I_2 serão nulas, exceto aquelas onde k assume o valor de p. Quanto a integral I_1, tem-se:

$$I_1 = a_0 \cdot \int_0^T 1 \cdot \cos(p.w.t)\,dt = a_0 \cdot \int_0^T \cos(0.w.t) \cdot \cos(p.w.t)\,dt = 0$$

Voltando a analisar I_2, de acordo com a relação de ortogonalidade dada pela propriedade 2, temos: $p \neq k$, $q=0$, $p \neq 0$

$$\int_0^T \cos(p.w.t) \cdot \cos(q.w.t)\,dt = \begin{cases} 0, \text{ se } p \neq q \\ \frac{T}{2}, \text{ se } p = q \neq 0 \\ T, \text{ se } p = q = 0 \end{cases}$$ Fazendo $p \neq 0$ e $q=0$, então:

$I_1 = 0$

Assim, das análises feitas, $I_1 = 0$, $I_2 = \frac{T}{2}$ e $I_3 = 0$. Portanto,

$$\int_0^T p(t).\cos(p.w.t)\,dt = a_p.\frac{T}{2}.$$ Disso resulta que:

$$\boxed{a_p = \frac{2}{T}\int_0^T p(t).\cos(p.w.t)\,dt} \quad (308)$$

Essa é uma das fórmulas Fourier-Euler

<u>Caso (ii) $p=0$</u>

Neste caso, a integral I_3 é dada por:

$I_3 = b_K.\int_0^T \cos(p.w.t).\sin(K.w.t)\,dt = 0$, $\forall K$ de acordo com a propriedade de ortogonalidade ③ como já vimos, já que seno e cosseno são ortogonais entre si, independentes dos valores de K e p.

A integral do tipo I_2 é dada por:

$I_2 = a_K.\int_0^T \cos(K.w.t).\cos(0.w.t)\,dt = 0$ para $K = 1, 2, \ldots, n$ de acordo com a propriedade ②, pois $K \neq p$ e $p = 0$.

A integral do tipo I_1 é dada por:

$$I_1 = a_0.\int_0^T \underbrace{1}_{\cos(0.\overset{=q}{w}.t)}.\cos(\overset{=p}{0}.w.t)\,dt = a_0.\int_0^T dt = a_0.T, \quad p = q = 0$$

Desse modo, para $p=0$, temos:

$$\int_0^T p(t).\underbrace{\cos(0.w.t)}_{1}.dt = a_0.T \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt} \quad (309)$$

↳ Fórmula de Fourier-Euler

A terceira fórmula de Fourier-Euler resulta da multiplicação do polinômio dado pela equação (307) por $\sin(p.w.t)$, com $p = 1, 2, \ldots, n$, seguida da integração em relação a t sobre o período. Portanto,

$$\int_0^T p(t).\sin(p.w.t)\,dt = \underbrace{a_0.\int_0^T \sin(p.w.t)\,dt}_{I_1} + \sum_{K=1}^{n}\Big(\underbrace{a_K.\int_0^T \cos(K.w.t).\sin(p.w.t)\,dt}_{I_2} + \underbrace{b_K\int_0^T \sin(K.w.t).\sin(p.w.t)\,dt}_{I_3}\Big)$$

Examinando-se I_1, I_2 e I_3, temos:

$I_1 = a_0.\int_0^T \cos(0.w.t).\sin(p.w.t)\,dt = 0$ (de acordo com a propriedade 3)

$$I_2 = a_K . \int_0^T \cos(k.w.t).\sin(p.w.t)\,dt = 0$$ (de acordo com a propriedade ③)

$$I_3 = b_K . \int_0^T \sin(k.w.t).\sin(p.w.t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq p \\ b_p.\dfrac{T}{2}, & \text{se } k = p \end{cases}$$

Então: $\int_0^T p(t).\sin(p.w.t)\,dt = b_p.\dfrac{T}{2}$, com $p = 1, 2, \ldots, n$. Portanto,

$$\boxed{b_p = \frac{2}{T}\int_0^T p(t).\sin(p.w.t)\,dt} \quad (310)$$

↳ Fórmula de Fourier-Euler

Fórmulas de Fourier-Euler na forma complexa

Seja $p(t)$ um polinômio trigonométrico de grau $\underline{n}$ na forma complexa:

$$p(t) = \sum_{K=-n}^{n} c_K . e^{i.k.w.t} \quad (311)$$

sendo $w = \frac{2\pi}{T}$. Multiplicando-se a equação (311) por $e^{\overline{i.p.w.t}}$ e integrando o resultado, obtemos:

$$\int_0^T p(t).e^{\overline{ipwt}}\,dt = \sum_{k=-n}^{n} c_K . \int_0^T e^{i.k.w.t} . e^{\overline{i.p.w.t}}\,dt \quad (312)$$

No entanto, de acordo com a propriedade de ortogonalidade dada por ④, temos:

$$\int_0^T e^{i.k.w.t} . e^{\overline{i.p.w.t}}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq k \\ T, & \text{se } p = k \end{cases} \quad (313)$$

Dessa forma, escreve-se a equação (312) da seguinte forma:

$$\int_0^T p(t).e^{\overline{i.k.w.t}}\,dt = T.c_p$$ de tal forma que:

$$c_p = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).e^{\overline{i.p.w.t}}\,dt.$$ Como $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, então:

$$\boxed{c_p = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).e^{-i.p.w.t}\,dt} \quad (314)$$, sendo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$

↳ Fórmula de Fourier-Euler na forma complexa.

É sabido que podemos desenvolver uma função $\varphi(x)$ em série de potências, tal que:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 . x + \alpha_2 . x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty'} \alpha_K . x^K$$

A série de Taylor, por exemplo, é uma série de potências onde o coeficiente α_K é dado por:

$$\alpha_K = \frac{\varphi^K(0)}{K!}$$. Assim, uma função $\varphi(x)$ desenvolvida em série de Taylor será dada por:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\varphi^K(0)}{K!} \cdot x^K$$

A série de Taylor é um polinômio de Taylor de grau ∞. Assim, se podemos aproximar funções por séries que são polinômios, então podemos aplicar a mesma ideia a funções periódicas $f(t)$, com período T, e desenvolvê-las em série de funções dos polinômios trigonométricos. Portanto, $f(t)$ pode ser descrita por:

$$f(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty} (a_K \cdot \cos(K.w.t) + b_K \cdot \sin(K.w.t)) \qquad (315)$$

com $w = \frac{2\pi}{T}$, sendo os coeficientes a_0, a_K e b_K dados pelas Fórmulas de Fourier-Euler:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt \qquad (316)$$

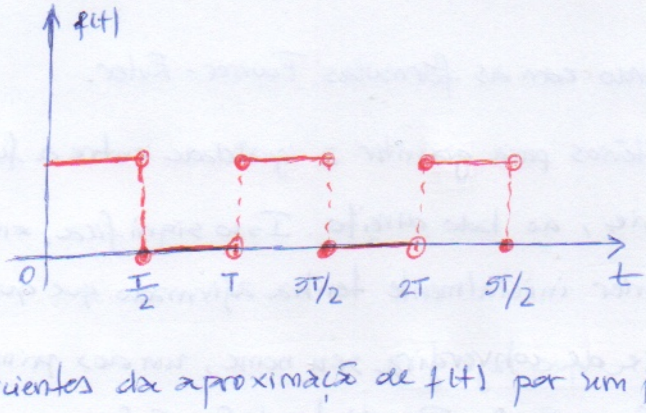
$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(K.w.t)dt \qquad (317)$$

$$b_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin(K.w.t)dt \qquad (318)$$

<u>Exemplo:</u> Seja $f(t)$ uma função periódica T, definida como:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \le t < T/2 \\ 0, & \text{para } T/2 \le t < T \end{cases}$$

O gráfico da função $f(t)$ é dado por:



Os coeficientes da aproximação de $f(t)$ por um polinômio trigonométrico são calculados da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(k.w.t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\cos(k.w.t) = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{k.w}\cdot\sin(k.w.t)\right]_0^{T/2} = \frac{2}{k.w.T}\left[\sin(k.\underbrace{w.\tfrac{T}{2}}_{=\pi}) - \sin(k.w.0)\right]$$

$$\therefore\ a_K = \frac{\sin(k.\pi)}{k.\pi}\ ,\ \text{com } K = 1, 2, \ldots$$

mas, $\sin(k.\pi) = 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$. Logo, $a_K = 0$ para todo k inteiro.

Os coeficientes b_K são determinados por:

$$b_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(k.w.t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\sin(k.w.t)\,dt = -\frac{2}{k.w.T}\left[\cos(k.w.t)\right]_0^{T/2} = -\frac{2}{k.w.T}\cdot\left[\cos(k.w.\tfrac{T}{2}) - \cos(k.w.0)\right]$$

$$= -\frac{2}{2.k.\pi}\left[\cos(k.\pi) - 1\right]\ ,\ \text{sendo } \cos(k.\pi) = (-1)^K\ ,\ \text{já que:}$$

k	$\cos(k.\pi)$
0	1
1	-1
2	1
3	-1

$\Rightarrow \cos(k\pi) = (-1)^K$

Então, $b_K = -\frac{1}{k.\pi}\left[(-1)^K - 1\right]$. Quando k é par, $b_K = 0$. Quando K é ímpar, $b_K = \frac{2}{k.\pi}$. Então, a função "onda quadrada" desenvolvida por um polinômio trigonométrico será dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot\sin(w.t) + \frac{2}{3\pi}\cdot\sin(3.w.t) + \frac{2}{5\pi}\cdot\sin(5.w.t) + \ldots$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\sin[(2K-1).w.t]}{2K-1}$$

Definição: Chama-se série de Fourier a representação de funções $f(t)$ por uma série trigonométrica infinita, ou seja,

$$f(t) = a_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left[a_K\cdot\cos(k.w.t) + b_K\cdot\sin(k.w.t)\right] \quad (319)$$

sendo os coeficientes a_0, a_K e b_K calculados de acordo com as fórmulas Fourier-Euler.

As funções $f(t)$ devem atender um conjunto de critérios para garantir a igualdade entre a função, do lado esquerdo (319), e sua representação por série, ao lado direito. Isso significa, em poucas palavras, que a série deve convergir. Embora Fourier inicialmente tenha afirmado que qualquer função periódica poderia ser representada pela série que hoje leva seu nome, um dos primeiros matemáticos a reconhecer as limitações de tal afirmação foi Dirichlet. A função $f(t)$, assim, deve atender alguns critérios para ser representada por uma série infinita de senos e cossenos. Essas são as chamadas condições de Dirichlet.

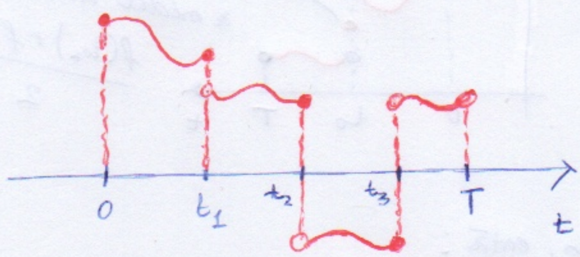
① Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sua derivada devem ser seccionalmente contínuas;

② Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deve ser seccionalmente monotônica, ou seja, a função $f(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos dentro do período fundamental T;

③ A função deve ser absolutamente integrável, ou seja, $\int_0^T |f(t)|\,dt$ converge.

As condições acima são suficientes para garantir a convergência de uma série de Fourier. A série de Fourier converge para $f(t)$ em todos os pontos t onde f é contínua e converge para $(f(t_+) + f(t_-))/2$ onde f é descontínua, ou seja, para o valor médio da soma dos limites laterais da função $f(t)$.

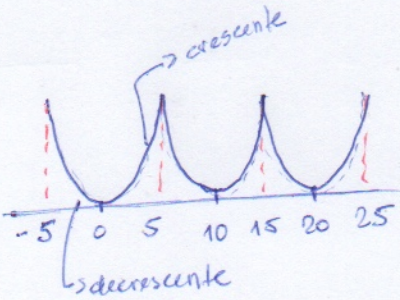
<u>Explicação 1</u>: Uma função seccionalmente contínua é uma função na qual existe um número de sub-intervalos dentro de um período T nos quais $f(t)$ é contínua.



Dentro do intervalo $[0,T]$, tem-se os subintervalos: $[0,t_1[$; $[t_1,t_2[$; $[t_2,t_3[$; $[t_3,T[$ dentro dos quais $f(t)$ é contínua.

<u>Explicação 2</u>: Uma função é seccionalmente monotônica se existe um número finito de subintervalos nos quais $f(t)$ é monotônica crescente ou monotônica decrescente. Uma função é denominada monotônica quando ela é crescente ou descrescente, ou estritamente crescente estritamente decrescente ou constante. Isso quer dizer que a função preserva a ordenação de valores quando aplicada a um conjunto ordenado. Assim, uma função é estritamente crescente quando dentro de um intervalo $[a,b]$ temos: $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)\ \forall\ x_1$ e $x_2 \in [a,b]$; Uma função é estritamente decrescente quando dentro de um intervalo $[a,b]$ temos: $x_1 < x_2 \to f(x_2) < f(x_1)\ \forall\ x_1$ e $x_2 \in [a,b]$. Uma função é constante quando dentro de um intervalo $[a,b]$ temos: $x_1 < x_2 \to f(x_1) = f(x_2)\ \forall\ x_1$ e $x_2 \in [a,b]$.

<u>Exemplo</u>



<u>Explicação 3</u>: Uma função é absolutamente integrável se $\int_0^T |f(t)|\,dt < \infty$, ou seja, se o limite dessa integral existe.

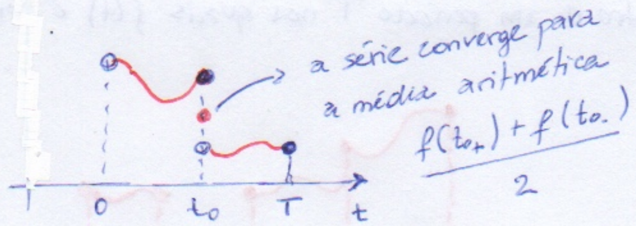
Descontinuidades:

Se t_0 é ponto de descontinuidade de $f(t)$, então $f(t_{0+}) - f(t_{0-})$ é chamado de salto de f em t_0, sendo $f(t_{0+})$ e $f(t_{0-})$ os limites laterais à direita e à esquerda, respectivamente, em t_0, isto é

$$f(t_{0-}) = \lim_{t \to t_0,\, t < t_0} f(t) \quad \text{e} \quad f(t_{0+}) = \lim_{t \to t_0,\, t > t_0} f(t)$$

Quando a função não está definida no ponto $t = t_0$, mas existem os limites laterais à direita e à esquerda em $t = t_0$, podemos definir a função neste ponto como sendo o valor médio dos limites laterais à direita e à esquerda em $t = t_0$, isto é:

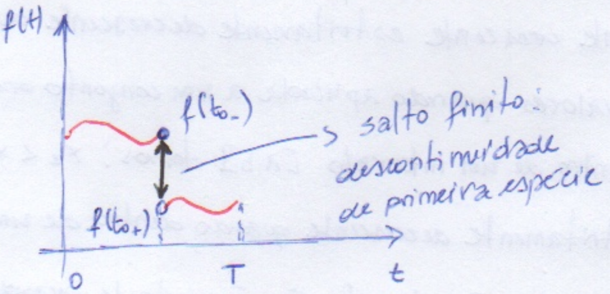
$$\bar{f}(t) = \frac{f(t_{0+}) + f(t_{0-})}{2}$$

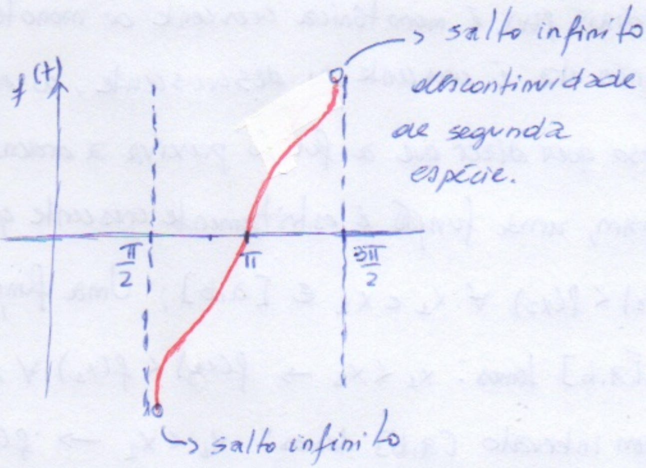


Se $f(t)$ é uma função contínua no ponto t_0, então:

$$f(t_{0+}) = f(t_{0-}) = \bar{f}(t) = f(t).$$

Dizemos que $f(t)$ tem descontinuidade de primeira espécie se o salto é finito em $t = t_0$. Dizemos que $f(t)$ tem descontinuidade de segunda espécie se o salto da função $t = t_0$ é infinito.



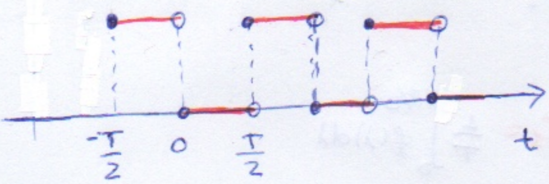


Exemplo: Onda Quadrada

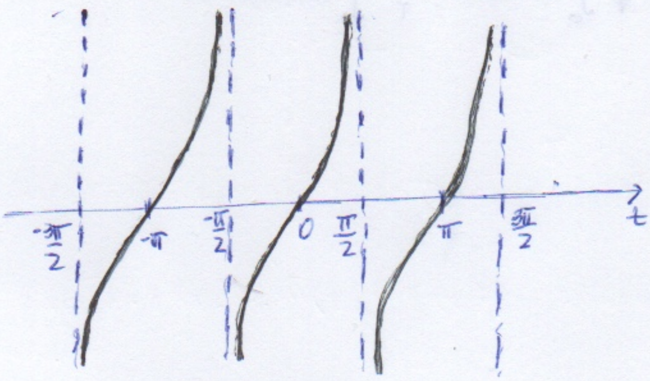
$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \le t < T/2 \\ 0, & \text{para } T/2 \le t < T \end{cases}$$

Como já vimos, a série de Fourier dessa função é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1).\omega.t]}{2k-1}$$



Um exemplo de função que não satisfaz as condições de Dirichlet é: $f(t) = \tan(t)$, cujo gráfico é dado por:



Aspectos práticos para o cálculo dos coeficientes de Fourier

(I): O intervalo de integração das fórmulas de Fourier-Euler é arbitrário, desde que cubra um período da função, ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt = \frac{1}{T}\int_a^{T+a} f(t)\,dt$$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(K.\omega.t)dt = \frac{2}{T}\int_T^{T+a} f(t).\cos(K.\omega.t)dt$$

$$b_K = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin(K.\omega.t)dt = \frac{2}{T}\int_T^{T+a} f(t).\sin(K.\omega.t)dt$$

(II): Série de Fourier de funções pares:

Se $f(t)$ é par, então $f(-t) = f(t)$. Neste caso, tem-se:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).dt = \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t).dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t).dt}_{I_2}$$

Fazendo-se a mudança de variável $t = -\lambda$ em I_1, tem-se $dt = -d\lambda$, com os seguintes limites de integração:

t	λ
$-T/2$	$T/2$
0	0

A integral I_1 em termos da variável λ pode ser reescrita como:

$$I_1 = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{0} f(-\lambda).(-d\lambda) \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{T}\int_{T/2}^{0} f(-\lambda)\,d\lambda \Rightarrow I_1 = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(\lambda)\,d\lambda$$

Conclui-se, portanto, que $I_1 = I_2$. Logo,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\,dt}$$

↳ válido apenas para funções pares.

Analogamente, se $f(t)$ é par, então:

$$\boxed{a_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\cos(K.\omega.t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t).\cos(K.\omega.t)\,dt}$$

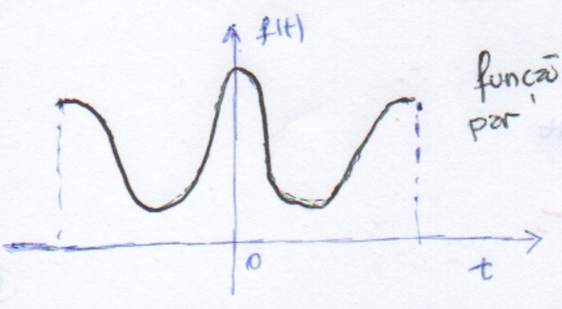
↳ válido apenas para funções pares

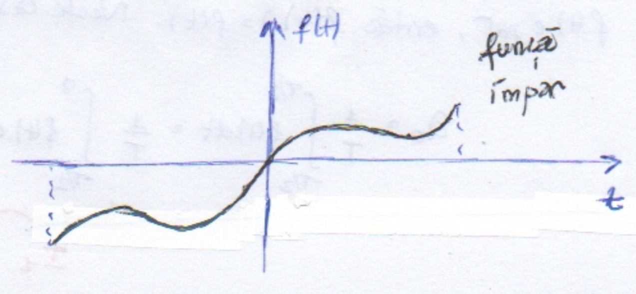
Por outro lado, se $f(t)$ é par, então:

$$b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\sin(K.\omega.t)\,dt = 0, \quad \text{para todo } K$$

(III): Série de Fourier de funções ímpares

Para $f(t)$ ímpar, então $f(-t) = -f(t)$. Como o produto entre uma função ímpar e uma função par resulta em uma função ímpar, então:





Como o produto entre duas funções ímpares resulta em uma função par, então:

$$\boxed{b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\sin(k.w.t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t).\sin(k.w.t)\,dt}$$

↳ Válido apenas para funções ímpares