

Lista 1

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Essa lista contém exercícios de revisão de matemática elementar (funções) e das primeiras aulas do curso (o início de vetores e geometria analítica). Sugiro fortemente tentar fazer e tirar as dúvidas nas monitorias. Quem quiser, pode entregar exercícios feitos para eu corrigir. Lembrando que essa lista é apenas para estudo e não vale nota.

Exercícios de Revisão

Exercício 1. Determine o domínio das funções abaixo (o maior subconjunto de $\mathbf{R}$ onde as operações podem ser realizadas).

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

(b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

(c) $g(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x+3}}$

(d) $h(x) = \sqrt{x} - \sqrt{5-2x}$

(e) $g(x) = \sin\left(\frac{2}{x}\right)$

(f) $f(x) = \ln(x+1)$

Exercício 2. Determine o domínio e esboce o gráfico das funções abaixo.

(a) $h(x) = -x + 1$

(b) $f(x) = |x - 1|$

(c) $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq -1 \\ -x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$

(d) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

(e) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \sin x$

(g) $h(x) = \cos x$

(h) $g(x) = \tan x$

(i) $f(x) = 2^x$

(j) $f(x) = \ln x$

(k) $g(x) = \ln(-x)$

Exercício 3. Com relação às funções abaixo, determine as raízes reais (caso existam), o maior ou menor valor atingido, esboce o gráfico e estude o sinal.

(a) $f(x) = x^2 - 1$

(b) $f(x) = -x^2 - 4x - 5$

Exercício 4. Determine a composta $h(x) = g(f(x))$, em que:

(a) $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$

(b) $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ e $f(x) = x^2 + 3$

(c) $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ e $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

Exercício 5. (Duas identidades muito úteis) Usando que para todos os reais a e b valem as fórmulas $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ e $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, verifique que para todo x real:

(i) $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$

(ii) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$

Vetores e Geometria Analítica

Exercício 6. Determine o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ em cada caso.

(a) $\vec{u} = (0, -3, 3)$ e $\vec{v} = (1, -2, 0)$

(b) $\vec{u} = (4, 0, -1)$ e $\vec{v} = (3, 4, 1)$

(c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e $\vec{v} = (0, 0, 1)$

(d) $\vec{u} = (2, 6, 2)$ e $\vec{v} = (-3, 1, 0)$

Exercício 7. Determine o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ em cada caso.

(a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 1)$

(b) $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$

(c) $\vec{u} = (2, 4, 6)$ e $\vec{v} = (1, 2, 3)$

(d) $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 4)$

Exercício 8. Determine a equação vetorial e a equação paramétrica da reta em questão.

(a) Reta passando pelos pontos $(0, 2)$ e $(1, 0)$.

(b) Reta passando pelos pontos $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$.

(c) Reta passando pelo ponto $(1, 2)$ e paralela à direção do vetor $\vec{v} = (-1, 1)$.

(d) Reta passando pelo ponto $(1, -1)$ e perpendicular à reta $3x + 2y = 2$.

(e) Reta passando pelo ponto $(1, 2, -1)$ e perpendicular às direções dos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$

Exercício 9. Passe a equação vetorial dos planos abaixo para a forma geral e apresente um de seus vetores normais.

(a) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + s(1, 1, 1) + t(0, 2, 3)$

(b) $(x, y, z) = (3, 0, 0) + s(0, 0, 1) + t(1, 0, 0)$

(c) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(2, 3, 1) + t(8, 0, 7)$

Exercício 10. Passe a equação geral dos planos abaixo para a forma vetorial.

(a) $x + y + z = 0$

(b) $2x + 3z + y = 0$

(c) $x + y = 0$

Exercício 11. Determine, em cada caso, a equação geral e a equação vetorial do plano em questão.

- (a) Plano passando pelos pontos $(1, 0, 1)$, $(2, 1, -1)$ e $(1, -1, 0)$.
- (b) Plano passando pelo ponto $(-3, -7, 1)$ e paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.
- (c) Plano passando pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contendo a reta que é a intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$.
- (d) Plano passando pelo ponto $(1, -1, 1)$ e perpendicular à direção do vetor $\vec{v} = (1, 1, -1)$.
- (e) Plano passando pela origem e paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$.

Exercício 12. Determine o produto misto $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ em cada caso.

- (a) $\vec{u} = (3, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, -4, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$
- (b) $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (-2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 2, 1)$
- (c) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 2)$
- (d) $\vec{u} = (2, 6, 2)$, $\vec{v} = (-3, 1, 0)$ e $\vec{w} = (5, 5, 2)$

Algumas Respostas

Exercício 1:

- (a) $\mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$
- (b) $\mathbf{R}$
- (c) $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0 \text{ ou } x < -3\}$
- (d) $\{x \in \mathbf{R} : \frac{5}{2} \geq x \geq 0\}$
- (e) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$
- (f) $\{x \in \mathbf{R} : x > -1\}$

Exercício 3:

- (a) Raízes 1 e -1 e menor valor -1 .

- (b) Não tem raízes reais e maior valor -1 .

Exercício 4:

- (a) $h(x) = 3x + 7$
(b) $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$
(c) $h(x) = x$, para $x \neq 1$

Exercício 6:

- (a) 6
(b) 11
(c) 3
(d) 0

Exercício 7:

- (a) $(-10, -2, -14)$
(b) $(2, -1, 3)$
(c) $(0, 0, 0)$
(d) $(-13, -3, 4)$

Exercício 8:

- (a) Vetorial $(x, y) = (0, 2) + t(1, -2)$
(b) Vetorial $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, -1)$
(c) Vetorial $(x, y) = (1, 2) + t(-1, 1)$
(d) Vetorial $(x, y) = (1, -1) + t(3, 2)$
(e) Vetorial $(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(1, 0, -1)$

Exercício 9:

- (a) $x - 3y + 2z - 1 = 0$ e $(1, -3, 2)$ é um vetor normal
- (b) $y = 0$ e $(0, 1, 0)$ é um vetor normal
- (c) $21x - 6y - 24 = 0$ e $(21, -6, -24)$ é um vetor normal

Exercício 10:

- (a) $(x, y, z) = (1, -1, 0) + s(0, -1, 1) + t(1, -1, 0)$
- (b) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 0, -2) + t(0, 1, -3)$
- (c) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(0, 0, 1) + t(1, -1, 0)$

Exercício 11:

- (a) Vetorial $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 2, -1) + s(1, 1, -2)$ e Geral $-3x + y - z + 4 = 0$
- (b) Vetorial $(x, y, z) = (-3, -7, 1) + t(1, 1, 1) + s(-1, 1, 0)$ e Geral $x + y - 2z + 12 = 0$
- (c) Vetorial $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(3, 5, -2) + s(-1, 1, 0)$ e Geral $x + y + 4z - 5 = 0$
- (d) Vetorial $(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(1, 0, 1) + s(1, -1, 0)$ e Geral $x + y - z = 1$
- (e) Vetorial $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 5, 1) + s(2, 7, 1)$ e Geral $2x - y + 3z = 0$