

- Teoria de perturbação em mecânica celeste

①

Em termos de variáveis de ação e ângulo, o problema de Kepler é dado por:

$$H_0 = -\frac{m}{2} \frac{(GMm)^2}{(I_r + I_0)^2}, \quad I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr$$
$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta d\theta = J$$

Nesse caso, temos $\omega_r = \omega_\theta = \frac{m (GMm)^2}{(I_r + I_0)^3}$ e a órbita é fechada

$$\Omega = \omega_r - \omega_\theta = 0 \quad (\text{sem precessão})$$

Vamos fazer uma transformação canônica para remover a degenerescência:

$$F_2 = (\phi_\theta - \phi_r) I_1 + \phi_r I_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} (\phi_r, \phi_\theta, I_r, I_0) \rightarrow \\ \rightarrow (\phi_1, \phi_2, I_1, I_2) \end{array} \right\}$$

$$\phi_1 = \frac{\partial F_2}{\partial I_1} = \phi_\theta - \phi_r; \quad I_r = I_2 - I_1$$

$$\phi_2 = \phi_r; \quad I_0 = I_1$$

Nessas novas coordenadas, temos que:

$$H_0 = - \frac{m (GMm)^2}{2 I_2^2}, \quad \omega_2 = \omega_r \quad (2)$$

$$\omega_L = \omega_0 - \omega_r = 0$$

Esse será o Hamiltoniano não perturbado.

Como exemplo de perturbação, considere:

$$H_1 = \frac{\varepsilon}{3r^3}, \text{ com } \varepsilon \text{ sendo uma constante pequena. (Veja o exercício 4.27 do Kibble)}$$

Queremos encontrar ω_L , que nos dará a precessão:

$$\omega_L = \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial I_1}. \quad (\text{Utilizaremos o valor não perturbado de } I_1. \text{ Correto em primeira ordem})$$

$$\omega_L = \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial J} \quad \checkmark \quad (\omega_L = \omega_0 - \omega_r = -\Omega, \text{ velocidade angular de precessão})$$

Em vez de calcularmos o valor esperado como $\frac{1}{2\pi} \int H_1 d\phi_1$, vamos tomar explicitamente a média sobre um período da órbita não perturbada (válido em 1ª ordem):

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt H_1$$

Isso evita o cálculo explícito de ϕ_1 . (3)

Da solução de H_0 , sabemos que:

$$J = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow dt = \frac{m r^2}{J} d\theta \text{ e assum:}$$

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{T} \frac{m}{J} \int_0^{2\pi} H_1 r^2 d\theta$$

Para nosso exemplo particular:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{T} \frac{m}{J} \frac{\varepsilon}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} d\theta$$

Para realizar essa integral, precisamos da equação da órbita não perturbada:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\ell} [e \cos(\theta - \theta_0) + 1], \quad \ell = \frac{J^2}{m |K|}, \quad |K| = G M m$$

$$e^2 = 1 + \frac{2 E \ell}{|K|}, \quad E < 0$$

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{T} \frac{m}{J} \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\ell} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta + e \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \theta_0) d\theta \right\}$$

$$\langle H_1 \rangle = \frac{2\pi}{T} \frac{m}{J} \frac{\varepsilon}{3} \frac{m |K|}{J^2} = \frac{2\pi}{T} \frac{\varepsilon}{3} \frac{m^2 |K|}{J^3},$$

donde vem que:

$$\Omega = -\omega_1 = -\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial J}$$

(4)

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \cdot \epsilon \cdot \frac{m^2 |K|}{J^4} \cdot (*)$$

Nessa forma geral, é difícil ter uma intuição acerca dessa correção. Se nos especializarmos em uma órbita não perturbada circular, podemos escrever:

$$J = m a^2 \omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \left[\frac{|K|}{m a^3} \right]^{1/2} \quad (\text{3ª lei de Kepler})$$

→ órbita circular *→ exato*

$$\Omega = \omega \cdot \frac{\epsilon}{|K|} \cdot \frac{m^2 |K|^2}{m^4 a^3 \omega^4} = \omega \cdot \frac{\epsilon}{|K| a^2} \cdot \frac{|K|^2}{m^2 a^6} \cdot \frac{1}{\omega^4}$$

ω⁴

$$\boxed{\Omega = \omega \cdot \frac{\epsilon}{|K| a^2}}, \quad |K| = G M m$$

Na verdade, essa forma de perturbação é induzida por correções da relatividade geral ao potencial Newtoniano. Nesse

caso: $\epsilon = \frac{|K| J^2}{c^2 m^2}$ (Do ponto de vista da teoria de perturbação, tratamos ϵ como independente de J !)

velocidade da luz

A partir de (*) podemos então calcular, ⑤
por exemplo, a precessão de Mercúrio:

$$T = 0.2409 T_{\text{TERRA}}, \quad e = 0.2056, \quad a = 5.79 \times 10^7 \text{ Km}$$

$$\frac{GM_{\text{SOL}}}{c^2} = 1.4766 \text{ Km}. \quad \text{Com esses valores,}$$

$$\text{temos então: } \Omega = 42.98 \text{ arcosegundos/século.}$$

$$1 \text{ arcosegundo} = \frac{1^\circ}{3600}.$$

Depois de removermos outras contribuições, como a precessão de 531.34 arcosegundos/século causada pelos outros planetas do Sistema Solar, os resultados experimentais para a órbita de mercúrio dão uma precessão de 43.1 arcosegundos/século. Temos então um excelente acordo entre teoria e observação. Esse foi, historicamente, um dos primeiros testes da teoria geral da relatividade e ainda permanece muito importante.

- Teorema de Bertrand

(6)

A existência de uma terceira constante do movimento para o problema de Kepler e o oscilador harmônico 2D isotrópico torna esses problemas super-integráveis. Isso faz com ^{que} todas as órbitas sejam periódicas para todos os valores de E e J para os quais o movimento é limitado. O teorema de Bertrand mostra que, para potenciais centrais, só temos órbitas fechadas e limitadas se $V(r) = -K/r$ ou $V(r) = Kr^2$, com $K > 0$.

Isso faz esses dois problemas, de fato, especiais. Vamos agora esboçar uma demonstração desse teorema seguindo a seção 1.7 do livro do Nivaldo Zemon

Em um problema de força central, podemos escrever que:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + V(r), \quad J = p_\phi = \text{cte.}$$

$V(r) \rightarrow$ energia potencial efetiva.

O mínimo de $V(r)$ corresponde a uma órbita circular de raio $r=a$ e energia $E_0=V(a)$. Nesse ponto, temos: (7)

$$U'(a) = 0 = V'(a) - \frac{J^2}{a^3 m} \Rightarrow \frac{J^2}{m a^3} = V'(a) (*)$$

$$U''(a) = V''(a) + \frac{3J^2}{m a^4} = \frac{3}{a} V'(a) + V''(a) (**)$$

Introduzindo $u = 1/r$, podemos escrever:
 (SEC 4.4 do Kibble)

$$E = \frac{J^2}{2m} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + W(u), \quad W(u) = U(1/u) = \frac{J^2 u^2}{2m} + V\left(\frac{1}{u}\right)$$

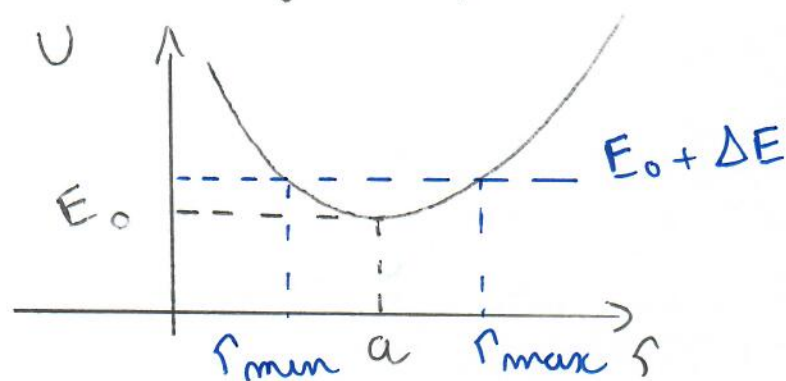
Podemos então escrever:

$$\theta = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{J du}{[2m(E - W(u))]^{1/2}}.$$

Uma órbita é limitada e fechada se depois de um número inteiro de oscilações completas de r , o ângulo varia de um número inteiro de 2π radianos: $\omega_r/\omega_\theta = q/p$, $q, p \in \mathbb{Z}$

Se todas as órbitas são fechadas, aquelas nas vizinhanças das trajetórias circulares

são igualmente fechadas. Por isso, consideraremos uma órbita limitada resultante de uma ligeira perturbação da órbita circular. (8)



Por isso, vamos expandir $W(u)$ ao redor de $u_0 = 1/a$

$$W'(u) \Big|_{u=1/a} = \frac{J^2 u}{m} - \frac{1}{u^2} V' \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_{u=1/a} = a^2 \left[\frac{J^2}{ma^3} - V'(a) \right] \stackrel{=0, \text{ por } (*)}{=} 0$$

$$W''(u) \Big|_{u=1/a} = \frac{J^2}{m} + \frac{2}{u^3} V' \left(\frac{1}{u} \right) + \frac{1}{u^4} V'' \left(\frac{1}{u} \right) \Big|_{u=1/a}$$

$$= 3a^3 V'(a) + a^4 V''(a) = a^4 U''(a)$$

$$E - W(u) = \Delta E - \frac{1}{2} W''(1/a) (u - u_0)^2 + O(u - u_0)^3$$

Defina agora $x^2 = 2\Delta E / W''(u_0)$ e $u = u_0 + x \sin \psi$

$$\theta = \frac{2J}{\sqrt{m W''(u_0)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x \cos \psi d\psi}{\sqrt{x^2 (1 - \sin^2 \psi)}} \stackrel{E=W(u)}{=} 2\pi \frac{J}{\sqrt{ma^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a U''(a)}}$$

$\frac{1}{a^4 U''(a)}$

$$\theta = 2\pi \sqrt{\frac{V'(a)}{3V'(a) + aV''(a)}}$$

(9)

Escreva agora $V(r) = Kr^\alpha$ e assim:

$$V'(a) = \alpha K a^{\alpha-1} \text{ e } V''(a) = \alpha(\alpha-1) a^{\alpha-2} \Rightarrow$$

$$\theta = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\alpha+2}} \quad (K < 0 \text{ se } -2 < \alpha < 0) \quad (***)$$

Em uma órbita fechada, θ deve ser um múltiplo inteiro de 2π pois o período em θ e r devem ser comensurados. Isso mostra que $\alpha = -1$ (Newton) e $\alpha = 2$ (oscilador), de fato produzem órbitas fechadas. No entanto, essa análise mostra que as órbitas vizinhas à circular ainda serão fechadas se $\alpha = 7, 14, 23, \dots$

Como procuramos situações em que todas as órbitas sejam fechadas, independente da energia, vamos agora analisar o limite $E \rightarrow \infty$ complementando a análise de baixas energias $- E \rightarrow 0 -$ feito até o momento.

Os pontos de retorno $U(r) = E$ são:

$$E = \frac{J^2}{2mr^2} + Kr^\alpha$$

(10)

- $\alpha > 0, K > 0, E \rightarrow \infty$

$$r_{\max} \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad r_{\min} \approx [J^2/2mE]^{1/2}$$

$$\theta = 2J \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 [2m(E - U(r))]^{1/2}} = \frac{2J}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 [E - \frac{J^2}{2mr^2} - Kr^\alpha]^{1/2}}$$

$$x = \frac{J}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{r} \Rightarrow dx = \frac{J}{\sqrt{2mE}} \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr$$

$$x_{\min} = \frac{J}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{r_{\max}} \rightarrow 0; \quad x_{\max} = \frac{J}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{r_{\min}} = 1.$$

$$\theta = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\left[1 - x^2 - \frac{J^\alpha}{(2m)^{\alpha/2}} \frac{K}{E^{\alpha/2+1}} x^{-\alpha}\right]^{1/2}}$$

$$\theta = 2 \int_0^1 \frac{1}{[1 - x^2]^{1/2}} = 2 \operatorname{ArcSin} x \Big|_0^1 = \pi.$$

$\swarrow 0, E \rightarrow \infty$

Portanto, para $\alpha > 0$ apenas $\alpha = 2$ leva a uma órbita fechada, veja equação (***).

Assim, os valores $\alpha = 4, 14, 23$, etc são excluídos.

Uma análise similar para $\alpha < 0$ fornece apenas o valor $\alpha = -1$.