Métodos Computacionais em Física: Mecânica Estatística

Aula: Equações diferenciais estocásticas.

Aula: Eq. Dif. Estocásticas - Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1) Associar a evolução temporal do processo de random walk pode ser escrito na forma de uma “equação diferencial” envolvendo variáveis aleatórias (estocásticas).
2) Identificar a forma geral de uma equação diferencial estocástica (EDE).
3) Implementar a solução numérica de uma EDE pelo método de Euler-Maruyama.

Tarefa: Solucionar uma EDE para um modelo estocástico aplicado para a variação de preços de ações em bolsa e comparar o comportamento das soluções com dados empíricos do índice Ibovespa.

Tempo aproximado: 40 a 50 min (lembrando que o *debug* é a maior parte disso!).

Random Walk como uma EDE.

Processo de Wiener W(t):

- Para cada t, W(t) é uma variável aleatória obedecendo a uma distribuição normal com variância $\sigma_w{}^2 = t$.
- Para todo $t_1<t_2$, $W(t_2)$-$W(t_1)$ é independente de $W(t_1)$.
- Como vimos, um random walk difusivo X(t) com coef. de difusão *D*

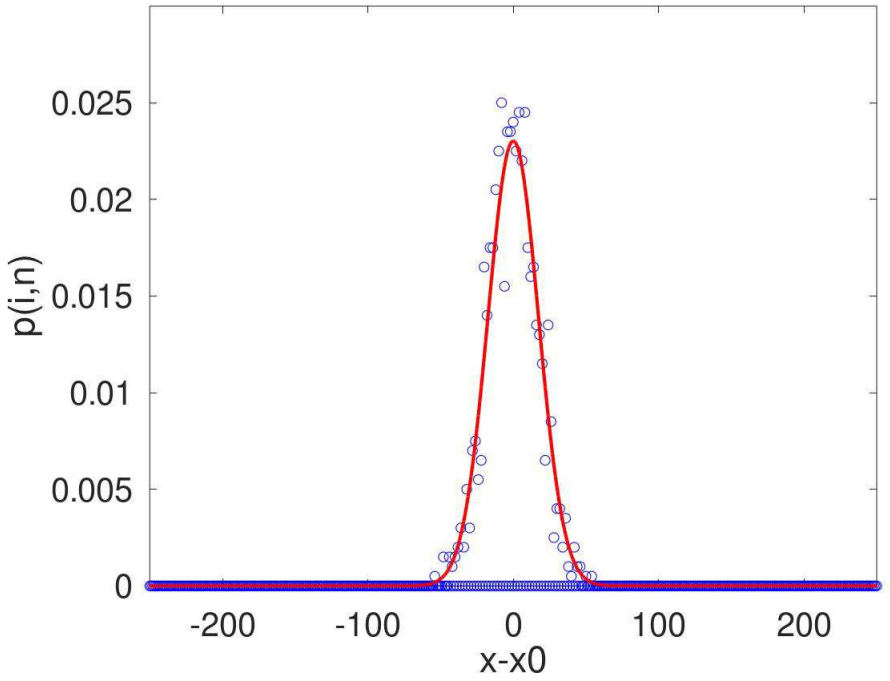
$$dX(t) = \left(\sqrt{2D}\right) dW(t)$$ com c.i. $$X(0) = 0$$

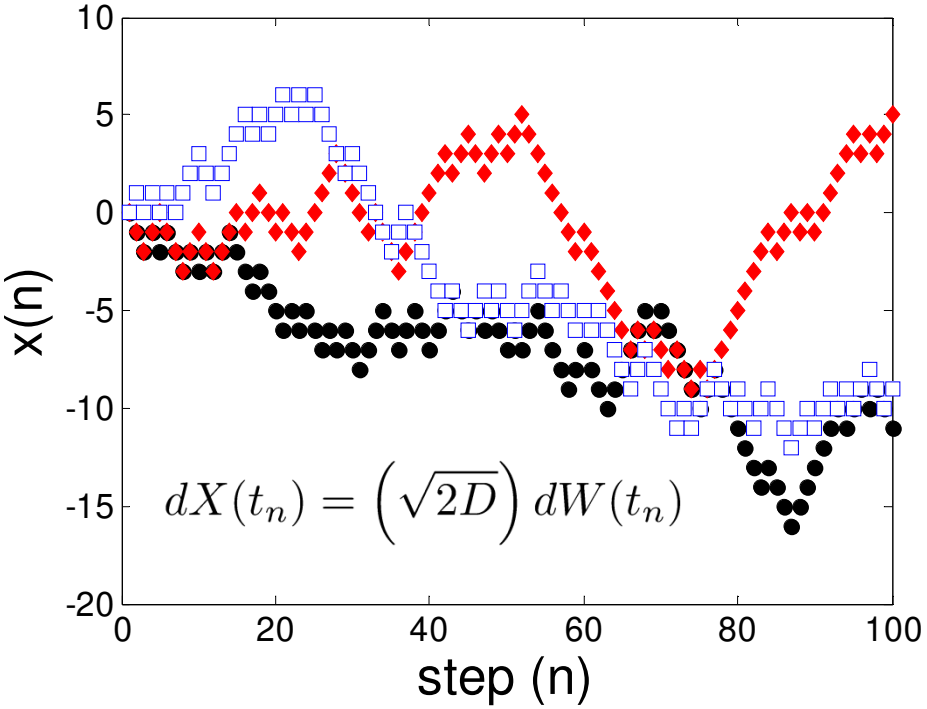
onde definimos *D* como $$D = \lim_{\Delta X, \Delta t \to 0} \frac{(\Delta X)^2}{2\Delta t}$$

Logo, W(t) tem dimensão de $\sqrt{t}$.

Random Walk como uma EDE.

- No fundo, a relação entre X(t) e W(t) é uma mudança de escala.
- Note que a EDE não é uma equação determinística: cada realização leva a um conjunto {X(t)} distinto.
- Nas últimas aulas, o que fizemos foi essencialmente resolver numericamente esta EDE discretizando o tempo e a posição.





Forma geral de uma EDE

- Uma EDE mais geral pode ser escrita na forma:

$$dX(t) = a(t, X)dt + b(t, X)dW(t)$$

- O segundo termo é chamado de *difusivo* (envolve um processo estocástico de Wiener) enquanto que o primeiro termo é chamado de termo de *deriva*.
- Se *a=0* e $b = \sqrt{2D} = \text{const.}$, retomamos o random walk.
- Voltemos à questão da penúltima aula:

E esse? É um random walk?

Outros exemplos de EDEs

- Um modelo bastante usando em finanças para o comportamento do preço de uma ação P(t) é uma EDE na forma:

$$dP(t) = \mu P(t)dt + \sigma P(t)dW(t)$$

onde os termos de deriva e de difusão são *proporcionais a P(t)*.

- EDEs deste tipo caracterizam processos denominados "movimentos Brownianos geométricos".
- Uma outra forma de escrever este modelo é:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

que indica que o *retorno* (variação sobre o preço) tem uma componente linear e outra tipo "random walk".

Resolvendo uma EDE numericamente

- EDE contínua:

$$dX(t) = a(t, X)dt + b(t, X)dW(t) \qquad X(t=0) = X_0$$

- **Método de Euler-Maruyama** – Discretizando no tempo $t \to t_n = (n-1)\Delta t$ e $X(t) \to X_n$, obtemos:

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta X_n \\ \Delta X_n = a(n, X_n)\Delta t + b(n, X_n)\Delta W_n \end{cases}$$

- A variação do termo estocástico (processo de Wiemer) será dada por:

$$\Delta W_n = W_{n+1} - W_n = r_n\sqrt{\Delta t}$$

onde r_n é um número aleatório com distribuição normal e $\langle r_n \rangle = 0$ e $\langle {r_n}^2 \rangle = 1$. Note que a variância de W_n será *linear* com *t*.

Resolvendo uma EDE numericamente

- Tomemos como exemplo a EDE contínua:

$$dP(t) = \mu P(t)dt + \sigma P(t)dW(t) \qquad P(t=0) = P_0$$

- **Método de Euler-Maruyama** – Discretizando o tempo, obtemos:

$$P_{n+1} = P_n + \Delta P_n$$

$$\Delta P_n = \mu P_n \Delta t + \sigma P_n \Delta W_n \qquad \Delta W_n = r_n \sqrt{\Delta t}$$

a qual podemos resolver iterativamente dados: Δt, P_0, μ e σ.

- Por simplicidade, podemos calcular ΔW_n como se fosse um "random walk" com passo de tempo Δt :
  - A cada passo, sorteia-se um número p=rand;
  - Se p ≥ ½: $\Delta W_n = +\sqrt{\Delta t}$ e se p < ½, $\Delta W_n = -\sqrt{\Delta t}$.

Tarefa: “Simulação” do Ibovespa.

Calcular evoluções temporais de P(t) do índice Ibovespa pelo método de Euler-Maruyama para os seguintes parâmetros:

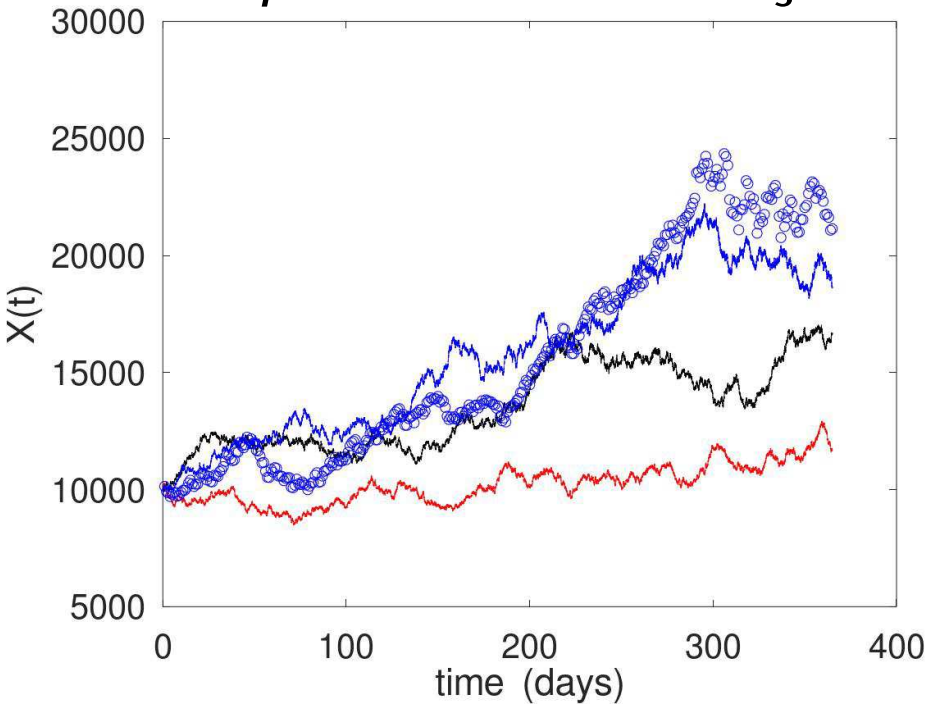
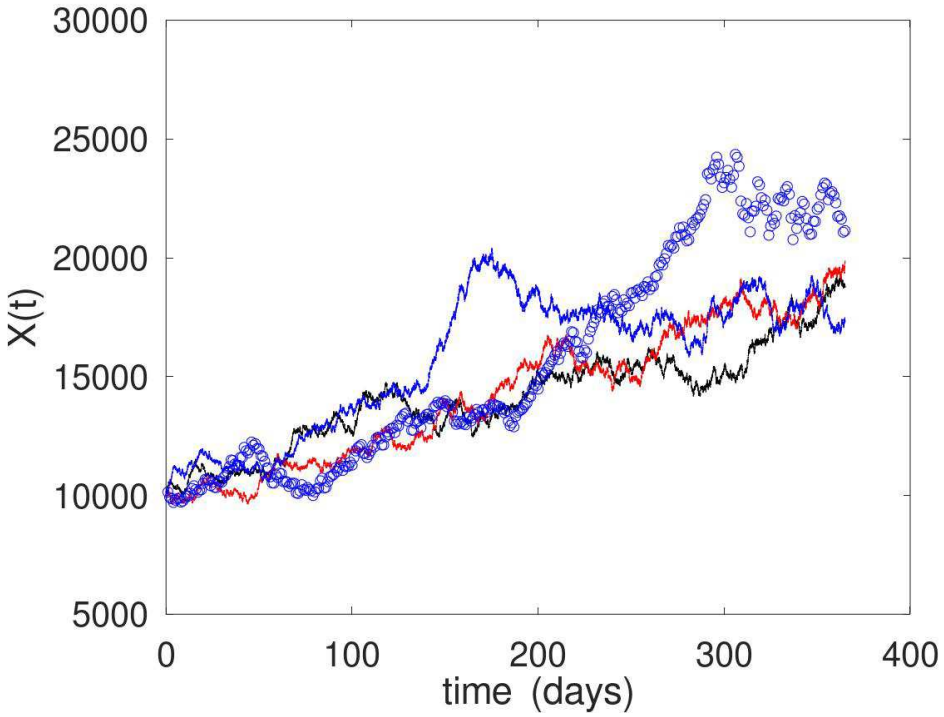
- *Use P_0=10140.05 (valor nominal do Ibovespa em 01/11/2002).*
- *Unidade de tempo: use o tempo em dias e Δt=1/360 dia* (=4 min).
- Parâmetros: use μ=0.002 /dia e σ=0.015/dia$^{1/2}$ (faça testes!)
- Faça pelo menos três realizações para t_{final}=365 dias e compare com os dados de fechamento diários do Ibovespa no arquivo IbovData.mat
- *No passo n$\rightarrow$ n+1:* Calcule ΔW_n como se fosse um “random walk” com passo de tempo Δt (vide slide anterior).
- Responda (comentário no script):

1) O que ocorre se variarmos os parâmetros μ e σ?

2) Rode a simulação por mais tempo (2-3 anos). Há poder “preditivo”?

EDEs – Tarefa - Dicas

- *Para ler os dados do arquivo e armazenar em um vetor:*

```
load IbovData.mat
IbovNum=zeros(size(IbovData,1),size(IbovData,2));
IbovNum=str2double(IbovData);
```

- *Cada valor corresponde a um dia (cuidado ao plotar…).*
- *Exemplo de seis simulações com os mesmos parâmetros:*