Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semanas 7, 8 - página 54 a 85.

Artur Hideyuki Tomita

Uma parte do que está comentado aqui já estava no PDF, mas para facilitar a leitura do livro, está sendo repetido.

3. Limite e continuidade

3.1 Introdução.

Basicamente, vemos nos gráficos da página 54 exemplo de um gráfico onde a função é contínua (da esquerda) e outra que não é contínua (da direita). Em geral, se conseguimos ver o desenho do gráfico, isto é fácil de decidir. Porém queremos fazer isto para situações mais gerais em que possivelmente um desenho não possa nem ser feito facilmente.

Quando podemos desenhar o gráfico, vemos que temos que tirar a caneta do papel para acabarmos de desenhar o gráfico da direita quando no passamos do ponto cuja primeira coordenada é p. Vemos que esse é o único ponto de descontinuidade do exemplo.

Sem comentários nos Exemplos 1 e 2.

Exemplo 3: algo desse tipo foi comentado nas notas de aula. A diferença entre a função com fração e $x + 1$ é que o dominio de um exclui o ponto $\{1\}$ e o outro tem domínio $\mathbb{R}$. O limite usa as informações próxima de 1, mas não a de 1, assim, as duas funções são iguais onde interessa. Assim, o limite ambas para 1 é a mesma. Geralmente nós indicamos isto 'cortando' $x - 1$ em cima e embaixo na fração por que $\frac{x-1}{x-1} = 1$ para todo $x \neq 1$.

No último gráfico da página 56, vemos que a função tem um buraco por que a função não esta definida em p. Mas podemos ver que se preenchermos o gráfico com o ponto (p, L) o gráfico fica sem buraco nesse ponto, assim o limite da função f, quando x vai para p é L.

Na página 57, temos quase o mesmo gráfico, mas neste caso a função f está definida no ponto p. Porém $f(p)$ é um valor para cima de L, assim a função não é continua em p. (Se tentarmos desenhar o gráfico, temos que tirar a caneta do papel para fazer o pinguinho na posição $(p, f(p))$.

Em seguida, ele escreve o limite da derivada. Aqui um ponto próximo de p pode ser escrito como $p+h$. Como temos interesse no pontos próximos de p que são diferentes de p, o h que tomamos é sempre diferente de 0. Assim podemos usar x vai para p para falar do limite sobre p ou podemos usar h vai para 0 e fazemos conta com $p + h$ que se aproxima de p.

No segundo gráfico da página 57, vemos uma aproximação da reta tangente e no último gráfico da página, várias aproximações. A ideia é que quanto mais próximo o outro ponto estiver de p, melhor a aproximação da reta tangente. Ao fazer o cálculo, ao invés da reta, o que vamos usar são os coeficientes angulares das retas. Assim, a derivada é o limite dos coeficientes angulares.

Nos Exemplos 4 e 5 é utilizado a relação $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

No Exemplo 6, já está dada a relação para trabalhar $a^3 - b^3$.

Nestes três exemplos, é feito o uso de cortar em cima e embaixo.

3.2 Definição de função contínua.

No final da página 60 vemos a definição formal de continuidade. Para ver a continuidade por ϵ's e δ's, temos que fazer o mesmo para todo ϵ possível, no caso só fizemos um exemplo.

Para saber se o δ encontrado serve para o ϵ, vemos pela sombra acinzentada. Qualquer ponto dentro do intervalo $]p - \delta, p + \delta[$ tem que cair dentro da faixa horizontal centrada em $f(p)$. Ou seja pega um ponto x dentro do intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, se andar dentro da região acinzentada até encontrar o ponto do gráfico $(x, f(x))$. Dai andamos pela região acinzetada horizontal e chegamos a $f(x)$ que está dentro do intervalo $]f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon[$. Como isto vale para todo x no intervalo, o δ utilizado serve para o ϵ.

No gráfico da página 61, aparece um ϵ para o qual não existe δ, por que os pontos maiores que p sempre vão cair fora da faixa horizonal definida por $g(p) - \epsilon$ e $g(p) + \epsilon$. Note que se tomarmos um ϵ bem grande, existe um δ, mas o importante no limite é que é preciso existir um δ PARA TODO ϵ.

Na página 62, vemos que $|x-p| < \epsilon$ é equivalente a $p-\epsilon < x < p+\epsilon$. Vamos relembrar isto.

Temos que $|x - p| < \epsilon$ sse $x - p < \epsilon$ e $p - x = -(x - p) < \epsilon$ sse $x < p + \epsilon$ e $p - \epsilon < x$ sse $p - \epsilon < x < p + \epsilon$.

Os exemplos das páginas 62 e 62 são exemplos da continuidade pela definição das funções polinomiais de grau 0 e grau 1. O entendimento desses exemplos não é necessária neste curso.

O exemplo 4 e 5 apenas diz que podemos falar de intervalos em torno de um ponto ao invés de um intervalo com as duas pontas equidistantes ($p-\delta$ e $p+\delta$), por que sempre existe um intervalo desse tipo dentro do intervalo I.

O exemplo 6 e 7 das página 65 e 66 são mais complexo por causa das contas, mas pode ser pulado para este curso.

O exemplo 8 é mais visual. Para ver que não é contínua, o ϵ tem que ser de tal forma que $]f(1) - \epsilon, f(1) + \epsilon[$ não contenha 1, assim não vai existir δ por causa dos pontos próximo a 1 que são menores que 1 (todo os ponto dessa parte do gráfico ficam fora da faixa horizontal.)

O Exemplo 9 no final da página 67 é importante lembrar, pois fala da conservac cão de sinal.

Se f é continua em p e $f(p) > 0$ então todos os pontos x suficientemente próximos de p têm $f(x) > 0$.

Similarmente temos que se f é continua em p e $f(p) < 0$ então todos os pontos x suficientemente próximos de p têm $f(x) < 0$.

Pelos últimos gráficos na página 67, isto segue de escolher uma faixa horizontal que não pega o eixo horizontal. Assim todos os valores dentro da faixa tem o mesmo sinal de $f(p)$.

3.2 Definição de limite

A maior parte disto é parecida com a discussão anterior. A principal novidade é que o limite, quando existe é único (página 72).

Os Exemplos 1 e 2 são referentes a funções que são contínuas. Assim o valor do limite no ponto é igual o valor da função no ponto.

O Exemplo 3 já foi citado anteriormente e o Exemplo 4 apenas mostra que a função definida não é contínua em 1 por que o valor da funçã em 1 ($f(1) = 3$) não bate com o valor do limite da função (o limite é 2).

O Exemplo 5 afirma que $f(x) = x^n$ e $g(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ são funções contínuas em seus domínios, onde n é um inteiro positivo. Note que o domínio de f é $\mathbb{R}$ para todo n. Para n par, o domínio de g é $[0, \infty[$ e para n ímpar, o domínio de g é $\mathbb{R}$.

Na página 73, há uma lista de propreidades sobre operações e limites quando os limites de duas funções são números reais: soma, multiplicação por um escalar real, multiplicação de duas funções e a divisão de duas funções quando o limite de baixo não vai para 0.

Note que a partir deles já podemos concluir que toda função polinomial é contínua (Exemplo 12). O Exemplo 14 diz que toda função racional (fração de polinômios) é contínua no seu domínio natural (quando o polinômio de baixo não zera).

Não serão comentados os exemplos 6 a 10 e 13 (páginas 75 a 78), já que a resolução deve estar clara.

O Exemplo 11 fala sobre as provas das propriedades de limites.

O Exemplo 16 é importante e o interessado pode checar a demonstração. Temos que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ se e somente se $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$. Note que isso só é válido para 0.

Para outros valores, podemos apenas afirmar que se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ então $\lim_{x\to p} |f(x)| = |L|$.

O Exemplo 17 é um exemplo de mudança de variável para calcular um limite. Temos que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{h\to 0} f(p+h) = L$. O interessado pode ver a demonstração.

Finalmente temos a conservação de sinal para limite no Exemplo 18. Temos que se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e $L > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $p - \delta < x < p + \delta$ com $x \neq p$ então $f(x) > 0$.

Analogamente, se $\lim_{x\to p} f(x) = L$ e $L < 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $p - \delta < x < p + \delta$ com $x \neq p$ então $f(x) < 0$. O interessado pode ver a demonstração.

3.3 Limites laterais.

Os limite laterais são restritos aos pontos que estão em uma das semirretas iniciadas em p. Quando restrito aos pontos à direita de p, denotamos por $\lim_{x\to p^+} f(x)$ (são os pontos maiores que p) ou restrito aos pontos à esquerda de p, denotamos por $\lim_{x\to p^-} f(x)$ (são pontos menores que p). As definições formais estão nas páginas 82 e 83.

No gráfico da página 82, é discutido o limite lateral à direita pois tomamos $x > p$ com x se aproximando de p.

No gráfico da página 83, é discutido o limite lateral à esquerda pois tomamos $x < p$ com x se aproximando de p.

Note que, em ambos os exemplos, os limites laterais não são iguais.

As propriedades de limites laterais à esquerda e as propriedades de limites laterais à direita funcionam como no caso de limites que já vimos. (não pode tentar trabalhar por exemplo com a soma de um limite lateral à direita e outro à esquerda, por exemplo, para falar sobre soma dos limites laterais é igual a limite lateral da soma).

Note que se o limite existe, então os limites laterais existem e são iguais.

Isto é utilizado no Exemplo 1 da página 83.

O Exemplo 2, temos que os limites laterais são distintos.

Note que para o limite lateral à direita estamos interessados em $x > 0$. Se $x > 0$ então $|x| = x$. Assim, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.

Por outro lado, para o limite lateral à esquerda estamos interessado em $x < 0$. Se $x < 0$ então $|x| = -x$. Assim, $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = -1$.

No final da página há o teorema que diz que o limite existe e é L se e somente os limites laterias existem e ambos são iguais a L.

Quando temos um intervalo limitado, pode existir apenas o limite lateral à esquerda ou apenas o limite lateral à direita de algum ponto. Se tivermos um intervalo fechado, a continuidade na extremidades do intervalo $[a, b]$ são feitas apenas pelo limite lateral à direita de a e o limite lateral à esquerda de b.

O Exemplo 3 é aplicação direta do Teorema e do Exemplo 2, já que os limites laterais existem, mas são distintos.