

7600054 — Sistemas Complejos

Gonzalo Travieso

2020-05-04

Outline

- 1 Exercício
- 2 Bifurcação de Hopf
- 3 Mapas de Poincaré
- 4 Estabilidade de ciclos limite
- 5 Catástrofes

Exercício

Considere um sistema descrito por

$$\dot{x} = \mu - x^3.$$

Exercício

- 1 Encontre os pontos fixos desse sistema, em função de μ .
- 2 Mostre que $x^* = 0, \mu^* = 0$ é um ponto fixo não-hiperbólico.
- 3 Existe uma bifurcação nesse ponto?

Bifurcação de Hopf

- Não surge em sistemas unidimensionais.
- Ocorre quando um ponto fixo estável se transforma em uma órbita periódica.
- Considere o oscilador de van der Pol:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

- Escrevendo como um sistema de primeira ordem com a introdução de $y = \dot{x}$:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \mu(x^2 - 1)y.\end{aligned}$$

- O único ponto fixo é $(0, 0)$.

Estabilidade

- O jacobiano é dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\mu xy & \mu \end{bmatrix}.$$

- No ponto fixo $(0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}.$$

- Os autovalores no ponto fixo são:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - \mu) + 1 = 0,$$

que tem raízes

$$\lambda = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}.$$

Estabilidade (cont)

- Para $\mu < 0$, os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa, e portanto $(0, 0)$ é estável.
- Para $0 < \mu < 2$ os autovalores são complexos conjugados com parte real positiva, e portanto $(0, 0)$ é instável.
- Devido à existência de uma parte imaginária diferente de zero, o sistema passa a ser oscilante.
- No ponto $\mu = 0$ a origem é um ponto fixo não-hiperbólico (pois a parte real dos autovalores do jacobiano é nula) com parte imaginária não-nula.
- Temos então uma **bifurcação de Hopf**

Bifurcação de Hopf: condições

- O ponto \mathbf{x}^* precisa ser ponto fixo com μ^* :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mu^*) = \mathbf{0}.$$

- A função $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ precisa ser uma função analítica.
- O jacobiano de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*, \mu^*)$ precisa ter autovalores complexos conjugados $\lambda = \alpha \pm i\omega$ com parte real nula $\alpha = 0$ e parte imaginária não-nula $\omega \neq 0$.

Exercício

Harrison apresentou o seguinte modelo (abaixo em unidades normalizadas) de duas populações, uma de herbívoros h e outra de seus predadores p , que reproduz alguns resultados experimentais de populações biológicas:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= h \left(1 - \frac{h}{k} \right) - \frac{\alpha ph}{\eta + h}, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{\beta ph}{\eta + h} - \gamma p.\end{aligned}$$

Exercício

- 1 Encontre o ponto fixo não-trivial (diferente de $h = 0, p = 0$) desse sistema.
- 2 Mostre que esse ponto apresenta uma bifurcação de Hopf, e encontre a relação entre os parâmetros do sistema para o qual ela ocorre.
- 3 Simule o sistema antes e depois da transição, para verificar o resultado.

Corte transversal

- Seja φ_t o fluxo no espaço de estado $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ gerado pelo campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$.
- Seja o subespaço $\Sigma \subset \mathcal{S}$ de dimensão $n - 1$
- Se Σ é tal que:
 - 1 Toda órbita φ_t encontra Σ .
 - 2 Para $\mathbf{x} \in \Sigma$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ não é tangente a Σ .

dizemos que Σ é um **corte transversal** do fluxo φ_t .

Mapa de Poincaré

- Seja Σ um corte transversal de φ_t .
- Seja $\mathbf{y} \in \Sigma$ e $\tau(\mathbf{y})$ o menor valor positivo para o qual $\varphi_{\tau(\mathbf{y})} \in \Sigma$.
- O mapa definido por

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}) = \varphi_{\tau(\mathbf{y})}(\mathbf{y})$$

é denominado o **mapa de Poincaré** ou **mapa de primeiro retorno** de φ_t para Σ .

- Σ é denominado neste caso uam **secção de Poincaré**.

Exemplo

- Considere o sistema definido por (em coordenadas polares):

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r - r^3, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

- A solução neste caso pode ser calculada algebricamente:

$$\begin{aligned}r(t) &= \left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right) e^{-2t}\right)^{-1/2}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + t,\end{aligned}$$

com $r_0 = r(0)$ e $\theta_0 = \theta(0)$.

- Uma órbita com r_0 próximo de 1 será atraída para o ciclo limite estável $r(t) = 1$.

Exemplo (cont)

- Considerando agora Σ como o raio $\theta = \theta_0$ pela origem, vemos que Σ é ortogonal ao ciclo limite $r(t) = 1$.
- Também, a órbita iniciando em $(r_0, \theta_0) \in \Sigma$ retorna a Σ em $t = 2\pi$.
- Podemos então definir o mapa

$$P(r) = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-1/2},$$

que é um mapa de Poincaré desse sistema.

- Também, $r = 1$ é um ponto fixo desse mapa:

$$P(1) = 1.$$

Exemplo (cont)

- A derivada de $P(r)$ vale

$$P'(r) = \frac{e^{-4\pi}}{r^3} \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-3/2}$$

- Portanto o ponto fixo $r = 1$ é estável, pois

$$P'(1) < 1.$$

- Isso significa que o ciclo limite associado com esse ponto, $r(t) = 1$, é estável.

Estabilidade de ciclos limite

- Lembrando que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(\mathbf{x}) \right|_{t=0}$$

e

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t.$$

- Então

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\varphi_t(\mathbf{x})) &= \left. \frac{d}{d\tau} \varphi_\tau(\varphi_t(\mathbf{x})) \right|_{\tau=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \varphi_t(\varphi_\tau(\mathbf{x})) \right|_{\tau=0} \\ &= \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \varphi_t \left. \frac{d}{d\tau} \varphi_\tau(\mathbf{x}) \right|_{\tau=0} \\ &= \mathbf{D}_{\mathbf{x}} \varphi_t \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} \varphi_t$ indica o jacobiano de φ_t avaliado no ponto \mathbf{x} .

Estabilidade de ciclos limite (cont)

- Se \mathbf{x}_0 faz parte de uma órbita periódica de período T

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\varphi_T(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_T \mathbf{f}(\mathbf{x}_0),$$

o que indica que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ é um autovetor de $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_T$ com autovalor 1.

- Se \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 fazem parte da mesma órbita periódica de período T , então

$$\mathbf{x}_1 = \varphi_s(\mathbf{x}_0)$$

para algum valor de s .

Estabilidade de ciclos limite (cont)

- Mas

$$\varphi_T(\varphi_s(\mathbf{x})) = \varphi_s(\varphi_T(\mathbf{x}))$$

sempre é válido.

- Derivando ambos os lados e avaliando em \mathbf{x}_0 resulta:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}_1} \varphi_T \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_s = \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_s \mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_T,$$

mostrando que os operadores $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_T$ e $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_1} \varphi_T$ são conjugados por $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_s$.

- Portanto, os autovalores dos operadores $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0} \varphi_T$ de qualquer ponto \mathbf{x}_0 em uma órbita periódica de período T são os mesmos.

Multiplicadores característicos

- Como vimos, um dos n autovalores de $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_0}\varphi_T$ vale $\lambda_1 = 1$, correspondendo ao autovetor $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.
- Os outros $n - 1$ autovalores, $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ são denominados **multiplicadores característicos** da órbita periódica.
- Pode ser mostrado que os multiplicadores característicos de uma órbita periódica são iguais aos autovalores da derivada do mapa de Poincaré em um ponto \mathbf{x}_0 da órbita.

Classificação de órbitas periódicas

- Se todos os multiplicadores característicos de uma órbita periódica são diferentes de um, ela é uma órbita periódica hiperbólica.
- Se todos os multiplicadores característicos de uma órbita periódica têm módulo menor do que um, ela é um **atrator periódico**.
- Se todos os multiplicadores característicos de uma órbita periódica têm módulo maior do que um, ela é um **repulsor periódico**.
- Se pelo menos um dos multiplicadores característicos de uma órbita periódica hiperbólica tem módulo maior de um e pelo menos um deles tem módulo menor do que um, ela é uma **sela periódica**.

Catástrofes

- A **teoria das catástrofes** estuda mudanças abruptas causadas por modificações suaves dos parâmetros de controle.
- Considere o seguinte sistema de dois parâmetros

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2) = \mu_1 + \mu_2 x - x^3.$$

- Os pontos de bifurcação devem ser pontos fixos não-hiperbólicos, isto é:

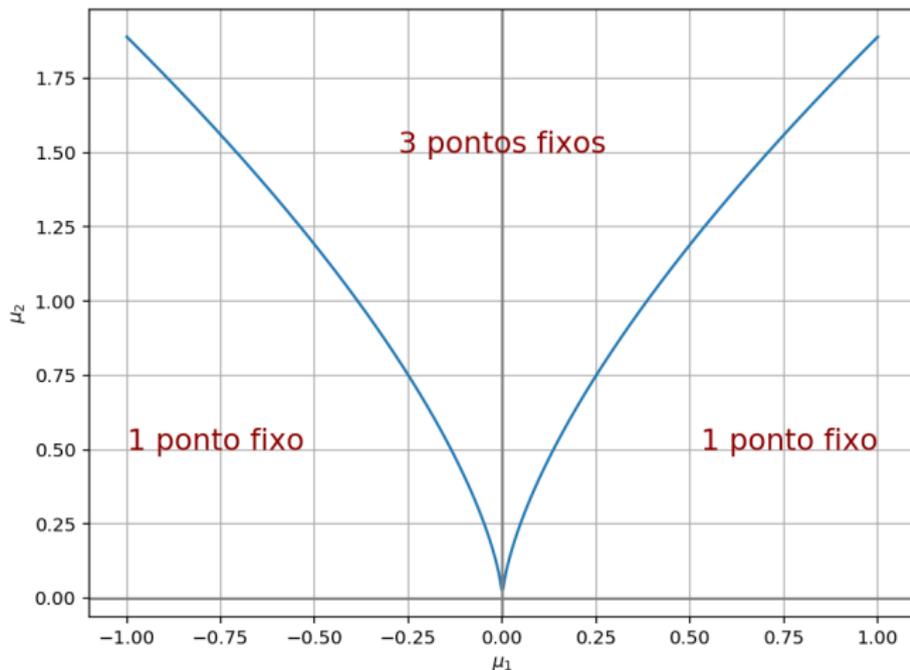
$$\begin{aligned} f(x, \mu_1, \mu_2) = \mu_1 + \mu_2 x - x^3 &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu_1, \mu_2) = \mu_2 - 3x^2 &= 0. \end{aligned}$$

- Eliminando x nas duas equações encontramos:

$$27\mu_1^2 = 4\mu_2^3,$$

que deve ser satisfeita por todos os pontos de bifurcação.

Catástrofe (figura)



Catástrofe (cont)

- As linhas de bifurcação separam regiões topologicamente similares (mesmo número e tipos de pontos fixos).
- O número de pontos fixos em cada região (marcado no gráfico) pode ser determinado considerando qualquer ponto conveniente dentro da região.
- Para $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$ temos $1 - x^3 = 0$ que tem o único ponto fixo $x = 1$.
- Para $\mu_1 = -1, \mu_2 = 0$ temos $-1 - x^3 = 0$ que tem o único ponto fixo $x = -1$.
- Para $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$ temos $x - x^3 = 0$ que tem os pontos fixos 0 e ± 1 , portanto essa região tem 3 pontos fixos.

Catástrofe (cont)

- A estabilidade dos pontos fixos também pode ser estabelecida considerando a estabilidade de pontos fixos de casos especiais.
- A derivada é

$$\mu_2 - 3x^2.$$

- Para $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$, no ponto fixo $x = 1$ temos derivada negativa, e portanto o ponto fixo é estável.
- Para $\mu_1 = -1, \mu_2 = 0$, no ponto fixo $x = -1$ temos derivada negativa, e portanto o ponto fixo é estável.
- Para $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$ temos 3 pontos fixos:
 - $x = 0$ é instável.
 - $x = \pm 1$ são estáveis.

Catástrofe (cont)

- Agora vejamos o que acontece ao variarmos μ_1 mantendo μ_2 fixo em um valor positivo, por exemplo, $\mu_2 = 3$.
- Neste caso, as bifurcações ocorrem em

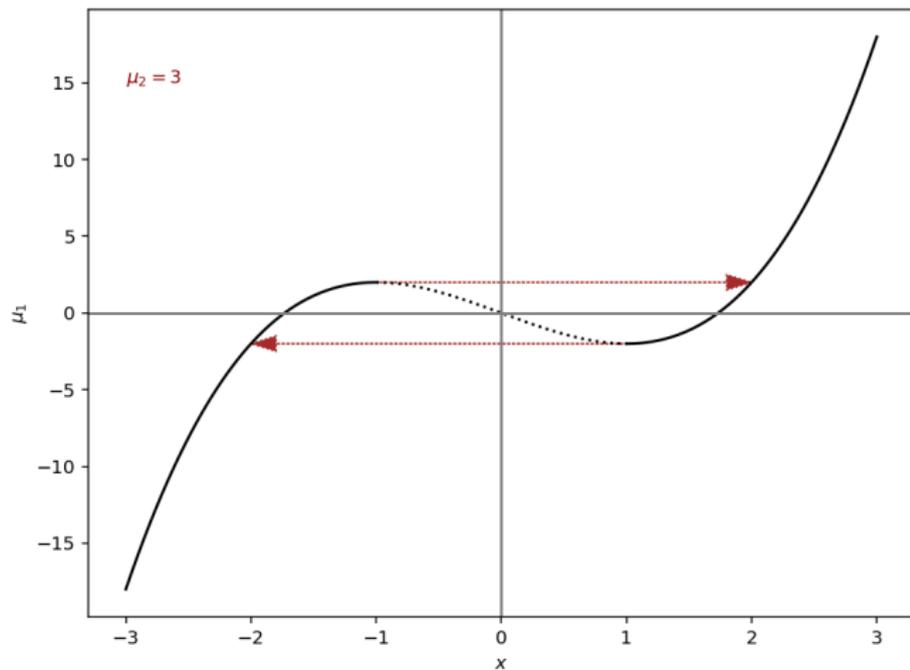
$$\mu_1^2 = 4,$$

isto é, em

$$\mu_1 = \pm 2.$$

- Para $\mu_1 < -2$ temos apenas 1 ponto fixo estável, para $-2 < \mu_1 < 2$ temos 3 pontos fixos, um instável e dois estáveis e para $\mu_1 > 2$ temos novamente apenas um ponto fixo estável.
- Para entender o que acontece, vejamos uma figura do ponto fixo no plano $x \times \mu_1$.

Catástrofe (figura)



Exercício

Considere o sistema anterior com $\mu_2 = 3$:

$$\dot{x} = \mu_1 + 3x - x^3.$$

Exercício

- 1 Simule esse sistema para μ_1 valendo -3, 0 e 3, em cada caso partindo de valores iniciais entre -5 e 5 a intervalos de 0.5. O resultado é consistente com as análises anteriores?
- 2 Simule o sistema partindo de $x_0 = -2$ tal que para $0 \leq t \leq 20$, ele tem $\mu_1 = 1.99$. No instante $t = 20$ há uma ligeira alteração e o sistema fica com $\mu_1 = 2.01$ para $20 < t \leq 40$. Verifique e explique o resultado.

Dica: Faça uma simulação com $\mu_1 = 1.99$ em $0 \leq t \leq 20$ e guarde os resultados. Em seguida, realize uma nova simulação para $20 \leq t \leq 40$ com $\mu_1 = 2.01$ e colocando para valor inicial o valor calculado anteriormente para $x(20)$. Em seguida, junte os dois resultados para plotar.