

Exercícios do conteúdo da aula 7 - capítulo 3

- (1) Suponha que três bolas são selecionadas ao acaso de uma urna contendo três bolas vermelhas, quatro bolas brancas e cinco bolas azuis. Sendo X e Y respectivamente o número de bolas vermelhas e o número de bolas brancas escolhidas. Determine:
- A distribuição de probabilidade (X, Y)
 - A distribuição de probabilidade (X) e a distribuição de probabilidade (Y)
 - $P(X=Y)$
- (2) Dois dados honestos são lançados. Obtenha a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) quando:
- X é o valor obtido no primeiro dado e Y é o maior valor observado
 - X é o menor valor observado e Y é o maior valor observado
 - X é o maior valor observado e Y é o a soma dos valores observados
- (3) A distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada por $p(1,1) = 1/8, p(1,2) = 1/4, p(2,1) = 1/8, p(2,2) = 1/2$.
- Calcule
 - $P(XY \leq 3)$
 - $P(X + Y > 2)$
 - $P(X|Y > 1)$
 - X e Y são independentes
- (4) Considere a tabela de probabilidades abaixo. Ela representaria a distribuição conjunta de X e Y se ela estivesse toda preenchida. Sabendo que X e Y são independentes, determine a $P(X \neq Y)$

	Y=0	Y=1	P(X)
X=0	18%		
X=1			
P(Y)	60%		100%

RESPOSTAS

Exercício 1

- (a) Sendo X e Y respectivamente o número de bolas vermelhas e o número de bolas brancas escolhidas

$X = \text{qtde vermelhas}$

$Y = \text{qtde brancas}$

$Z = \text{qde de azuiz} = 5 - X - Y$

$$P(X, Y, Z) = \frac{\binom{X}{3} \binom{Y}{4} \binom{Z}{5}}{\binom{3}{12}}$$

$$P(X, Y) = \frac{\binom{X}{3} \binom{Y}{4} \binom{5 - X - Y}{5}}{\binom{3}{12}}$$

		Y			
		0	1	2	3
X	0	1/22	2/11	3/22	1/55
	1	3/22	3/11	9/110	
	2	3/44	3/55		
	3	1/220			

Lembre-se que $X + Y \leq 3$

- (b) Probabilidades marginais:

X	P(X)
0	21/55
1	27/55
2	27/220
3	1/220

Y	P(Y)
0	14/55
1	28/55
2	12/55
3	1/55

(c) $P(X=Y)$ = soma da diagonal

		Y			
		0	1	2	3
X	0	1/22	2/11	3/22	1/55
	1	3/22	3/11	9/110	
	2	3/44	3/55		
	3	1/220			

$$P(X = Y) = \frac{3}{22}$$

Exercício 2

Tabela Base

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

(a) Resposta

		Maior valor observado					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	2		1/18	1/36	1/36	1/36	1/36
	3			1/12	1/36	1/36	1/36
	4				1/9	1/36	1/36
	5					5/36	1/36
	6						1/6

(b)

		Maior valor observado					
		1	2	3	4	5	6
Menor Valor Observado	1	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18
	2		1/36	1/18	1/18	1/18	1/18
	3			1/36	1/18	1/18	1/18
	4				1/36	1/18	1/18
	5					1/36	1/18
	6						1/36

(c) Respostas

		Maior valor observado					
		1	2	3	4	5	6
Soma dos valores observados	2	1/36					
	3		1/18				
	4			1/18	1/36		
	5			1/18	1/18		
	6			1/18	1/36	1/18	
	7				1/18	1/18	1/18
	8				1/36	1/18	1/18
	9					1/18	1/18
	10					1/36	1/18
	11						1/18
	12						1/36

Exercício 3

Distribuição conjunta de X e Y

		Y	
		1	2
X	1	1/8	1/4
	2	1/8	1/2

(a) Calcule

- $P(XY \leq 3)$

		Y	
		1	2
X	1	1	2
	2	2	4

$$P(XY \leq 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

- $P(X + Y > 2)$

		Y	
		1	2
X	1	2	3
	2	3	4

$$P(X + Y > 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

- $P(X|Y > 1)$

$$P(X|Y > 1) = P(X|Y = 2) = \frac{P(X \cap Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{P(X \cap Y = 2)}{3/4} = \frac{4}{3} \times P(X \cap Y = 2)$$

X	$P(X Y > 1)$
1	1/3
2	2/3

(b) X e Y são independentes

Não são independentes! Seriam se $P(X,Y) = P(X) * P(Y)$. O que não é caso. Por exemplo, $P(1,1)=1/8$; $P(X=1)=1/4$ e $P(Y=1)=3/8$

Assim $P(X) * P(Y) = 3/32$ que é diferente de $P(1,1)=1/8$

		Y		
		1	2	
X	1	1/8	1/4	3/8
	2	1/8	1/2	5/8
		1/4	3/4	

Exercício 4

	Y=0	Y=1	P(X)
X=0	18%	$0,3 \times 0,4 = 12\%$	$0,18 / 0,6 = 30\%$
X=1	$0,7 \times 0,6 = 42\%$	$0,7 \times 0,4 = 28\%$	$100\% - 30\% = 70\%$
P(Y)	60%	$100\% - 60\% = 40\%$	100%

$$P(X \neq Y) = 18\% + 28\% = 46\%$$